Curso Introdutório à

# ANÁLISE COMPLEXA

## COM APLICAÇÕES

SEGUNDA EDIÇÃO

DENNIS G. ZILL

PATRICK D. SHANAHAN

# Sumário

# Prefácio

**Filosofia** A primeira edição deste livro nasceu do material contido nos Capítulos 17 a 20 do livro *Advanced Engineering Mathematics, Third Edition* [Matemática Avançada para Engenharia, Terceira Edição] publicado pela Jones and Bartlett Publishers, em 2006, de Dennis G. Zill e do falecido Michael R. Cullen. Esta segunda edição representa uma expansão e revisão do material original e destina-se a cursos de um semestre ou trimestre de duração. Seu objetivo é apresentar princípios básicos e aplicações de análise complexa a estudantes de cursos de graduação sem conhecimento do assunto. A escrita é direta e reflete o estilo descomplicado de *Advanced Engineering Mathematics*.

A motivação para adaptá-lo e torná-lo um texto independente adveio de uma insatisfação com os diversos livros-texto que vínhamos utilizando há anos em cursos de graduação sobre análise complexa oferecidos por nosso departamento. A experiência mostrou-nos que livros considerados acessíveis a estudantes de graduação são, em geral, escritos em um nível demasiado elevado para nossa audiência. A "audiência" de nossos cursos introdutórios consiste em alguns estudantes de matemática, outros de física e, principalmente, em estudantes de engenharia elétrica e de ciência da computação. Em nossa universidade, um estudante típico de ciências ou engenharia não é obrigado a fazer cursos de matemática voltados para a teoria, como métodos de prova, álgebra linear, álgebra abstrata, cálculo avançado ou princípios de análise real. O único pré-requisito do curso de graduação em análise complexa é que o estudante tenha completado o terceiro semestre da sequência de cálculo. Portanto, na maior parte, cálculo é tudo que admitimos como preparação para que o estudante use este livro, embora algum conhecimento prático de equações diferenciais seja útil nas seções dedicadas às aplicações. Neste texto, mantivemos a teoria em um nível que esperamos ser tratável e concentramo-nos naquilo que consideramos necessário a um curso introdutório. Muitos princípios são apresentados em um estilo informal e conceitual, em vez do formato convencional de definição/teorema/prova. Parece-nos justo tomar este texto como uma continuação do estudo de cálculo, mas desta vez como o estudo do cálculo de funções de uma variável complexa. Todavia, não interpretem essa informação erroneamente: não trocamos a teoria por um "livro de receitas". São apresentadas provas de resultados importantes, e a terminologia-padrão é usada ao longo de todo o texto. Na verdade, há muitos problemas em que o estudante deve provar algo. Acreditamos que qualquer estudante – não apenas o de matemática – pode adquirir alguma maturidade matemática e entendimento ao tentar provar algo. No entanto, também sabemos que a maioria deles não tem ideia de como iniciar uma prova. Por conseguinte, em alguns de nossos problemas de "prova" o leitor é guiado nos passos iniciais ou recebe uma boa indicação de como prosseguir.

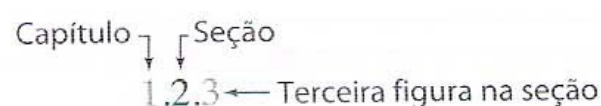
**Alterações Feitas Nesta Edição** Primeiro, falemos sobre o que não foi modificado nesta edição:

- A filosofia básica original, a quantidade de capítulos e a ordem das seções em cada capítulo são as mesmas da primeira edição. Mantivemos, propositalmente, o número de capítulos deste texto em sete. Isso foi feito por dois motivos: proporcionar um volume adequado de material, de modo que a maior parte do mesmo possa ser coberta, de forma razoável, em um único curso e, ao mesmo tempo, minimizar o custo.

Nosso principal objetivo para esta segunda edição foi reforçar os aspectos positivos do texto original. Para isto, fizemos o seguinte:

- Diversos problemas novos, especialmente de caráter conceitual, foram adicionados. Além disto, alguns dos problemas existentes foram aprimorados, enquanto outros, avaliados como ineficazes, foram forçados à aposentadoria precoce.
- Uma parte do texto e diversos exemplos foram reescritos, para esclarecer ou expandir tópicos em discussão. Em alguns casos, percebemos que a clareza da exposição podia ser melhorada com a adoção da atitude "menos é mais".

- Erros e falhas de digitação da primeira edição foram corrigidos.
- A numeração das figuras, teoremas e definições foi modificada. Adotamos um sistema de dupla n
meração decimal. Por exemplo, a interpretação de "Figura 1.2.3" é

Capítulo ↓ ↓ Seção
1.2.3 ← Terceira figura na seção

Parece-nos que esse tipo de numeração facilitará a localização de figuras, teoremas e definições
serem citadas em seções ou capítulos posteriores.

**Características do Texto** Mantivemos muitas das características da edição anterior. Cada capítulo
inicia com sua própria página de abertura, que inclui um índice e uma breve introdução sobre o assun
tratado no capítulo. Além disso, o início de cada seção em um capítulo apresenta comentários introdu
rios a respeito de tópicos específicos cobertos na seção. A maioria das seções termina com o que chamam
de Observações, onde alertamos o estudante a respeito de áreas em que cálculos real e complexo difere
ou discutimos tópicos adicionais de interesse (como a esfera e as superfícies de Riemann) relacionados
seção, mas não necessariamente nela cobertos. Muitas das seções mais longas foram divididas em sub
ções, embora permaneçam unificadas pelo assunto; isso foi feito para facilitar a apresentação do mater
ao longo de várias aulas. Os correspondentes conjuntos de exercícios foram divididos da mesma form
para auxiliar a precisão de trabalhos de casa. Comentários, classificações e algumas advertências são
palhados em abundância ao longo do texto na forma de notas de margem.

Apresentamos numerosos exemplos e tentamos, com afinco, fornecer todos os detalhes das soluçõ
Como, com frequência, aplicações de análise complexa são reunidas em um único capítulo posiciona
no fim do texto, pode não sobrar tempo para que os professores as discutam no curso. Análise comple
é uma ferramenta poderosa na matemática aplicada. Para auxiliar a exposição desse belo aspecto do
sunto, decidimos encerrar cada capítulo com uma seção dedicada às aplicações.

Os conjuntos de exercícios foram elaborados em um estilo piramidal, e em cada conjunto há, pelo men
duas partes. A primeira parte de um conjunto de exercícios consiste em uma generosa porção de problem
de treinamento de praxe; a segunda parte consiste em problemas conceituais, literais e geométricos. E
muitos conjuntos de exercícios há uma terceira parte dedicada ao uso de tecnologia. Como o modo-padr
de operação de todos os sistemas algébricos computacionais é a análise complexa, enfatizamos este tipo
software. Embora discutamos o uso de *Mathematica*® no texto, os problemas são genéricos em nature

Cada capítulo se encerra com um Questionário de Revisão do Capítulo. Achamos que algo mais c
ceitual despertaria um pouco mais de interesse do que a repetição de velhos problemas dados nos tra
cionais Exercícios de Revisão do Capítulo.

As respostas a problemas selecionados de ordem ímpar são dadas no final do texto. Já que problem
conceituais também podem ser usados como temas de discussão em sala de aula, decidimos não incl
suas respectivas respostas.

**Agradecimentos** Gostaríamos de expressar nossa gratidão aos colegas da Loyola Marymount Univ
sity (LMU) que fizeram uso do texto em seus cursos e aos professores que se deram ao trabalho de
contatar, por suas palavras de incentivo, críticas, correções e sugestões cuidadosas. Reconhecimento
pecial é reservado à colega Lily Khadjavi, que forneceu valiosas sugestões para as duas edições do liv
Desejamos expressar, ainda, nossa gratidão pelo valioso retorno recebido dos alunos da LMU, que usar
este livro nas versões preliminar e impressa. Por fim, um sincero "muito obrigado" aos seguintes reviso
que contribuíram para a primeira edição do livro:

Nicolae H. Pavel, Ohio University
Marcos Jardim, Pennsylvania University
Ilia A. Binder, Harvard University

E outro "muito obrigado" aos revisores desta segunda edição:

Joyati Debnath, Winona State University
Rich Mikula, William Paterson University de Nova Jersey
Jim Vance, Wright State University

Chris Masters, Doane College
George J. Miel, University of Nevada, Las Vegas
Jeffrey Lawson, Western Carolina University
Javad Namazi, Fairleigh Dickinson University
Irl Bivens, Davidson College

Por último, gostaríamos de agradecer ao nosso editor, Tim Anderson, por sua pressão afável, e à equipe do departamento de produção, por mais um trabalho benfeito.

**Solicitação Final** A composição de um texto de matemática, mesmo de tamanho modesto como este, envolve a manipulação de milhares de palavras e símbolos. A experiência nos ensinou que erros – de digitação ou erros verdadeiros – parecem ser um inevitável produto colateral do esforço de escrever livros-texto. Desculpamo-nos antecipadamente por quaisquer erros que venham a ser encontrados, e solicitamos que os mesmos nos sejam informados. Isso pode ser feito por meio da editora.

Dennis G. Zill Patrick D. Shanahan

CAPÍTULO

# 1

# Números Complexos e o Plano Complexo

## Índice do Capítulo



Superfície de Riemann para arg($z$). Veja Capítulo 2, Figura 2.4.19.

**Introdução** Em cursos básicos, o aluno toma conhecimento da existência de números complexos e de algumas de suas propriedades. Contudo, nos cursos de cálculo é muito provável que nada veja de números complexos. Neste texto estudamos apenas números complexos e o cálculo de funções de uma variável complexa.

Iniciamos com uma análise abrangente da aritmética e da álgebra de números complexos.

## 1.1 Números Complexos e Suas Propriedades

Ninguém inventou os "números complexos", mas no século XVI já havia controvérsias a respeito da utilidade desses números. Na tentativa de resolver equações polinomiais por meio de fórmulas que envolviam radicais, os pioneiros da matemática foram forçados a admitir a existência de outros tipos de números, além dos inteiros positivos. Equações como $x^2 + 2x + 2 = 0$ e $x^3 = 6x + 4$, que tinham como "soluções" $1 + \sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-2}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-2}}$, causavam particular aflição à comunidade de inexperientes estudiosos, pois *todos* sabiam que não existiam números como $\sqrt{-1}$ e $\sqrt{-2}$, números cujo quadrado é negativo. Estes "números" existem apenas na imaginação das pessoas ou, como disse um filósofo, "o imaginário, (este) favorito do misticismo complexo".[1] Ao longo do tempo, "números imaginários" não desapareceram, principalmente porque os matemáticos são obstinados e alguns chegam a ser práticos. Um famoso matemático defendia que embora "existam em nossa imaginação... nada nos impede... de usá-los em cálculos".[2] Os matemáticos também detestam descartar alguma coisa. Afinal, havia ainda uma lembrança de que números negativos foram, de início, taxados como "fictícios". O conceito de *número* evoluiu ao longo dos séculos; de forma gradual, o conjunto dos números deixou de conter apenas inteiros positivos e passou a incluir números racionais, negativos e irracionais. Contudo, no século XVIII o conceito de número deu um gigantesco passo à frente quando o matemático alemão Carl Friedrich Gauss deu aos assim chamados números imaginários – ou *números complexos*, como passavam a ser denominados – um formato lógico e consistente, tratando-os como uma extensão do sistema de números reais.

Nosso objetivo nesta primeira seção é discutir algumas definições básicas e a aritmética de números complexos.

**A Unidade Imaginária** Mesmo após ganhar larga respeitabilidade, por meio do trabalho seminal de Carl Friedrich Gauss e do matemático francês Augustin Louis Cauchy, a desafortunada denominação "imaginário" sobreviveu através dos séculos. O símbolo $i$ foi originalmente empregado como um disfarce para o embaraçoso símbolo $\sqrt{-1}$. Hoje, dizemos que $i$ é a **unidade imaginária**, definida pela propriedade $i^2 = -1$. Com o uso da unidade imaginária construímos um número complexo genérico a partir de dois números reais.

**Definição 1.1.1 Número Complexo**

Um **número complexo** é qualquer número da forma $z = a + ib$, onde $a$ e $b$ são números reais e $i$, a unidade imaginária.

*Nota:* a parte imaginária de $z = 4 - 9i$ é $-9$ e não $-9i$.

**Terminologia** As notações $a + ib$ e $a + bi$ são usadas indiscriminadamente. O número real $a$ em $z = a + ib$ é chamado **parte real** de $z$; o número real $b$ é chamado **parte imaginária** de $z$. As partes real e imaginária de um número complexo $z$ são abreviadas por $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$, respectivamente. Por exemplo, se $z = 4 - 9i$, então $\text{Re}(z) = 4$ e $\text{Im}(z) = -9$. O produto de uma constante real pela unidade imaginária é chamado de um **número imaginário puro**. Por exemplo, $z = 6i$ é um número imaginário puro. Dois números complexos são **iguais** se suas correspondentes partes reais e imaginárias forem iguais. Como este conceito é útil, formalizamos a última asserção na próxima definição.

**Definição 1.1.2 Igualdade**

Os números complexos $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ são **iguais**, $z_1 = z_2$, se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

---

[1]Os autores citam Eugen Dühring (1833–1921), controverso filósofo, economista, jurista e cientista político alemão. Em 1887, em sua obra *Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik* [História Crítica dos Princípios Universais da Mecânica] criticou os matemáticos pelo uso de números imaginários. (N.T.)

[2]Leonard Euler (1707–1783), em *Elementos de Álgebra*. O suíço Euler foi um dos mais influentes e prolíficos matemáticos de todos os tempos. (N.T.)

Em termos dos símbolos $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$, a Definição 1.1.2 estabelece que $z_1 = z_2$ se $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ e $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$.

A totalidade de números complexos ou o conjunto de números complexos é, em geral, denotado pelo símbolo **C**. Como *qualquer* número real $a$ pode ser escrito como $z = a + 0i$, observamos que o conjunto de números reais **R** é um subconjunto de **C**.

**Operações Aritméticas** Números complexos podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos. Se $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, essas operações são definidas da seguinte forma:

*Adição*: $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

*Subtração*: $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

*Multiplicação*: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$

$$= a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2)$$

*Divisão*: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$, $a_2 \neq 0$, ou $b_2 \neq 0$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

As familiares leis comutativa, associativa e distributiva são válidas para números complexos:

*Leis comutativas*: $\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1z_2 = z_2z_1 \end{cases}$

*Leis associativas*: $\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3 \end{cases}$

*Lei distributiva*: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

Com estas leis não há necessidade de memorizar as definições de adição, subtração e multiplicação.

### *Adição, Subtração e Multiplicação*

(*i*) *Para somar (subtrair) dois números complexos, basta somar (subtrair) as correspondentes partes reais e imaginárias.*

(*ii*) *Para multiplicar dois números complexos, basta usar a lei distributiva e o fato de que* $i^2 = -1$.

A definição de divisão exige um pouco mais de elaboração, de modo que adiaremos um pouco a discussão detalhada desta operação.

---

EXEMPLO 1 **Adição e Multiplicação**

Se $z_1 = 2 + 4i$ e $z_2 = -3 + 8i$, determinemos (**a**) $z_1 + z_2$ e (**b**) $z_1z_2$.

**Solução** (**a**) Somando as partes reais e imaginárias, a adição dos números complexos $z_1$ e $z_2$ é

$$z_1 + z_2 = (2 + 4i) + (-3 + 8i) = (2 - 3) + (4 + 8)i = -1 + 12i$$

(**b**) Pela lei distributiva, e como $i^2 = -1$, o produto de $z_1$ e $z_2$ é

$$\begin{aligned} z_1z_2 = (2 + 4i)(-3 + 8i) &= (2 + 4i)(-3) + (2 + 4i)(8i) \\ &= -6 - 12i + 16i + 32i^2 \\ &= (-6 - 32) + (16 - 12)i = -38 + 4i. \end{aligned}$$

❑

**Zero e Unidade** No sistema de números complexos o **zero** é o número $0 + 0i$ e a **unidade**, $1 + 0i$. O zero e a unidade são denotados por 0 e 1, respectivamente. O zero é a **identidade aditiva** do sistema de números complexos, pois para qualquer número complexo $z = a + ib$ temos $z + 0 = z$. Para comprovar isso, usemos a definição de adição:

$$z + 0 = (a + ib) + (0 + 0i) = a + 0 + i(b + 0) = a + ib = z.$$

De modo similar, a unidade é a **identidade multiplicativa** do sistema de números complexos, pois para qualquer número complexo $z$ temos $z \cdot 1 = z \cdot (1 + 0i) = z$.

**Conjugado** Se $z$ for um número complexo, o número obtido pela mudança do sinal de sua parte imaginária é chamado de **complexo conjugado**, ou simplesmente **conjugado**, de $z$, e é denotado pelo símbolo $\bar{z}$.[3] Em outras palavras, se $z = a + ib$, seu conjugado é $\bar{z} = a - ib$. Por exemplo, se $z = 6 + 3i$, então $\bar{z} = 6 - 3i$; se $z = -5 - i$, então $\bar{z} = -5 + i$. Se $z$ for um número real, digamos, $z = 7$, então $\bar{z} = 7$. A partir das definições de adição e subtração de números complexos mostramos prontamente que o conjugado de uma soma ou de uma diferença de dois números complexos é a soma ou a diferença dos conjugados, respectivamente:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2. \tag{1}$$

Além disso, temos as três propriedades adicionais:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \bar{\bar{z}} = z. \tag{2}$$

Obviamente, o conjugado de qualquer soma (produto) finita(o) de números complexos é a soma (produto) dos conjugados.

As definições de adição e de multiplicação mostram que a soma e o produto de um número complexo $z$ e seu conjugado $\bar{z}$ são números reais:

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a \tag{3}$$

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2. \tag{4}$$

A diferença entre um número complexo $z$ e seu conjugado $\bar{z}$ é um número imaginário puro:

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib. \tag{5}$$

Como $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$, (3) e (5) fornecem duas fórmulas úteis:

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{6}$$

Contudo, (4) é *a* relação importante nesta discussão, pois permite uma abordagem prática para a divisão.

### *Divisão*

*Para dividir $z_1$ por $z_2$, multiplicamos o numerador e o denominador de $z_1/z_2$ pelo conjugado de $z_2$. Ou seja,*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} \tag{7}$$

*e usamos o fato de que $z_2\bar{z}_2$ é a soma dos quadrados das partes real e imaginária de $z_2$.*

O procedimento descrito em (7) é ilustrado no próximo exemplo.

[3]A notação $z^*$ é igualmente utilizada para representar o complexo conjugado de $z$. (N.T.)

---

EXEMPLO 2 **Divisão**

Para $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 4 + 6i$, calculemos $z_1/z_2$.

**Solução** Multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado $\bar{z} = 4 - 6i$ e, a seguir, usamos (4):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{4+6i} = \frac{2-3i}{4+6i}\,\frac{4-6i}{4-6i} = \frac{8-12i-12i+18i^2}{4^2+6^2} = \frac{-10-24i}{52}.$$

Como desejamos uma resposta na forma $a + bi$, reescrevemos o último resultado dividindo as partes real e imaginária do numerador $-10 - 24i$ por 52 e simplificamos as frações:

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{10}{52} - \frac{24}{52}i = -\frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$

❑

**Inversos** No sistema de números complexos, todo número $z$ tem um único **inverso aditivo**. Como no sistema de números reais, o inverso aditivo de $z = a + ib$ é seu *negativo* $-z$, onde $-z = -a - bi$. Para qualquer número complexo $z$, temos $z + (-z) = 0$. De modo similar, todo número complexo *não nulo* $z$ tem um **inverso multiplicativo**. Em símbolos, para $z \neq 0$ existe um e somente um número complexo não nulo $z^{-1}$ tal que $zz^{-1} = 1$. O inverso multiplicativo $z^{-1}$ é o mesmo que o **recíproco** $1/z$.

---

EXEMPLO 3 **Recíproco**

Determinemos o recíproco de $z = 2 - 3i$.

**Solução** Usando a definição de divisão, obtemos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i}\,\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13}.$$

Ou seja, $$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

Vale a pena gastar alguns segundos e efetuar a multiplicação

$$zz^{-1} = (2-3i)\left(\tfrac{2}{13} + \tfrac{3}{13}i\right) = 1.$$

❑

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

(*i*) Várias das propriedades do sistema de números reais **R** permanecem válidas no sistema de números complexos **C**, mas há algumas diferenças notáveis. Por exemplo, o conceito de *ordem* do sistema de números reais não se aplica ao sistema de números complexos. Em outras palavras, não podemos comparar dois números complexos $z_1 = a_1 + ib_1$, $b_1 \neq 0$, e $z_2 = a_2 + ib_2$, $b_2 \neq 0$, por meio de desigualdades. Asserções como $z_1 < z_2$ ou $z_2 \geq z_1$ não têm qualquer significado em **C**, exceto nos casos especiais em que $z_1$ e $z_2$ forem números reais. O Problema 55 do Conjunto de Exercícios 1.1 trata disso. Portanto, em uma asserção do tipo $z_1 = \alpha z_2$, $\alpha > 0$ fica implícito da desigualdade $\alpha > 0$ que o símbolo $\alpha$ representa um número real.

(*ii*) Algumas coisas que sabemos ser impossíveis na análise real, como $e^x = -2$ e sen $x = 5$, quando $x$ é uma variável real, são perfeitamente corretas e corriqueiras na análise complexa, quando o símbolo $x$ é interpretado como uma variável complexa, como discutido no Exemplo 3 da Seção 4.1 e no Exemplo 2 da Seção 4.3.

Continuaremos a ressaltar outras diferenças entre as análises real e complexa ao longo do restante do texto.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.1 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

**1.** Determine as seguintes potências de $i$.

(a) $i^8$ (b) $i^{11}$

(c) $i^{42}$ (d) $i^{105}$

**2.** Escreva o número dado na forma $a + ib$.

(a) $2i^3 - 3i^2 + 5i$ (b) $3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9$

(c) $\frac{5}{i} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}}$ (d) $2i^6 + \left(\frac{2}{-i}\right)^3 + 5i^{-5} - 12i$

Nos Problemas 3–20, escreva o número dado na forma $a + ib$.

**3.** $(5 - 9i) + (2 - 4i)$

**4.** $3(4 - i) - 3(5 + 2i)$

**5.** $i(5 + 7i)$

**6.** $i(4 - i) + 4i(1 + 2i)$

**7.** $(2 - 3i)(4 + i)$

**8.** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i\right)$

**9.** $3i + \frac{1}{2 - i}$

**10.** $\frac{i}{1 + i}$

**11.** $\frac{2 - 4i}{3 + 5i}$

**12.** $\frac{10 - 5i}{6 + 2i}$

**13.** $\frac{(3 - i)(2 + 3i)}{1 + i}$

**14.** $\frac{(1 + i)(1 - 2i)}{(2 + i)(4 - 3i)}$

**15.** $\frac{(5 - 4i) - (3 + 7i)}{(4 + 2i) + (2 - 3i)}$

**16.** $\frac{(4 + 5i) + 2i^3}{(2 + i)^2}$

**17.** $i(1 - i)(2 - i)(2 + 6i)$

**18.** $(1 + i)^2(1 - i)^3$

**19.** $(3 + 6i) + (4 - i)(3 + 5i) + \frac{1}{2 - i}$

**20.** $(2 + 3i)\left(\frac{2 - i}{1 + 2i}\right)^2$

Nos Problemas 21–24, use o **teorema binomial***

$$(A + B)^n = A^n + \frac{n}{1!}A^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2!}A^{n-2}B^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}A^{n-k}B^k + \cdots + B^n,$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$, para escrever o número dado na forma $a + ib$.

**21.** $(2 + 3i)^2$

**22.** $\left(1 - \frac{1}{2}i\right)^3$

**23.** $(-2 + 2i)^5$

**24.** $(1 + i)^8$

Nos Problemas 25 e 26, determine $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

**25.** $z = \left(\frac{i}{3 - i}\right)\left(\frac{1}{2 + 3i}\right)$

**26.** $z = \frac{1}{(1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i)}$

Nos Problemas 27–30, $z = x + iy$. Expresse a quantidade dada em termos de $x$ e $y$.

**27.** $\text{Re}(1/z)$

**28.** $\text{Re}(z^2)$

**29.** $\text{Im}(2z + 4\bar{z} - 4i)$

**30.** $\text{Im}(\bar{z}^2 + z^2)$

Nos Problemas 31–34, $z = x + iy$. Expresse a quantidade dada em termos dos símbolos $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

**31.** $\text{Re}(iz)$

**32.** $\text{Im}(iz)$

**33.** $\text{Im}((1 + i)z)$

**34.** $\text{Re}(z^2)$

*Os coeficientes das expansões $(A + B)^2$, $(A + B)^3$ etc. podem ser obtidos com o uso do triângulo de Pascal.

Nos Problemas 35 e 36, mostre que os números indicados satisfazem a equação dada. Em cada caso, explique por que soluções adicionais podem ser encontradas.

**35.** $z^2 + i = 0$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Determine uma solução adicional, $z_2$.

**36.** $z^4 = -4$; $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$. Determine duas soluções adicionais, $z_3$ e $z_4$.

Nos Problemas 37–42, use a Definição 1.1.2 para resolver cada equação para $z = a + ib$.

**37.** $2z = i(2 + 9i)$

**38.** $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$

**39.** $z^2 = i$

**40.** $\bar{z}^2 = 4z$

**41.** $z + 2\bar{z} = \frac{2 - i}{1 + 3i}$

**42.** $\frac{z}{1 + \bar{z}} = 3 + 4i$

Nos Problemas 43 e 44, resolva o dado sistema de equações para $z_1$ e $z_2$.

**43.** $iz_1 - iz_2 = 2 + 10i$
$-z_1 + (1 - i)z_2 = 3 - 5i$

**44.** $iz_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 2i$
$(2 - i)z_1 + 2iz_2 = 4i$

## Foco em Conceitos

**45.** O que pode ser dito sobre o número complexo $z$, se $z = \bar{z}$? E se $(z)^2 = (\bar{z})^2$?

**46.** Pense em uma solução alternativa para o Problema 24. Então, sem efetuar muitas contas, determine o valor de $(1 + i)^{5404}$.

**47.** Para um inteiro não negativo $n$, $i^n$ pode ter um de quatro valores: 1, $i$, $-1$ e $-i$. Em cada um dos quatro casos seguintes, expresse o expoente inteiro $n$ em termos do símbolo $k$, onde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(a) $i^n = 1$

(b) $i^n = i$

(c) $i^n = -1$

(d) $i^n = -i$

**48.** Existe uma alternativa ao procedimento dado em (7). Por exemplo, o quociente $(5 + 6i)/(1 + i)$ deve ser expresso na forma $a + ib$:

$$\frac{5 + 6i}{1 + i} = a + ib.$$

Logo, $5 + 6i = (1 + i)(a + ib)$. Use este resultado e a Definição 1.1.2 para determinar o quociente dado. Use este método para determinar o recíproco de $3 - 4i$.

**49.** Admita, por um momento, que $\sqrt{1 + i}$ tem algum significado no sistema de números complexos. Como você demonstraria a validade da igualdade

$$\sqrt{1 + i} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}} + i\sqrt{-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}}?$$

**50.** Suponha que $z_1$ e $z_2$ sejam números complexos. O que pode ser dito de $z_1$ e $z_2$ se $z_1 z_2 = 0$?

**51.** Suponha que o produto $z_1 z_2$ de dois números complexos seja uma constante real não nula. Mostre que $z_2 = k\bar{z}_1$, onde $k$ é um número real.

**52.** Sem efetuar muitos cálculos, explique por que um resultado imediato de (2) e de (3) é $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

**53.** Matemáticos gostam de provar que certas "coisas" em um sistema matemático são únicas. Por exemplo, a prova de uma proposição como "A unidade no sistema de números complexos é única" em geral se inicia com a hipótese de que existem duas unidades *diferentes* – digamos, $I_1$ e $I_2$ – e prossegue com a demonstração de que esta hipótese leva a alguma contradição. Dê uma contradição, caso se admita que existem duas unidades diferentes.

**54.** Siga o procedimento indicado no Problema 53 para provar a proposição "O zero no sistema de números complexos é único".

**55.** Um sistema de números é definido como um **sistema ordenado** se contiver um subconjunto $P$ com as seguintes propriedades:

*Primeira, para qualquer número não nulo $x$ no sistema, $x$ ou $-x$ (apenas um deles) está em $P$.*

*Segunda, se $x$ e $y$ forem números em $P$, então $xy$ e $x + y$ estão em $P$.*

No sistema de números reais, o conjunto $P$ é o conjunto de números *positivos*. No sistema de números reais, dizemos que $x$ é maior que $y$, denotado por $x > y$, se e somente se $x - y$ estiver em $P$. Discuta por que não existe um tal conjunto $P$ no sistema de números complexos. [*Sugestão:* considere $i$ e $-i$.]

## 1.2 Plano Complexo

Um número complexo $z = x + iy$ é determinado de forma única por um *par ordenado* de números reais $(x, y)$. A primeira e a segunda entradas do par ordenado correspondem às partes real e imaginária do número complexo, respectivamente. Por exemplo, o par ordenado $(2, -3)$ corresponde ao número complexo $z = 2 - 3i$. Reciprocamente, $z = 2 - 3i$ determina o par ordenado $(2, -3)$. Os números $7$, $i$ e $-5i$ são equivalentes a $(7, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -5)$, respectivamente. Dessa forma, podemos associar um número complexo $z = a + ib$ ao *ponto* $(x, y)$ em um plano coordenado.

**Figura 1.2.1** Plano z

**Plano Complexo** Devido à correspondência entre um número complexo $z = a + ib$ e um e somente um ponto $(x, y)$ em um plano coordenado, podemos usar os termos *número complexo* e *ponto* de forma indiscriminada. O plano coordenado ilustrado na Figura 1.2.1 é chamado de **plano complexo** ou, simplesmente, **plano z**. O eixo horizontal ou eixo $x$ é chamado **eixo real**, pois cada ponto neste eixo é um número real. O eixo vertical ou eixo $y$ é chamado de **eixo imaginário**, pois cada ponto neste eixo é um número imaginário puro.

**Figura 1.2.2** z como um vetor de posição

**Vetores** Em outros cursos o aluno, sem dúvida, viu que os números em um par ordenado de números reais podem ser interpretados como as componentes de um vetor. Assim, um número complexo $z = x + iy$ também pode ser visto como um **vetor** de posição bidimensional, ou seja, um vetor cujo ponto inicial é a origem do sistema de eixos e cuja extremidade é o ponto $(x, y)$, como indicado na Figura 1.2.2. Esta interpretação vetorial nos leva a definir o comprimento do vetor $z$ como a distância $\sqrt{x^2 + y^2}$ da origem ao ponto $(x, y)$. Este comprimento recebe uma denominação especial.

**Definição 1.2.1 Módulo**

O **módulo** de um número complexo $z = x + iy$ é o número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

O módulo $|z|$ de um número complexo $z$ também é chamado de **valor absoluto** de $z$. Neste livro usaremos, de forma indiscriminada, os termos *módulo* e *valor absoluto*.

---

**EXEMPLO 1 Módulo de um Número Complexo**

Se $z = 2 - 3i$, então de (1) determinamos que o modulo do número deve ser $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. Se $z = -9i$, (1) fornece $|-9i| = \sqrt{(-9)^2} = 9$. ❑

**Propriedades** Para qualquer número complexo $z = x + iy$ recordemos de (4), da Seção 1.1, que o produto $z\bar{z}$ é um número real; de modo mais específico, $z\bar{z}$ é a soma dos quadrados das partes real e imaginária de $z$: $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Uma inspeção de (1) nos mostra que $|z|^2 = x^2 + y^2$. Essas relações

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{e} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \tag{2}$$

merecem ser memorizadas. O módulo de um número complexo $z$ tem as seguintes propriedades adicionais:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2| \quad \text{e} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{3}$$

Notemos que quando $z_1 = z_2 = z$, a primeira propriedade em (3) mostra que

$$|z^2| = |z|^2. \tag{4}$$

(a) Adição de vetores

(b) Subtração de vetores

Figura 1.2.3 Adição e subtração de vetores

A propriedade $|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$ pode ser provada com o uso de (2) e é deixada como um exercício (Problema 49 do Conjunto de Exercícios 1.2).

**Distância, de novo** A adição dos números complexos $z_1 = x_1 + y_1$ e $z_2 = x_2 + y_2$ dada na Seção 1.1, ao ser posta em termos de pares ordenados,

$$(x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

recai na definição da adição de vetores em termos de componentes. A interpretação vetorial da soma $z_1 + z_2$ é o vetor mostrado na Figura 1.2.3(a) como a diagonal principal de um paralelogramo cujo ponto inicial é a origem e a extremidade, o ponto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. A diferença $z_1 - z_2$ pode ser desenhada com início em $z_1$ e extremidade em $z_2$ ou como o vetor posição com início na origem e extremidade no ponto $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, como na Figura 1.2.3(b). No caso $z = z_1 - z_2$, segue de (1) e da Figura 1.2.3(b) que a **distância entre dois pontos** $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ no plano complexo é igual à distância entre a origem e o ponto $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$; ou seja, $|z| = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$ ou

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{5}$$

Quando $z_1 = 0$, vemos mais uma vez que o módulo $|z_2|$ representa a distância entre a origem e o ponto $z_2$.

---

**EXEMPLO 2 Conjunto de Pontos no Plano Complexo**

Descrevamos o conjunto de pontos $z$ no plano complexo que satisfazem $|z| = |z - i|$.

**Solução** Podemos interpretar a equação dada como uma igualdade de distâncias: a distância de um ponto $z$ à origem é igual à distância de $z$ ao ponto $i$. Geometricamente, da Figura 1.2.4, parece plausível que o conjunto de pontos $z$ esteja em uma reta horizontal. Para determinar isso analiticamente usamos (1) e (5) para escrever $|z| = |z - i|$ como

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$
$$x^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

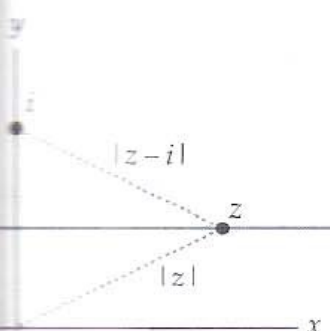



Figura 1.2.4 Reta horizontal é o conjunto de pontos que satisfazem $|z| = |z - i|$

A última equação fornece $y = \frac{1}{2}$. Como a igualdade é válida para $x$ arbitrário, $y = \frac{1}{2}$ é a equação da reta horizontal colorida mostrada na Figura 1.2.4. Números complexos que satisfazem $|z| = |z - i|$ podem, portanto, ser escritos como $z = x + (\frac{1}{2})i$. ❑

**Desigualdades** Nas Observações no fim da seção anterior ressaltamos que no sistema de números complexos não é possível definir qualquer relação de ordem. Contudo, como $|z|$ é um número real, podemos comparar os valores absolutos de dois números complexos. Por exemplo, se $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 5 - i$, então $|z_1| = \sqrt{25} = 5$ e $|z_2| = \sqrt{26}$; por conseguinte, $|z_1| < |z_2|$. Devido a (1), uma interpretação geométrica desta desigualdade é simples: *o ponto* $(3, 4)$ *é mais próximo da origem que o ponto* $(5, -1)$.

Consideremos, agora, o triângulo ilustrado na Figura 1.2.5, com vértices na origem, em $z_1$ e em $z_1 + z_2$. Sabemos, da geometria, que o comprimento do lado do triângulo correspondente ao vetor $z_1 + z_2$ não pode ser maior que a soma dos outros dois lados. Em símbolos, podemos expressar esta observação pela desigualdade

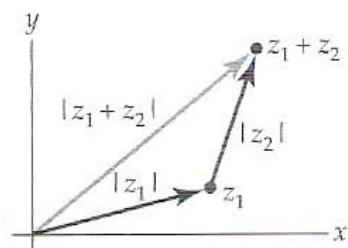
A desigualdade ... ser deduzida ... tir das ... priedades de ... eros complexos ... s na Seção ... O Problema ... o Conjunto ... xercícios 1.2 ... ra isso. ➡

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{6}$$

**Figura 1.2.5** Triângulo com lados vetoriais

O resultado em (6) é conhecido como **desigualdade triangular**. Da identidade $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$, (6) fornece

$$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|.$$

Como $|-z_2| = |z_2|$ (a ser mostrado no Problema 47 do Conjunto de Exercícios 1.2), resolvendo a equação anterior para $|z_1 + z_2|$ obtemos outra desigualdade importante:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|. \tag{7}$$

No entanto, como $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, (7) pode ser escrita na forma alternativa $|z_1 + z_2| = |z_2 + z_1| \geq |z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|)$; a combinação deste resultado com (7) fornece:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|. \tag{8}$$

Substituindo $z_2$ por $-z_2$, (6) também implica que $|z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |(-z_2)| = |z_1| + |z_2|$. Este resultado é o mesmo que

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{9}$$

A partir de (8) com a substituição de $z_2$ por $-z_2$, também encontramos

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|. \tag{10}$$

Para finalizar, ressaltamos que a desigualdade triangular (6) se aplica a qualquer soma finita de números complexos:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|. \tag{11}$$

As desigualdades (6), (8) e (10) se mostrarão importantes quando trabalharmos com integrais nos Capítulos 5 e 6.

---

EXEMPLO 3 **Limitante Superior**

Determinemos um limitante superior para $\left|\dfrac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2}\right|$, quando $|z| = 2$.

**Solução** Pelo segundo resultado em (3), o valor absoluto de um quociente é o quociente dos valores absolutos. Portanto, com $|-1| = 1$, desejamos determinar um número real positivo $M$ tal que

$$\frac{1}{|z^4 + 3z^2 + 2|} \leq M.$$

Para garantir isto, necessitamos do menor denominador possível. Como $z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2 + 1)(z^2 + 2)$, podemos usar o primeiro resultado em (3) em conjunto com (8) para escrever

$$|z^4 + 3z^2 + 2| = |z^2 + 1| \cdot |z^2 + 2| \geq \big||z^2| - 1\big| \cdot \big||z^2| - 2\big|. \tag{12}$$

Usando $|z_2| = 2$, (12) fornece

$$\begin{aligned} |z^4 + 3z^2 + 2| \geq \big||z^2| - 1\big| \cdot \big||z^2| - 2\big| &= \big||z|^2 - 1\big| \cdot \big||z|^2 - 2\big| \\ &= |4 - 1| \cdot |4 - 2| \\ &= 6. \end{aligned}$$

Por conseguinte, para $|z_2| = 2$, temos

$$\left|\frac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2}\right| = \frac{1}{|z^4 + 3z^2 + 2|} \leq \frac{1}{6}.$$

❑

## Observações

Vimos que a desigualdade triangular $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ indica que o comprimento do vetor $z_1 + z_2$ não pode exceder a soma dos comprimentos dos vetores individuais $z_1$ e $z_2$. Os resultados em (3)

são interessantes. O produto $z_1z_2$ e o quociente $z_1/z_2$ ($z_2 \neq 0$) são números complexos e são vetores no plano complexo. As igualdades $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ e $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ indicam que os comprimentos dos vetores $z_1z_2$ e $z_1/z_2$ são exatamente iguais ao produto dos comprimentos e ao quociente dos comprimentos, respectivamente, dos vetores individuais $z_1$ e $z_2$.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.2 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro).*

Nos Problemas 1–4, interprete $z_1$ e $z_2$ como vetores. Desenhe $z_1$, $z_2$, as somas e diferenças indicadas como vetores.

**1.** $z_1 = 4 + 2i,\ z_2 = -2 + 5i;\ z_1 + z_2,\ z_1 - z_2$

**2.** $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i;\ z_1 + z_2,\ z_1 - z_2$

**3.** $z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = -3i;\ 3z_1 + 5z_2,\ z_1 - 2z_2$

**4.** $z_1 = 4 - 3i,\ z_2 = -2 + 3i;\ 2z_1 + 4z_2,\ z_1 - z_2$

**5.** Dado que $z_1 = 5 - 2i$ e $z_2 = -1 - i$, determine um vetor $z_3$ na mesma direção de $z_1 + z_2$, mas quatro vezes mais longo.

**6.** (a) Posicione os pontos $z_1 = -2 - 8i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -6 - 5i$ no plano complexo.

(b) Os pontos na parte (a) determinam um triângulo com vértices em $z_1$, $z_2$ e $z_3$, respectivamente. Expresse cada lado do triângulo como uma diferença de vetores.

**7.** No Problema 6, determine se os pontos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ são vértices de um triângulo retângulo.

**8.** Os três pontos $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = -4 - i$, $z_3 = 3 + i$ são vértices de um triângulo. Determine o comprimento da mediana de $z_1$ ao lado $z_3 - z_2$.

Nos Problemas 9–12, determine o módulo do número complexo dado.

**9.** $(1 - i)^2$

**10.** $i(2 - i) - 4\left(1 + \frac{1}{4}i\right)$

**11.** $\dfrac{2i}{3 - 4i}$

**12.** $\dfrac{1 - 2i}{1 + i} + \dfrac{2 - i}{1 - i}$

Nos Problemas 13 e 14, escreva $z = x + iy$. Expresse a quantidade especificada em termos de $x$ e de $y$.

**13.** $|z - 1 - 3i|^2$

**14.** $|z + 5\bar{z}|$

Nos Problemas 15 e 16, determine qual dos dois números complexos dados está mais próximo da origem. Qual está mais próximo de $1 + i$?

**15.** $10 + 8i,\ 11 - 6i$

**16.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i,\ \frac{2}{3} + \frac{1}{6}i$

Nos Problemas 17–26, descreva o conjunto de pontos $z$ no plano complexo que satisfazem a equação dada.

**17.** $\mathrm{Re}((1 + i)z - 1) = 0$

**18.** $[\mathrm{Im}(i\bar{z})]^2 = 2$

**19.** $|z - i| = |z - 1|$

**20.** $\bar{z} = z^{-1}$

**21.** $\mathrm{Im}(z^2) = 2$

**22.** $\mathrm{Re}(z^2) = |\sqrt{3} - i|$

**23.** $|z - 1| = 1$

**24.** $|z - i| = 2\,|z - 1|$

**25.** $|z - 2| = \mathrm{Re}(z)$

**26.** $|z| = \mathrm{Re}(z)$

Nos Problemas 27 e 28, comprove as desigualdades simultâneas dadas.

**27.** Se $|z| = 2$, então $8 \leq |z + 6 + 8i| \leq 12$.

**28.** Se $|z| = 1$, então $2 \leq |z^2 - 3| \leq 4$.

**29.** Determine um limitante superior para o modulo de $3z^2 + 2z + 1$, quando $|z| \leq 1$.

**30.** Determine limitantes superior e inferior para o recíproco do modulo de $z^4 - 5z^2 + 6$, quando $|z| = 2$. [*Sugestão:* $z^4 - 5z^2 + 6 = (z^2 - 3)\,(z^2 - 2)$.]

Nos Problemas 31 e 32, determine um número $z$ que satisfaça a equação dada.

**31.** $|z| - z = 2 + i$

**32.** $|z|^2 + 1 + 12i = 6z$

**Foco em Conceitos**

**33.** (a) Posicione o par de pontos $z = a + ib$ e $\bar{z} = a - ib$ no plano complexo, com $a > 0$, $b > 0$; $a > 0$, $b < 0$; $a < 0$, $b > 0$; $a < 0$, $b < 0$.

(b) Em geral, como você descreveria, geometricamente, a relação entre um número complexo $z = a + ib$ e seu conjugado $\bar{z} = a - ib$?

(c) Descreva, geometricamente, a relação entre $z = a + ib$ e $z_1 = -a + ib$.

**34.** Como você descreveria, geometricamente, a relação entre um número complexo não nulo $z = a + ib$ e seu

(a) negativo, $-z$?

(b) inverso, $z^{-1}$? [*Sugestão*: reveja o Problema 33 e escreva $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.]

**35.** Considere os números complexos $z_1 = 4 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = 3 - 5i$.

(a) Use quatro desenhos distintos para posicionar os quatro pares de pontos $z_1$, $iz_1$; $z_2$, $iz_2$; $z_3$, $iz_3$; $z_4$, $iz_4$ no plano complexo.

(b) Em geral, como você descreveria, geometricamente, o efeito de multiplicar um número complexo $z = x + iy$ por $i$? E por $-i$?

**36.** Qual é o único número complexo com módulo 0?

**37.** Em que circunstâncias $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

**38.** Usando a variável complexa $z$, determine uma equação de um círculo no plano complexo, de raio 5 e centrado em $3 - 6i$. [*Sugestão*: use (5).]

**39.** Descreva o conjunto de pontos $z$ no plano complexo que satisfazem $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, sendo $\theta$ medido em radianos, a partir do eixo $x$ positivo.

**40.** Usando a variável complexa $z$, determine uma equação de uma elipse no plano complexo, com focos nos pontos $-2 + i$ e $2 + i$ e eixo principal com 8 unidades de comprimento.

**41.** Considere $z = x + iy$. Em (6) da Seção 1.1, vimos que $x$ e $y$ podem ser expressos em termos de $z$ e de $\bar{z}$. Use esses resultados para expressar as seguintes equações cartesianas na forma complexa:

(a) $x = 3$ (b) $y = 10$

(c) $y = x$ (d) $x + 2y = 8$

**42.** Usando notação complexa, determine uma equação paramétrica para o segmento de reta que, no plano complexo, une dois números complexos distintos quaisquer $z_1$ e $z_2$.

**43.** Suponha que $z_1$, $z_2$ e $z_3$ sejam três pontos distintos no plano complexo e que $k$ seja um número real. Interprete $z_3 - z_2 = k(z_2 - z_1)$ geometricamente.

**44.** Considere $z_1 \neq z_2$. Interprete $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$ geometricamente em termos de vetores $z_1$ e $z_2$.

**45.** Considere $w = \bar{z}/z$. Sem efetuar contas, explique por que $|w| = 1$.

**46.** Sem efetuar contas, explique por que as desigualdades $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ são válidas para qualquer número complexo $z$.

**47.** Mostre que

(a) $|z| = |-z|$ (b) $|z| = |\bar{z}|$.

**48.** Para quaisquer dois números complexos $z_1$ e $z_2$, mostre que

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

**49.** Neste problema, indicaremos a você como começar a prova da primeira propriedade em (3), $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$. Do primeiro resultado em (2), podemos escrever $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}$. Agora, use a primeira propriedade em (2) da Seção 1.1 para dar prosseguimento à prova.

**50.** Neste problema, guiaremos você em uma prova analítica da desigualdade triangular (6).

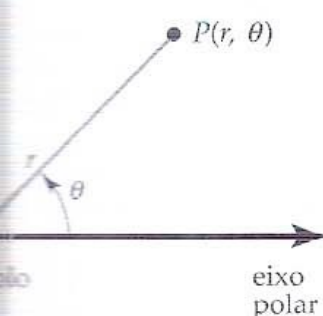
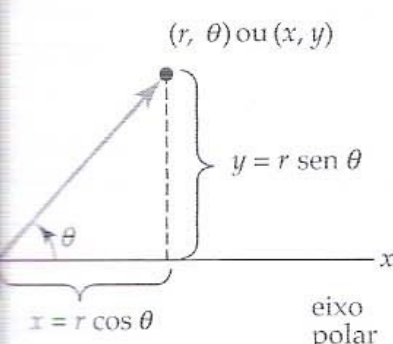
Como $|z_1 + z_2|$ e $|z_1| + |z_2|$ são números reais positivos, temos que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ se e somente se $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. Por conseguinte, basta mostrar que $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.

(a) Explique por que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$.

(b) Explique por que $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2$.

(c) Use as partes (a) e (b) em conjunto com os resultados do Problema 46 para obter (6).

## 1.3 Forma Polar de Números Complexos

Recordemos do cálculo que um ponto $P$ no plano, de coordenadas retangulares $(x, y)$, também pode ser descrito em termos de **coordenadas polares**. O sistema de coordenadas polares, inventado por Isaac Newton, consiste no ponto $O$, chamado **polo** ou **origem**, e na semirreta horizontal orientada com extremidade $O$, chamada **eixo polar**. Se $r$ for uma distância direcionada do polo ao ponto $P$ e $\theta$ , um ângulo de inclinação (em radianos) medido do eixo polar ao segmento de reta $OP$, então $P$ pode ser descrito pelo par de coordenadas $(r, \theta)$, chamadas de coordenadas polares de $P$. A Figura 1.3.1 ilustra os conceitos.

ra 1.3.1 Coordenadas
res

**Forma Polar** Suponhamos, como indicado na Figura 1.3.2, que um sistema de coordenadas polares seja superposto ao plano complexo, de modo que o eixo polar coincida com o eixo $x$ positivo e o polo $O$, com a origem. Então, $x$, $y$, $r$ e $\theta$ se relacionam por $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$. Estas equações nos permitem expressar um número complexo não nulo $z = x + iy$ como $z = (r \cos \theta) + i(r \operatorname{sen} \theta)$ ou

$$z = r\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \tag{1}$$

ra 1.3.2 Coordenadas
res no plano complexo

Dizemos que (1) é a **forma polar** ou a **representação polar** do número complexo $z$. De novo, da Figura 1.3.2, vemos que a coordenada $r$ pode ser interpretada como a distância da origem ao ponto $(x, y)$. Em outras palavras, adotaremos a convenção de que $r$ *jamais é negativo**, de modo que sempre possamos tomar $r$ como o módulo de $z$, ou seja, $r = |z|$. O ângulo $\theta$ de inclinação do vetor $z$, que *sempre será medido em radianos* a partir do eixo real positivo, é positivo quando medido no sentido trigonométrico e negativo quando medido no sentido horário. O ângulo $\theta$ é chamado um **argumento** de $z$ e denotado como $\theta = \arg(z)$. Um argumento $\theta$ de um número complexo deve satisfazer as equações $\cos \theta = x/r$ e $\operatorname{sen} \theta = y/r$. Um argumento de um número complexo $z$ não é único, pois $\cos \theta$ e $\operatorname{sen} \theta$ são funções periódicas, de período $2\pi$. Em outras palavras, se $\theta_0$ for um argumento de $z$, então, obrigatoriamente, os ângulos $\theta_0 \pm 2\pi$, $\theta_0 \pm 4\pi$, ... também são argumentos de $z$. Na prática, usamos $\tan \theta = y/x$ para determinar $\theta$. No entanto, como $\tan \theta$ é periódica, de período $\pi$, devemos ser cuidadosos ao usar a última equação. Uma calculadora fornecerá apenas ângulos que satisfazem $-\pi/2 < \tan^{-1}(y/x) < \pi/2$, ou seja, ângulos no primeiro e no quarto quadrantes. Devemos escolher $\theta$ de forma consistente com o quadrante em que $z$ se encontra; isso pode exigir a soma ou subtração de $\pi$ a $\tan^{-1}(y/x)$, quando necessário. O seguinte exemplo ilustra como isto é feito.

álculo de
$(y/x)$
cuidado. ⇒

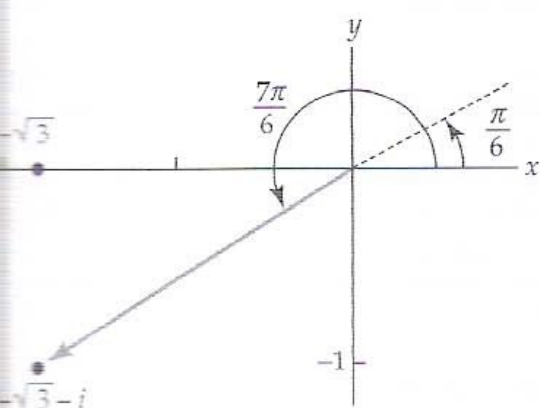
---

**EXEMPLO 1 Um Número Complexo em Forma Polar**

Expressemos $-\sqrt{3} - i$ na forma polar.

**Solução** Com $x = -\sqrt{3}$ e $y = -i$, obtemos $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$. Como $y/x = -1/(-\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$, uma calculadora nos fornece $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, que é um ângulo no primeiro quadrante. Contudo, como o ponto $-\sqrt{3} - i$ está no terceiro quadrante, tomamos a solução de $\tan \theta = -1/(-\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$ como $\theta = \arg(z) = \pi/6 + \pi = 7\pi/6$ (Figura 1.3.3). De (1), a forma polar do número dado é

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right). \tag{2}$$

❑

ra 1.3.3 $\arg\left(-\sqrt{3} - i\right)$

**Argumento Principal** O símbolo $\arg(z)$ representa um conjunto de valores; contudo, um argumento $\theta$ de um número complexo que ocorra no intervalo $-\pi < \theta < \pi$ é chamado de **valor principal** de $\arg(z)$ ou **argumento principal** de $z$. O argumento principal de $z$ é *único* e representado pelo símbolo $\operatorname{Arg}(z)$, ou seja,

---

*Em geral, na descrição polar $(r, \theta)$ de um ponto $P$ no plano cartesiano podemos ter $r \geq 0$ ou $r < 0$.

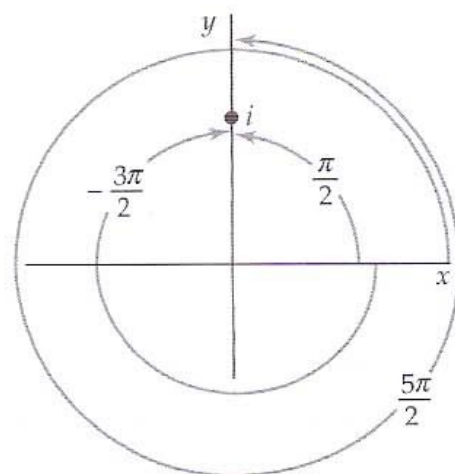



Figura 1.3.4 Alguns argumentos de z

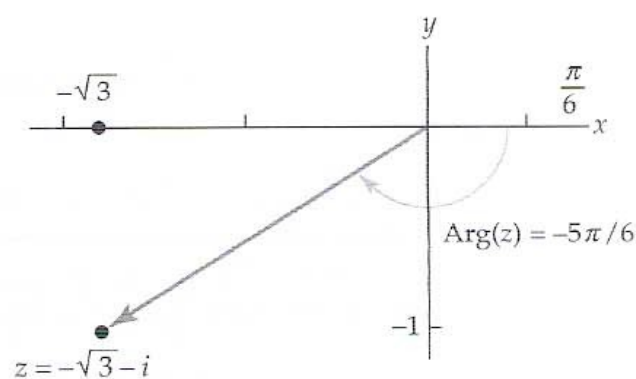



Figura 1.3.5 Argumento principal de $z = -\sqrt{3} - i$

$$-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi.$$

Por exemplo, se $z = i$, vemos na Figura 1.3.4 que alguns valores de $\arg(i)$ são $\pi/2$, $5\pi/2$, $-3\pi/2$ e assi por diante, mas $\operatorname{Arg}(i) = \pi/2$. Da mesma forma, vemos na Figura 1.3.5 que o argumento de $-\sqrt{3} - i$ qu ocorre no intervalo $(-\pi, \pi]$, o argumento principal de $z$, é $\operatorname{Arg}(z) = \pi/6 - \pi = -5\pi/6$. Usando $\operatorname{Arg}(z)$, po demos expressar o número complexo em (2) na forma polar alternativa:

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

Em geral, $\arg(z)$ e $\operatorname{Arg}(i)$ se relacionam por

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (3$$

Por exemplo, $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Para as escolhas $n = 0$ e $n = -1$, (3) fornece $\arg(i) = \operatorname{Arg}(i) = \pi/2$ $\arg(i) = -3\pi/2$, respectivamente.

**Multiplicação e Divisão** A forma polar de um número complexo é especialmente útil na multiplica ção e na divisão de números complexos. Consideremos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2),$$

quando $\theta_1$ e $\theta_2$ são quaisquer argumentos de $z_1$ e de $z_2$, respectivamente. Então,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\left(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\right)\right] \qquad (4$$

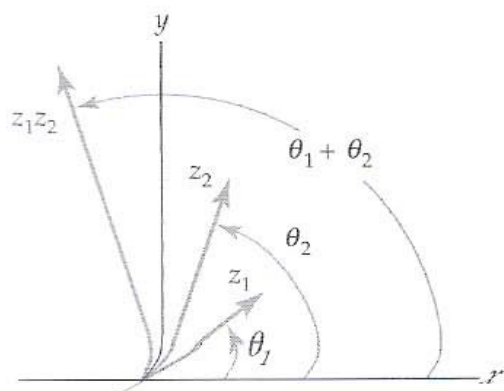
e, para $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\left(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\right)\right]. \qquad (5$$

Das fórmulas para o cosseno e para o seno da soma e da subtração de arcos,* (4) e (5) podem ser ree critas como

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right] \qquad (6$$

e

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]. \qquad (7$$

Uma inspeção das expressões em (6) e (7) e da Figura 1.3.6 mostra que os comprime tos dos dois vetores $z_1 z_2$ e $z_1/z_2$ são iguais ao produto dos comprimentos de $z_1$ e de $z_2$ ao quociente dos comprimentos de $z_1$ e de $z_2$, respectivamente, segundo (3) da Seção 1. Além disso, os argumentos de $z_1 z_2$ e de $z_1/z_2$ são dados por

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \text{e} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2). \qquad (8$$

Figura 1.3.6 $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

*$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ e $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$.

---

EXEMPLO 2 **Argumentos de um Produto e de um Quociente**

Acabamos de ver que para $z_1 = i$ e $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $\text{Arg}(z_1) = \pi/2$ e $\text{Arg}(z_2) = -5\pi/6$. Portanto, os argumentos do produto e do quociente

$$z_1 z_2 = i(-\sqrt{3} - i) = 1 - \sqrt{3}i \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{i}{-\sqrt{3} - i} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

podem ser obtidos de (8):

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Valores adicionais de $\arg(z_1 z_2)$ e de $\arg(z_1/z_2)$ podem ser determinados com a adição de múltiplos inteiros de $2\pi$ a $-\pi/3$ e a $4\pi/3$, respectivamente. ❑

**Potências Inteiras de $z$** Podemos calcular potências inteiras de um número complexo $z$ usando os resultados em (6) e (7). Por exemplo, se $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, substituindo $z_1 = z_2 = z$ em (6), obtemos

$$z^2 = r^2 [\cos(\theta + \theta) + i\,\text{sen}(\theta + \theta)] = r^2 (\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta).$$

Como $z^3 = z^2 z$, temos

$$z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta),$$

e assim por diante. Além disso, se tomarmos $\arg(1) = 0$, (7) fornece

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(0 - \theta) + i\,\text{sen}(0 - \theta)] = r^{-1} [\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)].$$

Prosseguindo desse modo, obtemos uma fórmula para a $n$-ésima potência de $z$, para qualquer inteiro $n$:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta). \tag{9}$$

Quando $n = 0$, temos o familiar resultado $z^0 = 1$.

---

EXEMPLO 3 **Potência de um Número Complexo**

Calculemos $z^3$, com $z = -\sqrt{3} - i$.

**Solução** Em (2) do Exemplo 1, vimos que uma forma polar do número dado é $z = 2[\cos(7\pi/6) + i\,\text{sen}(7\pi/6)]$. Usando (9) com $r = 2$, $\theta = 7\pi/6$ e $n = 3$, obtemos

$$\left(-\sqrt{3} - i\right)^3 = 2^3 \left[\cos\left(3\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(3\frac{7\pi}{6}\right)\right] = 8\left[\cos\frac{7\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{2}\right] = -8i$$

pois $\cos(7\pi/2) = 0$ e $\text{sen}(7\pi/2) = -1$. ❑

Notemos no Exemplo 3 que, se quisermos também calcular o valor de $z^{-3}$, podemos fazê-lo de duas formas: calcular o recíproco de $z^3 = -8i$ ou usar (9) com $n = -3$.

**Fórmula de de Moivre** Quando $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, temos $|z| = 1$, de modo que (9) fornece

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta. \tag{10}$$

Este último resultado é conhecido como **fórmula de de Moivre**[4] e é útil na dedução de algumas identidades trigonométricas que envolvem $\cos n\theta$ e $\text{sen}\,n\theta$. Veja Problemas 33 e 34 do Conjunto de Exercícios 1.3.

---

[4]Esta fórmula, devida ao matemático francês Abraham de Moivre (1667–1754), é igualmente referida, no Brasil, como **fórmula de Moivre**. (N.T.)

**EXEMPLO 4 Fórmula de de Moivre**

De (10), com $\theta = \pi/6$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ e $\operatorname{sen}\theta = 1/2$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = \cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta = \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i.$$

❑

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

($i$) No Exemplo 2, vale observar que embora tenhamos usado os argumentos principais de $z_1$ e de $z_2$, $\arg(z_1/z_2) = 4\pi/3 \neq \operatorname{Arg}(z_1/z_2)$. Embora (8) seja válida para quaisquer argumentos de $z_1$ e de $z_2$, em geral *não é verdade* que $\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$ e que $\operatorname{Arg}(z_1/z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$. Veja Problemas 37 e 38 do Conjunto de Exercícios 1.3.

($ii$) Um argumento pode ser associado a qualquer número complexo *não nulo* $z$. Contudo, para $z = 0$ não é possível dar a $\arg(z)$ qualquer definição que faça sentido.

($iii$) Se tomarmos $\arg(z)$ no intervalo $(-\pi, \pi]$, a relação entre um número complexo $z$ e seu argumento é unívoca; ou seja, todo número complexo não nulo tem precisamente *um* ângulo em $(-\pi, \pi]$. Contudo, o intervalo $(-\pi, \pi]$ nada tem de especial; também estabelecemos uma relação unívoca se usarmos o intervalo $(0, 2\pi]$ para definir o valor principal do argumento de $z$. Para o intervalo $(-\pi, \pi]$, o eixo real negativo é análogo a uma barreira que decidimos não cruzar; a denominação técnica dessa barreira é **corte de ramo** ou **linha de corte de ramo** (*branch cut*). Se usarmos $(0, 2\pi]$, o corte de ramo é o eixo real positivo. O conceito de corte de ramo é importante, e será examinado de forma mais detalhada ao estudarmos funções nos Capítulos 2 e 4.

($iv$) A parte "cosseno $i$ seno" da forma polar de um número complexo é, às vezes, abreviada por cis; ou seja,

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r\operatorname{cis}\theta.$$

Esta notação, empregada principalmente na engenharia, não será utilizada neste texto.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.3 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–10, escreva o número complexo dado na forma polar; primeiro, use um argumento $\theta \neq \operatorname{Arg}(z)$ e, a seguir, use $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

**1.** $2$

**2.** $-10$

**3.** $-3i$

**4.** $6i$

**5.** $1 + i$

**6.** $5 - 5i$

**7.** $-\sqrt{3} + i$

**8.** $-2 - 2\sqrt{3}i$

**9.** $\dfrac{3}{-1+i}$

**10.** $\dfrac{12}{\sqrt{3}+i}$

Nos Problemas 11 e 12, use uma calculadora para escrever o dado número complexo na forma polar; primeiro, use um argumento $\theta \neq \operatorname{Arg}(z)$ e, a seguir, use $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

**11.** $-\sqrt{2} + \sqrt{7}i$

**12.** $-12 - 5i$

Nos Problemas 13 e 14, escreva na forma $a + ib$ o número complexo cujas coordenadas polares $(r, \theta)$ são dadas. Use uma calculadora, se necessário.

**13.** $(4, -5\pi/3)$

**14.** $(2, 2)$

Nos Problemas 15–18, escreva na forma $a + ib$ o número complexo cuja forma polar é dada. Use uma calculadora, se necessário.

**15.** $z = 5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$

**16.** $z = 8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{11\pi}{4}\right)$

**17.** $z = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right)$

**18.** $z = 10\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{5}\right)$

Nos Problemas 19 e 20, use (6) e (7) para determinar $z_1z_2$ e $z_1/z_2$. Escreva o número na forma $a + ib$.

**19.** $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right),\ z_2 = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{8}\right)$

**20.** $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right),\ z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right)$

Nos Problemas 21–24, escreva cada número complexo na forma polar. A seguir, use (6) ou (7) para determinar a forma polar do número dado. Por fim, escreva a forma polar no formato $a + ib$.

**21.** $(3 - 3i)(5 + 5\sqrt{3}i)$

**22.** $(4 + 4i)(-1 + i)$

**23.** $\dfrac{-i}{1 + i}$

**24.** $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i}$

Nos Problemas 25–30, use (9) para calcular as potências indicadas.

**25.** $(1 + \sqrt{3}i)^9$

**26.** $(2 - 2i)^5$

**27.** $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$

**28.** $(-\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^4$

**29.** $\left[\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sqrt{2}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right)\right]^{12}$

**30.** $\left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{9}\right)\right]^{6}$

Nos Problemas 31 e 32, escreva o dado número complexo na forma polar e, a seguir, na forma $a + ib$.

**31.** $\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^5$

**32.** $\dfrac{\left[8\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{8}\right)\right]^3}{\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}$

**33.** Use a fórmula de de Moivre (10) com $n = 2$ para determinar identidades trigonométricas para $\cos 2\theta$ e $\text{sen}\ 2\theta$.

**34.** Use a fórmula de de Moivre (10) com $n = 3$ para determinar identidades trigonométricas para $\cos 3\theta$ e $\text{sen}\ 3\theta$.

Nos Problemas 35 e 36, determine um inteiro positivo $n$ para o qual a igualdade é verdadeira.

**35.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = -1$

**36.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n = 1$

**37.** Para os números complexos $z_1 = -1$ e $z_2 = 5i$, comprove que:

(a) $\text{Arg}(z_1z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$

(b) $\text{Arg}(-z_2/z_1) \neq \text{Arg}(-z_2) - \text{Arg}(z_1)$.

**38.** Para os números complexos dados no Problema 37, comprove que:

(a) $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(b) $\arg(-z_2/z_1) = \arg(-z_2) - \arg(z_1)$.

## Foco em Conceitos

**39.** Considere $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Descreva geometricamente o efeito de multiplicar $z$ por um número complexo da forma $z_1 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$, quando $\alpha > 0$ e quando $\alpha < 0$.

**40.** Considere $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. Se $n$ for um inteiro, calcule $z^n + \bar{z}^n$ e $z^n - \bar{z}^n$.

**41.** Escreva uma equação que relacione $\arg(z)$ a $\arg(1/z)$, $z \neq 0$.

**42.** Existem casos especiais em que $\text{Arg}(z_1z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$? Prove suas afirmações.

**43.** Qual é a relação entre os números complexos $z_1$ e $z_2$ se $\arg(z_1) + \arg(z_2)$?

**44.** Descreva o conjunto de pontos $z$ no plano complexo que satisfazem $\arg(z) = \pi/4$.

**45.** A aluna A diz que, embora não consiga encontrar uma comprovação no texto, pensa que $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$. Por exemplo, diz ela, se $z = 1 + i$, então $\bar{z} = 1 - i$ e $\arg(z) = \pi/4$ e $\arg(\bar{z}) = -\pi/4$. O aluno B discorda, pois acha que tem um contraexemplo: se $z = i$, então $\bar{z} = -i$; podemos tomar $\arg(i) = \pi/2$ e $\arg(-i) = 3\pi/2$, de modo que $\arg(i) \neq -\arg(-i)$. Escolha um dos lados e defenda seu ponto de vista.

**46.** Suponha que $z_1$, $z_2$ e $z_1z_2$ sejam números complexos no primeiro quadrante e que os pontos $z = 0$, $z = 1$, $z_1$, $z_2$, $z_1z_2$ sejam rotulados $O$, $A$, $B$, $C$ e $D$, respectivamente. Estude a fórmula em (6) e, a seguir, discuta a relação entre os triângulos $OAB$ e $OCD$.

**47.** Considere $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$. Se $z_1 = z_2$, qual é a relação entre $r_1$ e $r_2$? E entre $\theta_1$ e $\theta_2$?

**48.** Suponha que $z_1$ esteja no primeiro quadrante. Para cada $z_2$, determine em que quadrante $z_1z_2$ está posicionado.

(a) $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  (b) $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

(c) $z_2 = -i$  (d) $z_2 = -1$

**49.** (a) Para $z \neq 1$, comprove a identidade

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

(b) Use a parte (a) em conjunto com resultados apropriados desta seção e comprove

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}$$

para $0 < \theta < 2\pi$. Este resultado é conhecido como **identidade de Lagrange**, e é útil na teoria de série de Fourier.

**50.** Suponha que $z_1$, $z_2$, $z_3$ e $z_4$ sejam quatro números complexos distintos. Interprete geometricamente:

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

## 1.4 Potências e Raízes

A álgebra nos diz que $-2$ e $2$ são as *raízes quadradas* do número 4, pois $(-2)^2 = 4$ e $(2)^2 = 4$. Em outras palavras, as duas raízes quadradas de 4 são soluções distintas da equação $w^2 = 4$. Da mesma forma, dizemos que $w = 3$ é a raiz cúbica de 27, pois $w^3 = 3^3 = 27$. Esta última equação nos remete às variáveis complexas, pois qualquer número real tem apenas *uma* raiz cúbica *real* e *duas* raízes cúbicas *complexas*. Em geral, dizemos que um número $w$ é uma ***raiz n-ésima*** ou de ***ordem n*** de um número complexo não nulo $z$ se $w^n = z$, onde $n$ é um inteiro positivo. Por exemplo, $w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ e $w_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ são as duas raízes quadradas do número complexo $z = i$, pois $w_1^2 = i$ e $w_2^2 = i$. Veja Problema 39 do Conjunto de Exercícios 1.1.

Agora, demonstraremos que há exatamente $n$ soluções da equação $w^n = z$.

**Raízes** Suponhamos que $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $w = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ sejam as formas polares dos números complexos $z$ e $w$. Portanto, usando (9) da Seção 1.3, a equação $w^n = z$ fica escrita como

$$\rho^n(\cos n\phi + i\operatorname{sen} n\phi) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \tag{1}$$

De (1), podemos concluir que

$$\rho^n = r \tag{2}$$

e

$$\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \tag{3}$$

Veja Problema 47 do Conjunto de Exercícios 1.3.

De (2), definimos $\rho = \sqrt[n]{r}$ como a única raiz $n$-ésima positiva do número real $r$. De (3), a definição da igualdade de dois números complexos implica

$$\cos n\phi = \cos\theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\theta.$$

Estas igualdades, por sua vez, indicam que os argumentos $\theta$ e $\phi$ estão relacionados por $n\phi = \theta + 2k\pi$, onde $k$ é um inteiro. Assim,

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

À medida que $k$ assume valores inteiros $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$, obtemos $n$ *distintas* raízes $n$-ésimas de $z$; estas raízes têm o mesmo módulo $\sqrt[n]{r}$ e argumentos diferentes. Notemos que, para $k \geq n$, obtemos as mesmas raízes, pois seno e cosseno são funções periódicas, de período $2\pi$. Para comprovar isso, suponhamos $k = n + m$, onde $m = 0, 1, 2, ...$ Então,

$$\phi = \frac{\theta + 2(n+m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi$$

e

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right), \quad \cos\phi = \cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right).$$

Resumamos este resultado. As raízes $n$-ésimas de um número complexo não nulo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ são dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{4}$$

onde $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

---

**EXEMPLO 1 Raízes Cúbicas de um Número Complexo**

Determinemos as três raízes cúbicas de $z = i$.

**Solução** Ressaltemos que, basicamente, resolveremos a equação $w^3 = i$. Com $r = 1$, $\theta = \arg(i) = \pi/2$, uma forma polar do número dado é escrita como $z = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)$. De (4), com $n = 3$, obtemos

$$w_k = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Por conseguinte, as três raízes são:

$$k = 0, \quad w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, \quad w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2, \quad w_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i.$$

❑

**Raiz $n$-ésima Principal** Na Seção 1.3 ressaltamos que o símbolo $\arg(z)$, na verdade, representa um *conjunto* de argumentos para um número complexo $z$. Dito de outra forma, para um dado número complexo $z \neq 0$, $\arg(z)$ tem um número *infinito de valores*. De modo similar, $z^{1/n}$ tem $n$ valores; ou seja, o símbolo $z^{1/n}$ representa o conjunto de $n$ raízes $n$-ésimas $w_k$ de $z$. A *única* raiz de um número complexo $z$ (obtida com o uso do valor principal de $\arg(z)$ com $k = 0$) é referida como **raiz $n$-ésima principal** de $w$. No Exemplo 1, como $\operatorname{Arg}(z) = \pi/2$, vemos que $w_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ é a principal raiz cúbica de $i$. A escolha de $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ e $k = 0$ garante que quando $z$ é um número real positivo $r$ a raiz $n$-ésima principal seja $\sqrt[n]{r}$.

... $= 2$ e $\sqrt[3]{27} = 3$ ... raiz quadrada ...ipal de 4 ...aiz cúbica ...ipal de 27, ...ectivamente. ➡

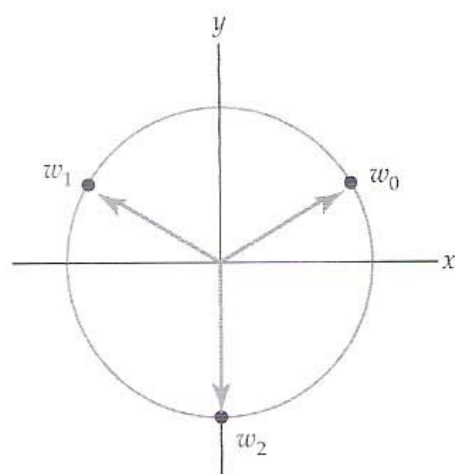



**Figura 1.4.1** Três raízes cúbicas de $i$

Como as raízes dadas por (4) têm o mesmo módulo, as $n$ raízes $n$-ésimas de um número complexo não nulo $z$ estão localizadas na circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$ e centro na origem no plano complexo. Além disso, como a diferença entre os argumentos de quaisquer duas raízes sucessivas $w_k$ e $w_{k+1}$ é $2\pi/n$, as $n$ raízes $n$-ésimas de $z$ estão igualmente espaçadas nesta circunferência, começando com a raiz cujo argumento é $\theta/n$. A Figura 1.4.1 mostra as três raízes cúbicas de $i$ obtidas no Exemplo 1, espaçadas por iguais intervalos angulares de $2\pi/3$ na circunferência de um círculo unitário, começando com a raiz $w_0$ cujo argumento é $\pi/6$.

Como mostra o próximo exemplo, as raízes de um número complexo não são, necessariamente, números "bonitos" como no Exemplo 1.

### EXEMPLO 2 Raízes Quartas de um Número Complexo

Determinemos as raízes quartas de $z = 1 + i$.

**Solução** Neste caso, $r = \sqrt{2}$ e $\theta = \arg(z) = \pi/4$. De (4), com $n = 4$, obtemos

$$w_k = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right], \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Com o auxílio de uma calculadora, determinamos

$$\begin{aligned}
k = 0, \quad w_0 &= \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right] \approx 1{,}0696 + 0{,}2127i \\
k = 1, \quad w_1 &= \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{16}\right] \approx -0{,}2127 + 1{,}0696i \\
k = 2, \quad w_2 &= \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{17\pi}{16}\right] \approx -1{,}0696 - 0{,}2127i \\
k = 3, \quad w_3 &= \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{25\pi}{16}\right] \approx 0{,}2127 - 1{,}0696i.
\end{aligned}$$

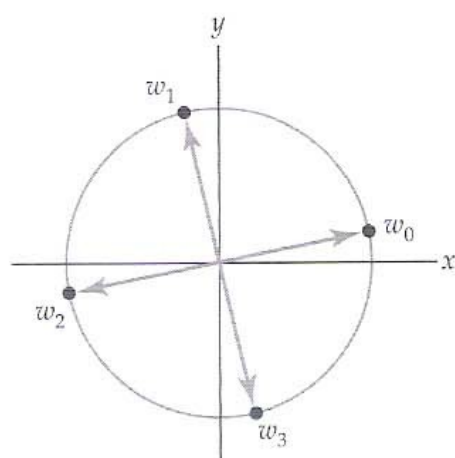



**Figura 1.4.2** Raízes quartas de $1 + i$

Como mostrado na Figura 1.4.2, as quatro raízes estão localizadas na circunferência de raio $r = \sqrt[8]{2} \approx 1{,}09$ e centro na origem, espaçadas por iguais intervalos angulares de $2\pi/4 = \pi/2$ radianos, começando com a raiz cujo argumento é $\pi/16$. Como $\theta = \text{Arg}(z) = \pi/4$, a raiz quarta principal é $w_0$. □

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

($i$) Como uma consequência de (4), podemos dizer que o sistema de números complexos é *fechado* sob a operação de extração de raízes. Isso significa que para qualquer $z$ em **C**, $z^{1/n}$ também está em **C**. O sistema de números reais não possui uma propriedade de fechamento similar, pois se $x$ está em **R**, $x^{1/n}$ não está necessariamente em **R**.

($ii$) Do ponto de vista geométrico, as $n$ raízes $n$-ésimas de um número complexo $z$ também podem ser interpretadas como os vértices de um polígono regular com $n$ lados que está inscrito em uma circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$ e centro na origem. A plausibilidade deste fato pode ser comprovada por uma reinspeção das Figuras 1.4.1 e 1.4.2. Veja Problema 19 do Conjunto de Exercícios 1.4.

($iii$) Quando $m$ e $n$ são inteiros positivos sem fator comum, (4) nos permite definir uma **potência racional** de $z$, ou seja, $z^{m/n}$. Pode ser mostrado que o conjunto de valores $(z^{1/n})^m$ é igual ao conjunto de valores $(z^{1/m})^n$. Este conjunto de $n$ valores comuns é definido como $z^{m/n}$. Veja Problemas 25 e 26 do Conjunto de Exercícios 1.4.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.4 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–14, use (4) para calcular todas as raízes. Em cada caso, determine a raiz $n$-ésima principal. Posicione as raízes $w_0$, $w_1$, ..., $w_{n-1}$ em uma circunferência apropriada e centrada na origem.

**1.** $(8)^{1/3}$

**2.** $(-1)^{1/4}$

**3.** $(-9)^{1/2}$

**4.** $(-125)^{1/3}$

**5.** $(i)^{1/2}$

**6.** $(-i)^{1/3}$

**7.** $(-1+i)^{1/3}$

**8.** $(1+i)^{1/5}$

**9.** $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$

**10.** $(-1-\sqrt{3}i)^{1/4}$

**11.** $(3+4i)^{1/2}$

**12.** $(5+12i)^{1/2}$

**13.** $\left(\dfrac{16i}{1+i}\right)^{1/8}$

**14.** $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{1/6}$

**15.** (a) Comprove que $(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$.

(b) Use a parte (a) para determinar os dois valores de $(7 + 24i)^{1/2}$.

**16.** Refaça o Problema 15 com o uso de (4).

**17.** Determine todas as soluções da equação $z^4 + 1 = 0$.

**18.** Use o fato de que $8i = (2 + 2i)^2$ para determinar todas as soluções da equação

$$z^2 - 8z + 16 = 8i.$$

As $n$ distintas **raízes $n$-ésimas da unidade** são as soluções da equação $w^n = 1$.
Os Problemas 19–24 tratam das raízes da unidade.

**19.** (a) Mostre que as $n$ raízes $n$-ésimas da unidade são dadas por

$$(1)^{1/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

(b) Determine $n$ raízes $n$-ésimas da unidade para $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$.

(c) No plano complexo, posicione as raízes da unidade determinadas na parte (b). Desenhe os polígonos regulares que têm as raízes como vértices. [*Sugestão*: veja o item (*ii*) das Observações.]

**20.** Suponha que $w$ seja uma raiz cúbica da unidade correspondente a $k = 1$. Veja o Problema 19(a).

(a) Qual é a relação entre $w$ e $w^2$?

(b) Comprove por cálculo direto que

$$1 + w + w^2 = 0.$$

(c) Explique por que o resultado da parte (b) advém da definição básica de que $w$ é uma raiz cúbica de 1, ou seja, $w^3 = 1$. [*Sugestão*: fatore.]

**21.** Para um dado $n$, se tomarmos $k = 1$ no Problema 19(a), obtemos a raiz

$$w_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}.$$

Explique por que as $n$ raízes $n$-ésimas da unidade podem, então, ser escritas como

$$1, w_n, w_n^2, w_n^3, \ldots, w_n^{n-1}.$$

**22.** Considere a equação $(z + 2)^n + z^n = 0$, onde $n$ é um inteiro positivo. Resolva, da forma que preferir, a equação para $z$ quando $n = 1$. E, também, quando $n = 2$.

**23.** Considere a equação do Problema 22.

(a) No plano complexo, determine a localização de todas as soluções $z$ quando $n = 5$. [*Sugestão*: escreva a equação na forma $[(z+2)/(-z)]^5 = 1$ e use a parte (a) do Problema 19.]

(b) Reexamine as soluções da equação do Problema 22 para $n = 1$ e $n = 2$. Forme uma conjectura quanto à localização de todas as soluções de $(z + 2)^n + z^n = 0$ no plano complexo.

**24.** Para as $n$ raízes $n$-ésimas da unidade especificadas no Problema 21, mostre que

$$1 + w_n + w_n^2 + w_n^3 + \cdots + w_n^{n-1} = 0.$$

[*Sugestão*: multiplique a soma $1 + w_n + w_n^2 + w_n^3 + \cdots + w_n^{n-1}$ por $w_n - 1$.]

Antes de iniciar os Problemas 25 a 26, leia o item (*iii*) das Observações. Se $m$ e $n$ forem inteiros positivos sem fato comum, os $n$ valores da potência racional $z^{m/n}$ são

$$w_k = \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}\,\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right], \qquad (5$$

com $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$. Os termos $w_k$ são as $n$ soluções distintas de $w^n = z^m$.

**25.** (**a**) Calcule, primeiro, o conjunto de valores $i^{1/2}$ usando (4). A seguir, calcule $(i^{1/2})^3$ usando (9) da Seção 1.3.

(**b**) Calcule, agora, $i^3$. A seguir, calcule $(i^3)^{1/2}$ usando (4). Compare estes valores com os encontrados na part (b).

(**c**) Por fim, calcule $i^{3/2}$ usando a fórmula (5).

**26.** Use (5) para calcular todas as soluções de $w^2 = (-1 + i)^5$.

## Foco em Conceitos

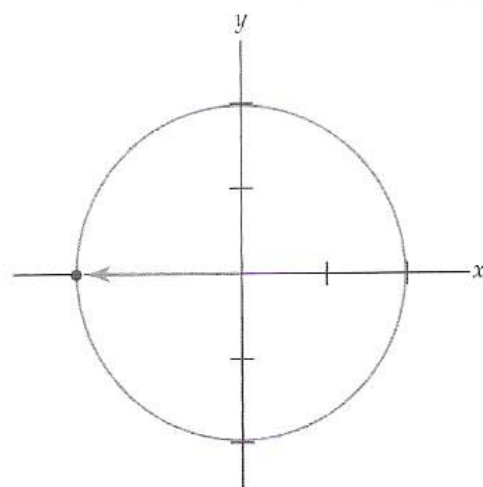



**Figura 1.4.3** Figura para o Problema 27

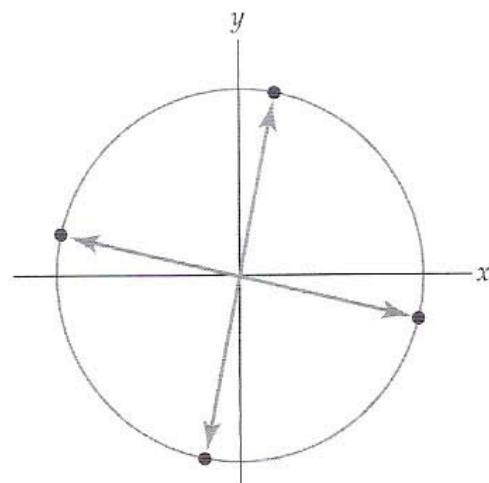



**Figura 1.4.4** Figura para o Problema 34

**27.** O vetor dado na Figura 1.4.3 representa um valor de $z^{1/n}$. Usando apenas a figura e a trigono metria – ou seja, sem usar a fórmula (4) – determine os valores restantes de $z^{1/n}$ quando $n$ = 3. Refaça os cálculos para $n = 4$ e $n = 5$.

**28.** Suponha que $n$ seja um inteiro não negativo. Determine os valores de $n$ de modo que $z^n$ = possua apenas soluções reais. Justifique sua resposta matematicamente.

**29.** (**a**) Prossiga como no Exemplo 2 e determine valores aproximados para as duas raízes qu dradas $w_0$ e $w_1$ de $1 + i$.

(**b**) Mostre que os valores exatos das raízes na parte (a) são

$$w_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \quad w_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

**30.** Qual é o significado geométrico do resultado do Problema 24?

**31.** Um número real pode ter uma raiz $n$-ésima complexa. Pode um número complexo ter um raiz $n$-ésima real?

**32.** Suponha que $w$ seja localizado no primeiro quadrante e seja uma raiz cúbica de um núme complexo $z$. Pode existir uma segunda raiz cúbica de $z$ localizada no primeiro quadrante? Ju tifique sua resposta matematicamente.

**33.** Suponha que $z$ seja um número complexo com uma raiz quarta $w$ que não é real ou imagin puro. Explique por que as outras raízes quartas não são reais ou imaginários puros.

**34.** Os vetores na Figura 1.4.4 representam as raízes quartas de um número complexo $z$. Usan apenas esta figura, você é capaz de determinar a raiz quarta principal de $z$?

## Tarefas para o Laboratório de Computação

Nos Problemas 35–40, use um SAC* para, primeiro, calcular $z^n = w$, para os dados número complexo e valor de $n$. A seguir, usando a saída e o mesmo valor de $n$, determine se $w^{1/n} = (z^n)^{1/n} = z$. Se não, explique por quê.

**35.** $z = 2.5 - i;\ n = 10$

**36.** $z = -0.5 + 0.3i;\ n = 5$

**37.** $z = 1 + 3i;\ n = 8$

**38.** $z = 2 + 2i;\ n = 12$

**39.** $z = i;\ n = 21$

**40.** $z = -1 + \sqrt{3}i;\ n = 11$

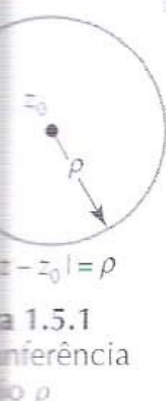
*Ao longo do texto, usaremos o acrônimo SAC para designar um "sistema algébrico computacional".

## 1.5 Conjuntos de Pontos no Plano Complexo

Nas seções anteriores analisamos alguns rudimentos da álgebra e da geometria de números complexos. Contudo, nem sequer arranhamos a superfície do tema conhecido como análise complexa; a maior parte de nosso estudo está por vir. Nos capítulos seguintes, objetivamos a análise de funções de uma única variável complexa $z = x + iy$ e o cálculo de tais funções.

Antes de introduzir a noção de função no Capítulo 2, precisamos apresentar algumas definições essenciais e a terminologia a respeito de conjuntos no plano complexo.

$|z - z_0| = \rho$

Figura 1.5.1 Circunferência de raio $\rho$

**Circunferências** Consideremos $z_0 = x_0 + iy_0$. Como $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ representa a distância entre os pontos $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$, os pontos $z = x + iy$ que satisfazem a equação

$$|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0, \tag{1}$$

estão localizados na **circunferência** de raio $\rho$, centrada no ponto $z_0$, como ilustrado na Figura 1.5.1.

---

EXEMPLO 1 **Duas Circunferências**

(a) $|z| = 1$ é uma equação de uma circunferência unitária centrada na origem.

(b) Reescrevendo $|z - 1 + 3i| = 5$ como $|z - (1 - 3i)| = 5$, vemos de (1) que esta equação descreve uma circunferência de raio 5 e centro no ponto $z_0 = 1 - 3i$. ❑

**Discos e Vizinhanças** Os pontos $z$ que satisfazem a desigualdade $|z - z_0| \leq \rho$ podem estar *na* circunferência $|z - z_0| = \rho$ ou *no interior* da circunferência. Dizemos que o conjunto de pontos definido por $|z - z_0| \leq \rho$ é um **disco** de raio $\rho$ e centro no ponto $z_0$. Os pontos $z$ que satisfazem a desigualdade estrita $|z - z_0| < \rho$ estão no interior do círculo de raio $\rho$ e centro no ponto $z_0$, e não em sua circunferência. Este conjunto de pontos é chamado de uma **vizinhança** de $z_0$. Ocasionalmente, será necessário usar uma vizinhança de $z_0$ que *exclua* $z_0$. Esta vizinhança é definida pelas desigualdades simultâneas $0 < |z - z_0| < \rho$ e chamada de uma **vizinhança deletada** de $z_0$. Por exemplo, $|z| < 1$ define uma vizinhança da origem, enquanto $0 < |z| < 1$ define uma vizinhança deletada da origem; $|z - 3 + 4i| < 0{,}01$ define uma vizinhança de $3 - 4i$, enquanto a desigualdade $0 < |z - 3 + 4i| < 0{,}01$ define uma vizinhança deletada de $3 - 4i$.

**Conjuntos Abertos** Um ponto $z_0$ é denominado **ponto interior** de um conjunto $S$ do plano complexo se existir alguma vizinhança de $z_0$ que esteja inteiramente contida em $S$. Se todo ponto $z$ de um conjunto $S$ for um ponto interior, então $S$ é denominado **conjunto aberto**. A Figura 1.5.2 ilustra o conceito. Por exemplo, a desigualdade $\text{Re}(z) > 1$ define um *semiplano direito*, que é um conjunto aberto. Todos os números complexos $z = x + iy$ para os quais $x > 1$ estão neste conjunto. Se, por exemplo, escolhermos $z_0 = 1{,}1 + 2i$, uma vizinhança de $z$ inteiramente contida neste conjunto é definida por $|z - (1{,}1 + 2i)| < 0{,}05$, como ilustrado na Figura 1.5.3. Contudo, o conjunto $S$ de pontos no plano complexo definido por $\text{Re}(z) \geq 1$ *não* é aberto, pois qualquer vizinhança de um ponto na reta $x = 1$ conterá pontos que estão em $S$ e pontos que não estão em $S$ (Figura 1.5.4).

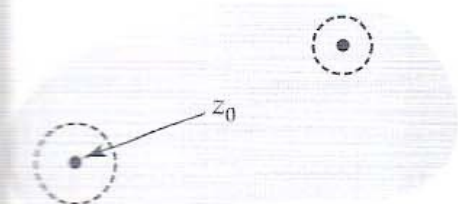



Figura 1.5.2 Conjunto aberto

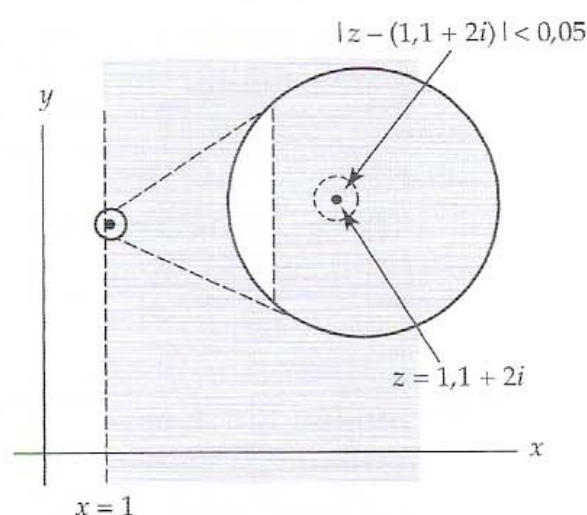



**Figura 1.5.3** Conjunto aberto com uma vista ampliada de um ponto próximo de $x = 1$

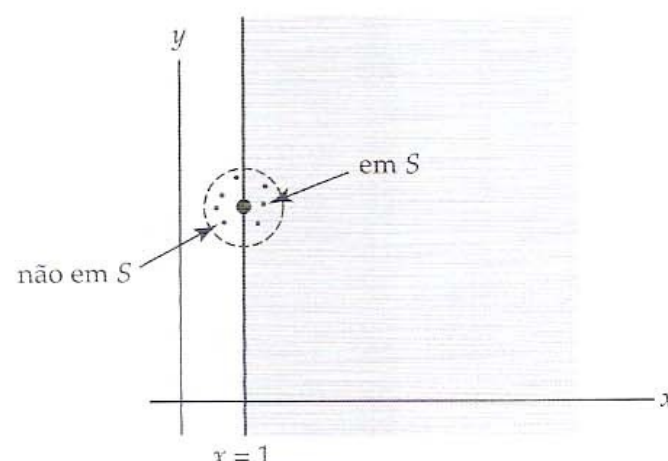



**Figura 1.5.4** Conjunto $S$ não aberto

(a) $\text{Im}(z) < 0$; semiplano inferior

(b) $-1 < \text{Re}(z) < 1$; fita vertical infinita

(c) $|z| > 1$; exterior da circunferência unitária

(d) $1 < |z| < 2$; interior de um anel circular

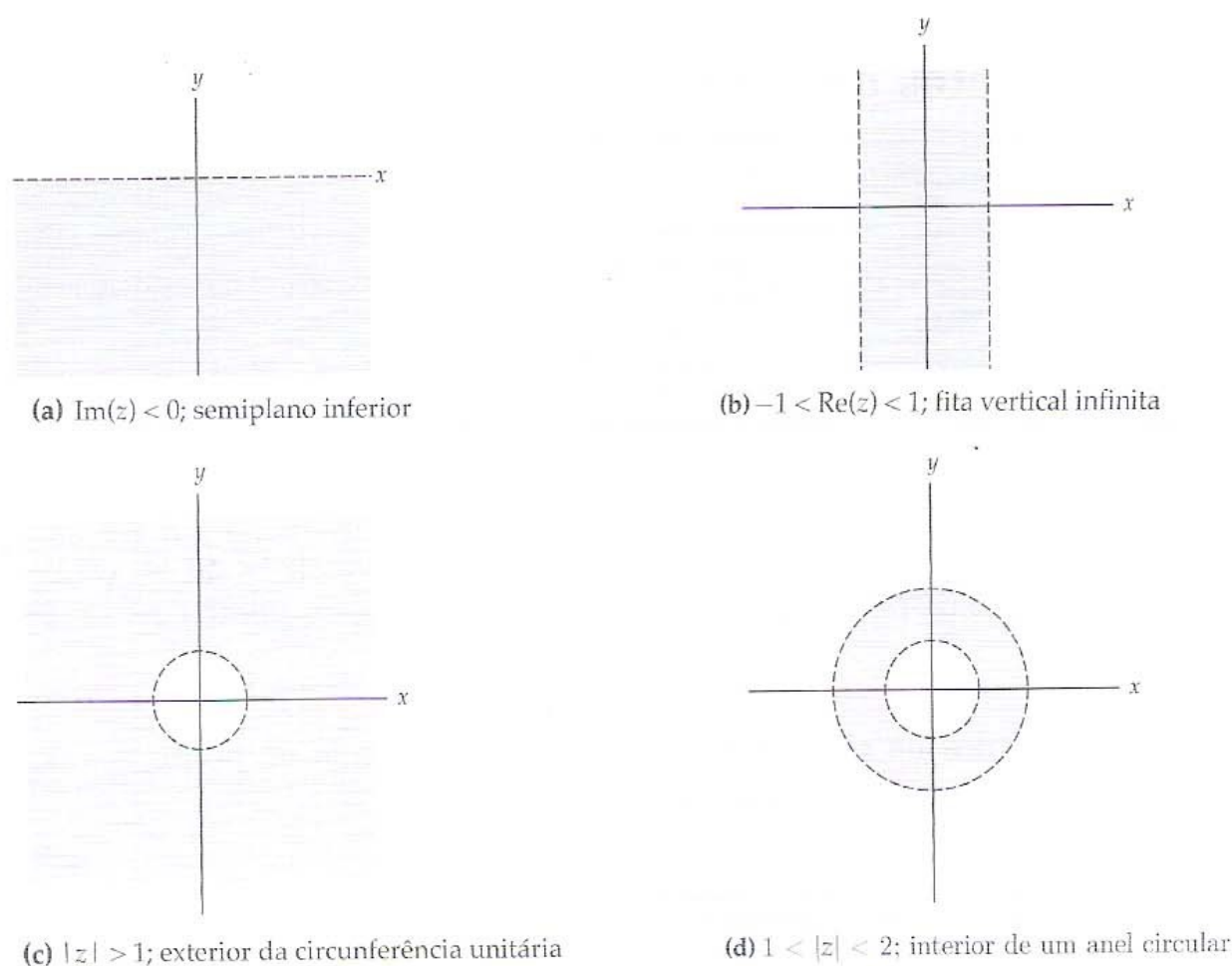



**Figura 1.5.5** Quatro exemplos de conjuntos abertos

---

EXEMPLO 2 **Alguns Conjuntos Abertos**

A Figura 1.5.5 ilustra alguns conjuntos abertos. ❑

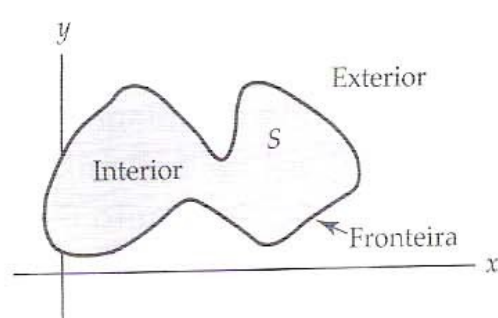



**Figura 1.5.6** Interior, fronteira e exterior de um conjunto $S$

Se *toda* vizinhança de um ponto $z_0$ de um conjunto $S$ contiver pelo menos um ponto que está em $S$ e pelo menos um ponto que não está em $S$, então $z_0$ é denominado **ponto de fronteira** de $S$. Para o conjunto de pontos definido por $\text{Re}(z) \geq 1$, os pontos na reta vertical $x = 1$ são pontos de fronteira. Os pontos que estão na circunferência $|z - i| = 2$ são pontos de fronteira para o disco $|z - i| \leq 2$ e para a vizinhança $|z - i| < 2$ de $z = i$. A coleção de pontos de fronteira de um conjunto $S$ é chamada de **fronteira** de $S$. A circunferência $|z - i| = 2$ é fronteira tanto do disco $|z - i| \leq 2$ como da vizinhança $|z - i| < 2$ de $z = i$. Um ponto $z$ que não é um ponto interior nem um ponto de fronteira de um conjunto $S$ é denominado **ponto exterior** de $S$; em outras palavras, $z_0$ é um ponto exterior de um conjunto $S$ se existir *alguma* vizinhança de $z_0$ que não contém qualquer ponto de $S$. A Figura 1.5.6 mostra um conjunto típico $S$, com interior, exterior e fronteira.

Um conjunto aberto $S$ pode ser algo tão simples como o plano complexo com um único ponto $z_0$ excluído. A fronteira deste "plano perfurado" é $z_0$, e o único candidato a ponto exterior é $z_0$. No entanto, $S$ não tem ponto exterior, pois nenhuma vizinhança de $z_0$ está livre de pontos do plano.

**Anel** O conjunto $S_1$ de pontos que satisfazem a desigualdade $\rho_1 < |z - z_0|$ está localizado no exterior do círculo de raio $\rho$ e centro em $z_0$, enquanto o conjunto $S_2$ de pontos que satisfazem $|z - z_0| < \rho_2$ encontra-se no interior do círculo de raio $\rho_2$ e centro em $z_0$. Por conseguinte, se $0 < \rho_1 < \rho_2$, então o conjunto de pontos que satisfazem as desigualdades simultâneas

$$\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2, \tag{2}$$

é a interseção dos conjuntos $S_1$ e $S_2$. Essa interseção é um anel circular aberto com centro em $z_0$. O conjunto de pontos definido por (2) é chamado de **anel circular** aberto. Se tomarmos $\rho_1 = 0$, obtemos uma vizinhança deletada de $z_0$.

**Figura 1.5.7** Conjunto conexo

**Domínio** Se um par qualquer de pontos $z_1$ e $z_2$ de um conjunto $S$ puder ser ligado por uma linha poligonal que consiste em segmentos de reta conectados e inteiramente contidos no conjunto, $S$ é denominado um conjunto **conexo**. A Figura 1.5.7 ilustra o conceito. Um conjunto conexo aberto é denominado **domínio**. Cada um dos conjuntos abertos da Figura 1.5.5 é conexo, ou seja, cada um

deles é um domínio. O conjunto de números $z$ que satisfazem $\text{Re}(z) \neq 4$ é um conjunto aberto, mas não é conexo, pois não é possível conectar dois pontos em lados distintos da reta vertical $x = 4$ por uma linha poligonal sem sair do conjunto (tenhamos em mente que os pontos na reta $x = 4$ não estão no conjunto). Uma vizinhança de um ponto $z_0$ é um conjunto conexo.

Figura 1.5.8 Região anelar ou anel

**Regiões** Uma **região** é um domínio no plano complexo juntamente com todos, alguns ou nenhum de seus pontos de fronteira. Como um conjunto aberto não contém qualquer ponto de fronteira, automaticamente é uma região. Um conjunto que contém todos seus pontos de fronteira é denominado **fechado**. O disco definido por $|z - z_0| \leq \rho$ é um exemplo de uma região fechada, denominada **disco fechado**. Uma vizinhança de um ponto $z_0$ definida por $|z - z_0| < \rho$ é um conjunto aberto ou uma região aberta, e denominado **disco aberto**. Se o centro $z_0$ for deletado de um disco fechado ou de um disco aberto, as regiões definidas $0 < |z - z_0| \leq \rho$ ou $0 < |z - z_0| < \rho$ são denominadas **discos perfurados**. *Um disco aberto perfurado é o mesmo que uma vizinhança deletada de* $z_0$. Uma região pode não ser fechada ou aberta; a região anelar definida pela desigualdade $1 \leq |z - 5| < 3$ contém apenas alguns dos pontos de fronteira (os pontos localizados em $|z - 5| = 1$), e *não é fechada nem aberta*. Em (2), definimos uma região anelar circular; em uma interpretação mais geral, uma **região anelar** ou **anel** pode ter a aparência mostrada na Figura 1.5.8.

Nota: "fechado" não significa "não aberto".

Figura 1.5.9 O conjunto $S$ é limitado, pois alguma vizinhança da origem contém $S$ inteiramente

**Conjuntos Limitados** Por fim, dizemos que um conjunto $S$ no plano complexo é **limitado** se existir um número $R > 0$ tal que $|z| < R$, para todo $z$ em $S$. Ou seja, $S$ é limitado se puder ser inteiramente contido em *alguma* vizinhança da origem. Na Figura 1.5.9, o conjunto $S$ mostrado em cor é limitado, pois é inteiramente contido na vizinhança circular da origem indicada pela linha tracejada. Um conjunto é **ilimitado** se não for limitado. Por exemplo, o conjunto da Figura 1.5.5(d) é limitado, enquanto os conjuntos nas Figuras 1.5.5(a), 1.5.5(b) e 1.5.5(c) são ilimitados.

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

No estudo de matemática é provável que o aluno tenha se deparado com o conceito de *infinito*. Por exemplo, em um curso de cálculo o aluno deve ter estudado *limites no infinito*, quando o comportamento de funções é examinado à medida que $x$ aumenta ou diminui indefinidamente. Como há exatamente duas direções em uma reta de números, é conveniente representar as noções de "aumentar indefinidamente" e "diminuir indefinidamente" de forma simbólica por $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, respectivamente. Contudo, podemos nos sair muito bem sem a designação $\pm\infty$ usando um "ponto ideal" denominado **ponto no infinito** e denotado simplesmente $\infty$. Para isso, associamos qualquer número real $a$ a um ponto $(x_0, y_0)$ na circunferência unitária $x_2 + y_2 = 1$ da seguinte forma: traçamos uma reta do ponto $(a, 0)$, no eixo $x$ ou reta horizontal de números, ao ponto $(0,1)$, na circunferência. O ponto $(x_0, y_0)$ na circunferência é a interseção da linha reta e da circunferência (Problema 47 do Conjunto de Exercícios 1.5). A Figura 1.5.10(a) deixa claro que quanto mais distante o ponto $(a, 0)$ estiver da origem, mais próximo $(x_0, y_0)$ se torna de $(0,1)$. O único ponto na circunferência que não corresponde a um número real $a$ é $(0,1)$. Para completar a correspondência com *todos* os pontos na circunferência, $(0,1)$ é associado a $\infty$. O conjunto que consiste nos números reais **R** acrescido de $\infty$ é denominado **sistema de números reais estendido**.

Em nosso estudo, o análogo à reta de números é o plano complexo. Recordemos que como **C** não é ordenado, a noção de "aumento" ou "diminuição" de $z$ não faz sentido. Contudo, sabemos que se aumentarmos o módulo $|z|$ de um número complexo $z$ o número se distancia da origem. Se permitirmos que $|z|$ cresça indefinidamente, digamos ao longo do eixo real ao do eixo imaginário, não precisaremos distinguir "direções" ao longo desses eixos, como $z \to +\infty$, $z \to -\infty$, $z \to +i\infty$ ou $z \to -i\infty$. Em análise complexa usamos apenas uma noção de $\infty$, pois podemos estender o sistema de número complexos **C** de forma análoga à que acabamos de descrever para o sistema de números reais **R**. Contudo, agora associamos um número complexo a um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário, denominada **esfera de Riemann**. Ao desenhar uma reta do número $z = a + ib$ no plano complexo, representado por $(a, b, 0)$, ao polo norte $(0, 0, 1)$ da esfera $x^2 + y^2 + u^2 = 1$, determinamos um único ponto $(x_0, y_0, u_0)$ na superfície da esfera unitária. Como mostra a Figura 1.5.10(b),

um número complexo de módulo muito grande está distante de origem (0, 0, 0) e, por conseguinte, o ponto $(x_0, y_0, u_0)$ está próximo de (0, 0, 1). Assim, cada número complexo é associado a um único ponto na superfície da esfera (Problemas 48–50 do Conjunto de Exercícios 1.5). Como o ponto (0, 0, 1) não está associado a qualquer número $z$ no plano, o associamos a $\infty$. O resultante sistema que consiste em **C** e no "ponto ideal" $\infty$ é denominado **sistema de números complexos estendido**.

Esta forma de associar ou mapear os números complexos a uma esfera – com polo norte em (0, 0, 1) – é denominada **projeção estereográfica**.

Para um número finito $z$, temos $z + \infty = \infty + z = \infty$ e, para $z \neq 0$, $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$. Adicionalmente, para $z \neq 0$, escrevemos $z/0 = \infty$ e, para $z \neq \infty$, $z/\infty = 0$. Expressões como $\infty - \infty$, $\infty/\infty$, $\infty^0$ e $1^\infty$ não podem ser definidas e são denominadas indeterminações ou formas indeterminadas.

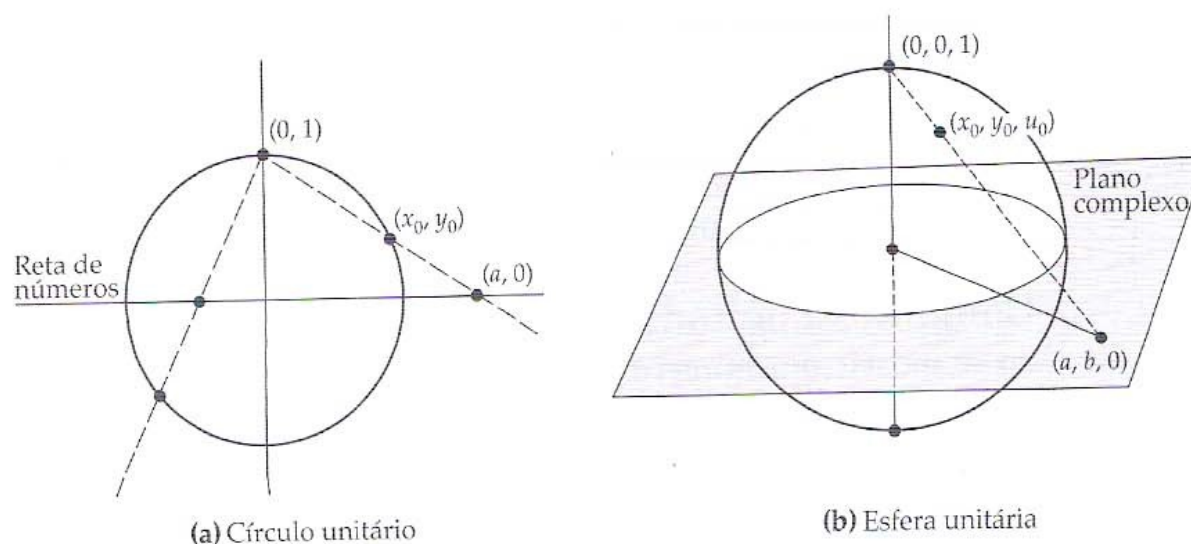



**Figura 1.5.10** O método de associação em (b) é uma projeção estereográfica

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.5 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–12, esboce, no plano complexo, o gráfico da equação dada.

**1.** $|z - 4 + 3i| = 5$

**2.** $|z + 2 + 2i| = 2$

**3.** $|z + 3i| = 2$

**4.** $|2z - 1| = 4$

**5.** $\text{Re}(z) = 5$

**6.** $\text{Im}(z) = -2$

**7.** $\text{Im}(\bar{z} + 3i) = 6$

**8.** $\text{Im}(z - i) = \text{Re}(z + 4 - 3i)$

**9.** $|\text{Re}\,(1 + i\bar{z})| = 3$

**10.** $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

**11.** $\text{Re}(z^2) = 1$

**12.** $\arg(z) = \pi/4$

Nos Problemas 13–24, desenhe o conjunto $S$ de pontos no plano complexo que satisfazem a desigualdade dada. Determine se o conjunto é (**a**) aberto, (**b**) fechado, (**c**) um domínio, (**d**) limitado ou (**e**) conexo.

**13.** $\text{Re}(z) < -1$

**14.** $|\text{Re}\,(z)| > 2$

**15.** $\text{Im}(z) > 3$

**16.** $\text{Re}\,((2 + i)z + 1) > 0$

**17.** $2 < \text{Re}(z - 1) < 4$

**18.** $-1 \leq \text{Im}(z) < 4$

**19.** $\text{Re}(z^2) > 0$

**20.** $\text{Im}(z) < \text{Re}(z)$

**21.** $|z - i| > 1$

**22.** $2 < |z - i| < 3$

**23.** $1 \leq |z - 1 - i| < 2$

**24.** $2 \leq |z - 3 + 4i| \leq 5$

**25.** Determine os pontos de fronteira dos conjuntos nos Problemas 13–24.

**26.** Considere o conjunto $S$ que consiste no plano complexo com o círculo $|z| = 5$ deletado. Determine os pontos de fronteira de $S$. Este conjunto é conexo?

Nos Problemas 27 e 28, desenhe o conjunto de pontos no plano complexo que satisfazem a desigualdade dada.

**27.** $0 \leq \arg(z) \leq \pi/6$

**28.** $-\pi < \arg(z) < \pi/2$

Nos Problemas 29 e 30, usando $\arg(z)$ e uma desigualdade, descreva o conjunto hachurado na figura dada.

**29.**

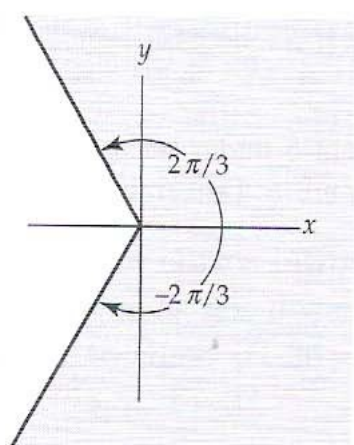



Figura 1.5.11 Figura para o Problema 29

**30.**

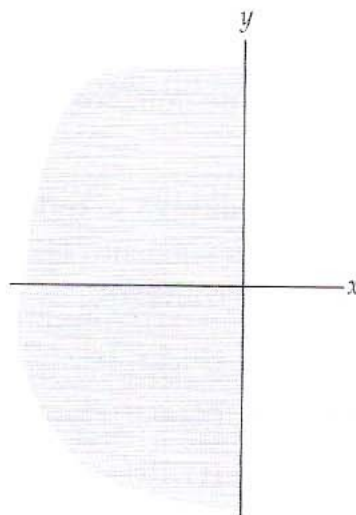



Figura 1.5.12 Figura para o Problema 30

Nos Problemas 31 e 32, resolva o dado par de equações simultâneas.

**31.** $|z| = 2, \quad |z - 2| = 2$

**32.** $|z - i| = 5, \quad \arg(z) = \pi/4$

## Foco em Conceitos

**33.** Quando definimos região anelar, afirmamos que se $\rho_1 > 0$ o conjunto de pontos que satisfazem $\rho_1 < |z - z_0|$ é exterior ao círculo de raio $\rho_1$ e centro em $z_0$. Em geral, descreva o conjunto correspondente a $\rho_1 = 0$. Em particular, descreva o conjunto definido por $|z + 2 - 5i| > 0$.

**34.** (a) Quais são os pontos de fronteira de uma vizinhança deletada de $z_0$?

(b) Quais são os pontos de fronteira do plano complexo?

(c) Dê vários exemplos, sem incluir o dado anteriormente, de conjuntos $S$ que não são abertos nem fechados.

**35.** Use a notação complexa e desigualdades nas partes (a) e (b).

(a) Faça uma lista de cinco conjuntos no plano complexo que são conexos.

(b) Faça uma lista de cinco conjuntos no plano complexo que não são conexos.

**36.** Considere um disco centrado em $z_0$ e definido por $|z - z_0| \leq \rho$. Demonstre que este conjunto é limitado; para isso, determine um número real $R > 0$ tal que todos os pontos $z$ no disco satisfazem $|z| < R$. [ *Sugestão*: veja a discussão de desigualdades na Seção 1.2.]

**37.** Suponha que $z_1$ e $z_2$ sejam pontos distintos. Usando apenas o conceito de distância, descreva, com palavras, o conjunto de pontos $z$ no plano complexo que satisfazem $|z - z_0| = |z - z_1|$.

**38.** Usando apenas o conceito de distância, descreva, com palavras, o conjunto de pontos $z$ no plano complexo que satisfazem $|z - i| + |z + i| = 1$.

Nos Problemas 39 e 40, descreva o conjunto ilustrado na figura; para isso, preencha as linhas em branco na representação do conjunto

$$\{z: ____________ \text{ e/ou } ____________ \}$$

Utilize a notação complexa para equações ou desigualdades e uma das palavras *e* ou *ou*.

**39.**

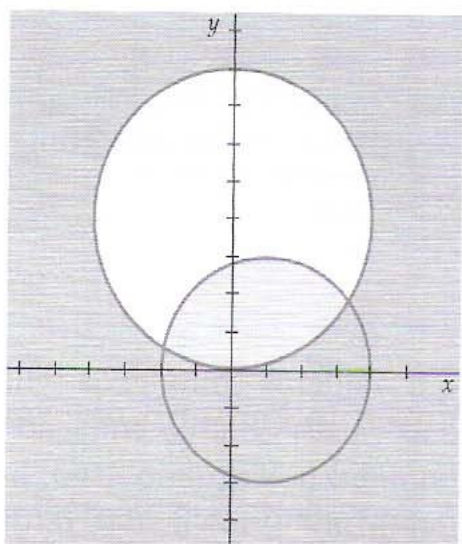



Figura 1.5.13 Figura para o Problema 39

**40.**

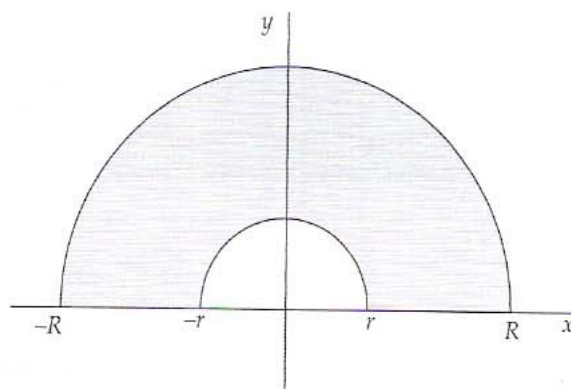



Figura 1.5.14 Figura para o Problema 40

**41.** Considere o conjunto $S$ de pontos no plano complexo definido por $\{i/n\}$, $n = 1, 2, 3, ...$ Qual(is) dos seguintes termos se aplica(m) a $S$: *fronteira, aberto, fechado, conexo, limitado*?

**42.** Considere um conjunto finito $S$ de números complexos $\{z_1, z_2, z_3, ..., z_n\}$. $S$ é necessariamente limitado? Justifique sua resposta matematicamente.

**43.** Um conjunto $S$ é denominado **convexo** se todo par de pontos $P$ e $Q$ em $S$ puder ser conectado por um segmento de reta $\overline{PQ}$ e todos os pontos no segmento de reta também estiverem em $S$. Determine que conjuntos $S$ no plano complexo definidos a seguir são convexos:

(a) $|z - 2 + i| < 3$ (b) $1 < |z| < 2$

(c) $x > 2,\ y \leq -1$ (d) $y < x^2$

(e) $\text{Re}(z) \leq 5$ (f) $\text{Re}(z) \neq 0$

**44.** Um conjunto convexo, como definido no Problema 43, é necessariamente conexo?

**45.** Analise e decida se o conjunto vazio $\varnothing$ é um conjunto aberto.

**46.** Suponha que $S_1$ e $S_2$ sejam conjuntos abertos no plano complexo.
(a) A união $S_1 \cup S_2$ é um conjunto aberto? Se achar que a resposta é sim, tente prová-la. Se achar que a resposta é não, dê um contraexemplo.
(b) Repita a parte (a) para a interseção $S_1 \cap S_2$.

Antes de resolver os Problemas 47-50, releia as Observações no final desta seção.

**47.** Determine os pontos $(x_0, y_0)$ na circunferência unitária que correspondem a cada um dos seguintes números reais: $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $-3$, $1$, $10$. Veja a Figura 1.5.10(a).

**48.** Determine o ponto $(x_0, y_0, u_0)$ na superfície da esfera unitária que corresponde ao número complexo $2 + 5i$. Veja a Figura 1.5.10(b).

**49.** Descreva o conjunto de pontos na superfície da esfera unitária que corresponde a cada um dos seguintes conjuntos no plano complexo:
(a) os números na circunferência unitária $|z| = 1$
(b) os números no interior do disco aberto $|z| < 1$
(c) os números exteriores à circunferência unitária, ou seja, $|z| > 1$.

**50.** Expresse as coordenadas do ponto $(x_0, y_0, u_0)$ na superfície da esfera unitária na Figura 1.5.10(b) em termos das coordenadas do ponto $(a, b, 0)$ no ponto complexo. Use estas fórmulas para comprovar sua resposta ao Problema 48. [*Sugestão*: primeiro, mostre que todos os pontos na reta que contém os pontos $(0, 0, 1)$ e $(a, b, 0)$ são da forma $(ta, tb, 1 - t)$.]

## 1.6 Aplicações

Nesta seção, examinaremos algumas aplicações simples de números complexos. Na discussão a seguir admitiremos que o leitor tem alguma familiaridade com métodos de solução de equações diferenciais ordinárias elementares.

Na Seção 1.4 vimos como determinar raízes de números complexos. Com essa informação estamos aptos a examinar o problema de como resolver uma equação quadrática com coeficientes complexos, usando a versão complexa da fórmula quadrática. A seguir, examinaremos como números complexos e a exponencial complexa são usados em equações diferenciais. Esta última discussão nos levará à fórmula de Euler e a uma nova e compacta maneira de escrever a forma polar de um número complexo. Por fim, exploraremos alguns modos em que números complexos são utilizados em engenharia elétrica.

**Álgebra** É provável que o primeiro encontro do aluno com números complexos tenha se dado em um curso introdutório de álgebra, onde deve ter aprendido que as raízes de uma equação polinomial podem ser complexas ou reais. Por exemplo, qualquer equação polinomial do segundo grau, ou equação quadrática, pode ser resolvida completando o quadrado. No caso geral $ax^2 + bx + c = 0$, onde os coeficientes $a \neq 0$, $b$ e $c$ são reais, a completação do quadrado em $x$ resulta na fórmula quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (1)$$

Quando o discriminante $b^2 - 4ac$ é negativo, as raízes da equação são complexas. Por exemplo, de (1), as duas raízes de $x^2 - 2x + 10 = 0$ são

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}. \qquad (2)$$

*Nota*: as raízes $z_1$ e $z_2$ são números complexos conjugados. Veja Problema 22 do Conjunto de Exercícios 1.6. ➧

Nos cursos introdutórios a unidade imaginária $i$ é escrita como $i = \sqrt{-1}$, e é feita a hipótese de que as leis dos expoentes permanecem válidas, de modo que um número $\sqrt{-36}$ possa ser escrito como $\sqrt{-36} = \sqrt{36}\sqrt{-1} = 6i$. Denotemos as duas raízes complexas em (2) por $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = 1 - 3i$.

**Fórmula Quadrática** A fórmula quadrática é perfeitamente válida quando os coeficientes $a \neq 0$, $b$ e $c$ de uma equação polinomial quadrática $az^2 + bz + c = 0$ são números complexos. Embora a fórmula possa ser expressa exatamente na mesma forma como (1), preferimos escrever o resultado como

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}. \qquad (3)$$

Vale notar que o numerador no lado direito de (3) tem uma aparência um pouco diferente da tradicional $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ dada em (1). Tenhamos em mente que, quando $b^2 - 4ac \neq 0$, o símbolo $(b^2 - 4ac)^{1/2}$ representa o conjunto de duas raízes quadradas do número complexo $b^2 - 4ac$. Por conseguinte, (3) fornece *duas* soluções complexas. De aqui em diante, usaremos o símbolo $\sqrt{\ }$ para números reais, de modo que $\sqrt{a}$ representa a raiz não negativa do número real $a \geq 0$. O exemplo a seguir ilustra o uso de (3).

Interpretação de $\sqrt{\ }$ neste texto ➧

---

**EXEMPLO 1 Uso da Fórmula Quadrática**

Resolvamos a equação quadrática $z^2 + (1 - i)z - 3i = 0$.

**Solução** De (3), com $a = 1$, $b = 1 - i$ e $c = -3i$, temos

$$z = \frac{-(1-i) + [(1-i)^2 - 4(-3i)]^{1/2}}{2} = \frac{1}{2}\left[-1 + i + (10i)^{1/2}\right]. \qquad (4)$$

Para calcular $(10i)^{1/2}$ usamos (4) da Seção 1.4, com $r = \sqrt{10}$, $\theta = \pi/2$ e $n = 2$. As duas raízes quadradas de $10i$ são:

$$w_0 = \sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$$

e

$$w_1 = \sqrt{10}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{10}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i.$$

Portanto, (4) fornece dois valores:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-1 + i + \left(\sqrt{5} + \sqrt{5}i\right)\right] \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1}{2}\left[-1 + i + \left(-\sqrt{5} - \sqrt{5}i\right)\right].$$

*Nota*: as raízes $z_1$ e $z_2$ não são números complexos conjugados. Veja *Problema 26 do Conjunto de Exercícios 1.6.* ➧

Essas soluções da equação original, escritas na forma $z = a + ib$, são

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)i \quad e \quad z_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)i.$$

❑

**Fatoração de um Polinômio Quadrático** Para determinar todas as raízes de uma equação polinomial podemos fatorar o polinômio completamente. Esta afirmação representa um corolário de um importante teorema que provaremos na Seção 5.5. Por ora, notemos que se $z_1$ e $z_2$ forem as duas raízes definidas por (3), o polinômio quadrático $az^2 + bz + c$ pode ser fatorado como

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2). \tag{5}$$

Por exemplo, já usamos (2) para mostrar que a equação quadrática $x^2 - 2x + 10 = 0$ tem raízes $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = 1 - 3i$. Com $a = 1$, (5) nos permite fatorar o polinômio $x^2 - 2x + 10$ usando números complexos:

$$x^2 - 2x + 10 = [x - (1 + 3i)]\,[x - (1 - 3i)] = (x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i).$$

De modo similar, a fatoração do polinômio quadrático $z^2 + (1 - i)z - 3i$, do Exemplo 1, é

$$z^2 + (1 - i)z - 3i = \left[z - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)i\right]\left[z + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)i\right].$$

Como cursos introdutórios de cálculo tratam, principalmente, de grandezas reais, é possível que os estudantes não vejam números complexos até iniciarem um curso de equações diferenciais ou de engenharia elétrica.

**Equações Diferenciais** O primeiro passo na solução de uma equação diferencial linear de segunda ordem $ay'' + by' + cy = f(x)$ com coeficientes reais $a$, $b$ e $c$ consiste em resolver a equação homogênea associada $ay'' + by' + cy = 0$. Esta última equação possui soluções da forma $y = e^{mx}$. Para comprovar isso, substituímos $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$ em $ay'' + by' + cy = 0$:

$$ay'' + by' + cy = am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0.$$

De $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$ podemos concluir que $y = e^{mx}$ é uma solução da equação homogênea sempre que $m$ for uma solução da equação polinomial $am^2 + bm + c = 0$. Esta última equação quadrática é denominada **equação característica** ou **equação auxiliar** associada à equação homogênea. Quando os coeficientes de uma equação polinomial são *reais*, a equação não pode ter apenas *uma* raiz complexa; ou seja, raízes complexas sempre devem ocorrem em pares conjugados. Por conseguinte, se a equação característica possuir raízes complexas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, $\beta > 0$, então duas soluções de $ay'' + by' + cy = 0$ são funções exponenciais complexas $y = e^{(\alpha + i\beta)x}$ e $y = e^{(\alpha - i\beta)x}$. Para obter soluções reais da equação diferencial, usamos a **fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta, \tag{6}$$

onde $\theta$ é real. Substituindo $\theta$ alternadamente por $\beta$ e $-\beta$, usamos (6) para escrever

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\,\text{sen}\,\beta x) \quad \text{e} \quad e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\,\text{sen}\,\beta x). \tag{7}$$

Como a equação diferencial é homogênea, as combinações lineares

$$y_1 = \frac{1}{2}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right] \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{1}{2i}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right]$$

também são soluções. Contudo, devido a (7), estas duas expressões são funções reais:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{e} \quad y_2 = e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x. \tag{8}$$

---

**EXEMPLO 2 Solução de uma Equação Diferencial**

Calculemos a solução da equação $y'' + 2y' + 2y = 0$.

**Solução** Aplicamos a fórmula quadrática à equação auxiliar $m^2 + 2m + 2 = 0$ e obtemos as raízes complexas $m_1 = -1 + i$ e $m_2 = \overline{m_1} = -1 - i$. Substituindo $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, (8) nos fornece as duas soluções $y_1 = e^{-x}\cos x$ e $y_2 = e^{-x}\,\text{sen}\,x$. □

Vale recordar que a chamada solução geral de uma equação diferencial linear e homogênea de grau $n$ consiste em uma combinação linear de $n$ soluções linearmente independentes. Assim, no Exemplo 2 a solução geral da equação diferencial de segunda ordem em questão é $y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\,\text{sen}\,x$, onde $c_1$ e $c_2$ são constantes arbitrárias.

**Forma Exponencial de um Número Complexo** É importante ressaltar que quando os resultados dados em (6) e (7) foram obtidos os mesmos representavam hipóteses, pois a função exponencial complexa

ainda não havia sido definida. Como uma breve antecipação do material nas Seções 2.1 e 4.1, a exponencial complexa $e^z$ é o número complexo *definido* por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{9}$$

Embora a prova seja adiada até a Seção 4.1, (9) pode ser usada para mostrar que a familiar lei dos expoentes é válida para números complexos $z_1$ e $z_2$:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{10}$$

Devido a (10), os resultados em (7) são válidos. Além disso, notemos que a fórmula de Euler (4) é um caso especial de (9) quando $z$ é um número puramente imaginário, ou seja, com $x = 0$ e $y$ substituído por $\theta$. A fórmula de Euler provê uma notação conveniente para diversos conceitos estudados anteriormente neste capítulo. A forma polar de um número complexo $z$, $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ pode ser escrita, de modo compacto, como

$$z = re^{i\theta}. \tag{11}$$

Esta forma conveniente é denominada **forma exponencial** de um número complexo $z$. Por exemplo, $i = e^{\pi i/2}$ e $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$. Adicionalmente, a fórmula para as $n$ raízes $n$-ésimas de um número complexo, (4) da Seção 1.4, se torna

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{12}$$

**Engenharia Elétrica** Ao aplicar matemática a situações físicas, engenheiros e matemáticos muitas vezes abordam o problema de formas completamente diferentes. Por exemplo, consideremos o problema de determinar a corrente de estado estacionário $i_p(t)$ em um circuito $LRC$ série, no qual a carga $q(t)$ no capacitor é descrita, para tempo $t > 0$, pela equação diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen}\gamma t \tag{13}$$

onde as constantes positivas $L$, $R$ e $C$ são a indutância, a resistência e a capacitância, respectivamente. Para determinar a **corrente de estado estacionário** $i_p(t)$ primeiro determinamos a **carga de estado estacionário** no capacitor através do cálculo de uma solução particular $q_p(t)$ de (13). Prosseguindo como em um curso de equações diferenciais, usaremos o método de coeficientes indeterminados para calcular $q_p(t)$. Para isso, adotamos uma solução particular da forma $q_p(t) = A \operatorname{sen}\gamma t + B\cos\gamma t$ e a substituímos na equação diferencial; simplificamos esta última, igualamos os coeficientes de funções semelhantes e resolvemos as equações resultantes para as incógnitas $A$ e $B$. Deixamos como exercício provar que $A = E_0X/(-\gamma Z^2)$ e $B = E_0R/(-\gamma Z^2)$, onde as grandezas

$$X = L\gamma - 1/C\gamma \quad \text{e} \quad Z = \sqrt{X^2 + R^2} \tag{14}$$

são denominadas, respectivamente, **reatância** e **impedância** do circuito. Portanto, a solução de estado estacionário ou carga de estado estacionário no circuito é

$$q_p(t) = -\frac{E_0X}{\gamma Z^2}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{E_0R}{\gamma Z^2}\cos\gamma t.$$

Desta solução e de $i_p(t) = q'_p(t)$ obtemos a corrente de estado estacionário:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{X}{Z}\cos\gamma t\right). \tag{15}$$

Engenheiros eletricistas com frequência usam análise complexa para resolver problemas como este. Antes de mais nada, para evitar confusão com a corrente $i$ um engenheiro eletricista denota a unidade imaginária $i$ pelo símbolo $j$; em outras palavras, $j^2 = -1$. Como a corrente está relacionada à carga elétrica $q$ por $i = dq/dt$, a equação diferencial (13) é o mesmo que

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen}\gamma t. \tag{16}$$

Tendo em vista a fórmula de Euler (6), se $\theta$ for substituído pelo símbolo $\gamma$ a tensão aplicada $E_0 \operatorname{sen}\gamma t$ é o mesmo que $\operatorname{Im}(E_0e^{j\gamma t})$. Esta última expressão sugere que no método de coeficientes indeterminados tentemos uma solução de (16) na forma de um múltiplo constante de uma exponencial complexa, ou seja,

$i_p(t) = \text{Im}(Ae^{j\gamma t})$. Substituímos esta última expressão na equação (16), admitimos que a exponencial complexa satisfaz as regras "usuais" de diferenciação, usamos o fato de que a carga $q$ é uma antiderivada da corrente $i$ e igualamos os coeficientes de $e^{j\gamma t}$. O resultado é $(jL\gamma + R + 1/jC\gamma)A = E_0$, do qual obtemos

$$A = \frac{E_0}{R + j\left(L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}\right)} = \frac{E_0}{R + jX}, \tag{17}$$

onde $X$ é a reatância dada em (14). O denominador da última expressão, $Z_c = R + j(L\gamma - 1/C\gamma)$, é denominado **impedância complexa** do circuito. Como o módulo da impedância complexa é $|Z_c| = \sqrt{R^2 + (L\gamma - 1/C\gamma)^2}$, vemos de (14) que a impedância $Z$ e a impedância complexa $Z_c$ estão relacionadas por $Z = |Z_c|$.

A partir da forma exponencial de um número complexo dada em (11), podemos escrever a impedância complexa como

$$Z_c = |Z_c|\, e^{j\theta} = Ze^{j\theta} \quad \text{onde} \quad \tan\theta = \frac{L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}}{R}.$$

Com isso, (17) fica escrita como $A = E_0/z_c = E_0/(Ze^{j\gamma t})$ e a corrente de estado estacionário como

$$i_p(t) = \text{Im}\left(\frac{E_0}{Z} e^{-j\theta} e^{j\gamma t}\right). \tag{18}$$

Sugerimos comprovar que a expressão em (18) é igual à dada em (15).

O problema de determinar a corrente de estado estacionário de um circuito $LRC$ série descrito pela equação diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E_0 \cos \gamma t \tag{19}$$

pode ser resolvido de modo similar. Neste caso, a tensão aplicada $E_0 \cos \gamma t$ sugere que tentemos uma solução da forma $i_p(t) = \text{Re}(Ae^{j\gamma t})$. Com uma análise semelhante à anterior, obtemos a solução de (19) como

$$i_p(t) = \text{Re}\left(\frac{E_0}{Z} e^{-j\theta} e^{j\gamma t}\right). \tag{20}$$

**Observações** *Comparação com Análise Real*

Nesta seção vimos que, se $z_1$ for uma raiz complexa de uma equação polinomial, $z_2 = \bar{z}_1$ é outra solução, sempre que todos os coeficientes do polinômio forem reais; mas $\bar{z}_1$ não é necessariamente uma raiz da equação quando pelo menos um dos coeficientes não for real. Neste caso, podemos obter um outro fator do polinômio dividindo-o por $z - z_1$. Vale notar que, em análise complexa, divisão sintética é válida. Veja Problemas 27 e 28 do Conjunto de Exercícios 1.6.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.6 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–6, resolva a equação dada usando a fórmula quadrática (3). A seguir, use (5) para fatorar o polinômio.

**1.** $z^2 + iz - 2 = 0$

**2.** $iz^2 - z + i = 0$

**3.** $z^2 - (1 + i)z + 6 - 17i = 0$

**4.** $z^2 - (1 + 9i)z - 20 + 5i = 0$

**5.** $z^2 + 2z - \sqrt{3}i = 0$

**6.** $3z^2 + (2 - 3i)z - 1 - 3i = 0$ [*Sugestão*: veja o Problema 15 do Conjunto de Exercícios 1.4.]

Nos Problemas 7–12, expresse o número complexo dado na forma exponencial $z = re^{i\theta}$.

**7.** $-10$

**8.** $-2\pi i$

**9.** $-4 - 4i$

**10.** $\dfrac{2}{1 + i}$

**11.** $(3 - i)^2$

**12.** $(1 + i)^{20}$

Nos Problemas 13–16, determine soluções da equação diferencial homogênea dada.

**13.** $y'' - 4y' + 13y = 0$

**14.** $3y'' + 2y' + y = 0$

**15.** $y'' + y' + y = 0$

**16.** $y'' + 2y' + 4y = 0$

Nos Problemas 17–20, determine a carga de estado estacionário $q_p(t)$ e a corrente de estado estacionário $i_p(t)$ para o circuito $LRC$ série descrito pela equação diferencial dada. Determine a impedância complexa e a impedância do circuito. Use o método complexo discutido anteriormente.

**17.** $\dfrac{di}{dt} + 6i + 25q = 10\cos 5t$

**18.** $\dfrac{di}{dt} + 6i + 25q = 10\operatorname{sen} 5t$

**19.** $\dfrac{di}{dt} + i + 2q = 100\operatorname{sen} t$

**20.** $\dfrac{di}{dt} + i + 2q = 100\cos t$

## Foco em Conceitos

**21.** Investigue como (3) pode ser usada para determinar as quatro raízes de $z^4 - 2z^2 + 1 - 2i = 0$. Implemente suas ideias.

**22.** Se $z_1$ é uma raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então o conjugado $z_2 = \bar{z}_1$ também é uma raiz. Prove este resultado no caso de uma equação quadrática $az^2 + bz + c = 0$, onde $a \neq 0$, $b$ e $c$ são reais. Inicie com as propriedades de conjugados dadas em (1) e (2) da Seção 1.1.

Nos Problemas 23 e 24, use o Problema (22) e (5) desta seção para fatorar o polinômio quadrático dado, caso o número complexo indicado seja uma raiz.

**23.** $4z^2 + 12z + 34 = 0;\quad z_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i$

**24.** $5z^2 - 2z + 4 = 0;\quad z_1 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\sqrt{19}}{5}i$

**25.** (a) Determine uma equação polinomial quadrática da qual $2 - i$ é uma raiz.

(b) Sua resposta à parte (a) é única? Explique isso de forma detalhada.

**26.** Se $z_1$ for uma raiz de uma equação polinomial com coeficiente principal 1 e pelo menos um *coeficiente não real*, então $\bar{z}_1$ *não* é uma raiz. Prove este resultado no caso de uma equação quadrática $z^2 + bz + c = 0$, onde pelo menos um dos coeficientes $b$ e $c$ é um número complexo não nulo.

Nos Problemas 27 e 28, fatore o polinômio quadrático dado, caso o número complexo indicado seja uma de suas raízes. [*Sugestão*: considere o uso de divisão longa ou sintética.]

**27.** $3iz^2 + (9 - 16i)z - 17 - i;\ z_1 = 5 + 2i$

**28.** $4z^2 + (-13 + 18i)z - 5 - 10i;\ z_1 = 3 - 4i$

Nos Problemas 29 e 30, comprove a plausibilidade da fórmula de Euler (6) nas duas formas especificadas.

**29.** É sabido que a série de Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots$ converge para todos os valores de $x$. Tomando esta afirmação como verdadeira, substitua $x = i\theta$, com $\theta$ real, na série e simplifique as potências $i^n$. Veja o que resulta quando a série é separada nas partes real e imaginária.

**30.** (a) Comprove que $y_1 = \cos\theta$ e $y_2 = \operatorname{sen}\theta$ satisfazem a equação diferencial linear e homogênea de segundo grau $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$. Como o conjunto de soluções que consiste em $y_1$ e $y_2$ é linearmente independente, a solução geral da equação diferencial é $y = c_1\cos\theta + c_2\operatorname{sen}\theta$.

(b) Comprove que $y = e^{i\theta}$, onde $i$ é a unidade imaginária e $\theta$ é uma variável real, também satisfaz a equação diferencial dada na parte (a).

(c) Como $y = e^{i\theta}$ é uma solução da equação diferencial, deve ser possível obter $y$ da solução geral dada na parte (a); em outras palavras, deve haver coeficientes *específicos* $c_1$ e $c_2$ tais que $e^{i\theta} = c_1\cos\theta + c_2\operatorname{sen}\theta$. Comprove, de $y = e^{i\theta}$, que $y(0) = 1$ e $y'(0) = i$. Use estas duas condições para determinar $c_1$ e $c_2$.

**31.** Determine uma equação diferencial linear e homogênea do segundo grau da qual $y = e^{-5x}\cos 2x$ seja uma solução.

**32.** (a) Diferenciando a Equação (13) em relação a $t$, mostre que a corrente no circuito $LRC$ série é descrita por

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E_0\,\gamma\cos\gamma t.$$

(b) Use o método dos coeficientes indeterminados para calcular uma solução particular de $i_{p_1}(t) = Ae^{j\gamma t}$ da equação diferencial

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E_0\gamma e^{j\gamma t}.$$

(c) Como o resultado da parte (b) pode ser usado para determinar uma solução particular $i_p(t)$ da equação diferencial da parte (a)? Implemente suas ideias e comprove que $i_p(t)$ é o mesmo que (15).

## Tarefas para o Laboratório de Computação

Nos Problemas 33–36, use um SAC para auxiliar na fatoração do polinômio quadrático dado.

**33.** $z^2 - 3iz - 2$

**34.** $z^2 - \sqrt{3}z - i$

**35.** $iz^2 - (2+3i)z + 1 + 5i$

**36.** $(3+i)z^2 + (1+7i)z - 10$

Nos Problemas 37 e 38, use um SAC para resolver a equação polinomial dada. Em *Mathematica*, o comando **Solve** calculará todas as raízes de equações polinomiais de até quarto grau por meio de uma fórmula.

**37.** $z^3 - 4z^2 + 10 = 0$

**38.** $z^4 + 4iz^2 + 10i = 0$

Nos Problemas 39 e 40, use um SAC para resolver a equação polinomial dada. Em *Mathematica*, o comando **NSolve** calculará valores aproximados para todas as raízes de equações polinomiais de grau igual ou superior a cinco.

**39.** $z^5 - z - 12 = 0$

**40.** $z^6 - z^4 + 3iz^3 - 1 = 0$

## Projetos

**41. Fórmula Cúbica** Neste projeto você deve investigar a solução de uma equação polinomial cúbica por meio de uma fórmula que use radicais, ou seja, uma combinação de raízes quadradas e cúbicas de expressões que envolvem os coeficientes.

(a) Para resolver uma equação cúbica geral $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, basta resolver uma **equação cúbica reduzida** $x^3 = mx + n$, pois a equação cúbica geral pode ser reduzida a este caso especial com a eliminação do termo $az^2$. Substitua $z = x - a/3$, comprove esta afirmação e determine valores para $m$ e $n$.

(b) Use o procedimento delineado na parte (a) para determinar a equação cúbica reduzida para $z^3 + 3z^2 - 3z - 9 = 0$.

(c) A solução de $x^3 = mx + n$ é dada por

$$x = \left[\frac{n}{2} + \left(\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[\frac{n}{2} - \left(\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3}.$$

Use esta fórmula para resolver a equação cúbica reduzida determinada na parte (b).

(d) Desenhe os gráficos do polinômio $z^3 + 3z^2 - 3z - 9$ e do polinômio obtido da equação cúbica reduzida da parte (b) e estime a localização dos pontos em que cada curva corta o eixo $x$.

(e) Compare seus resultados da parte (d) com as soluções obtidas na parte (c). Explique quaisquer aparentes discrepâncias. Determine as três soluções de $z^3 + 3z^2 - 3z - 9 = 0$.

(f) Faça uma pesquisa de literatura para encontrar deduções com motivação geométrica (usando um quadrado e um cubo) da fórmula quadrática e da fórmula dada na parte (c) para a solução da equação cúbica reduzida. Por que a denominação *quadrática* é aplicada à fórmula, uma vez que o prefixo *quad* advém da palavra latina para o número quatro?

**42. Matrizes Complexas** Neste projeto, assumimos que o aluno tenha alguma experiência com matrizes ou esteja disposto a aprender algo sobre elas.

Certas matrizes complexas, ou seja, matrizes cujos elementos ou entradas são números complexos, são importantes em matemática aplicada. Uma matriz complexa $A$ $n \times n$ é denominada

$$\begin{aligned} &\textit{Hermitiana} && \text{se } \bar{A}^T = A, \\ &\textit{Anti-hermitiana} && \text{se } \bar{A}^T = -A, \\ &\textit{Unitária} && \text{se } \bar{A}^T = A^{-1}. \end{aligned}$$

O símbolo $\bar{A}$ representa o conjugado da matriz $A$, ou seja, a matriz obtida tomando o conjugado de cada elemento de $A$. $\bar{A}^T$ representa a transposta de $\bar{A}$: a matriz obtida trocando as linhas pelas colunas de $\bar{A}$. O negativo $-A$ é a matriz formada tomando o negativo de todos os elementos de $A$; a matriz $A^{-1}$ é o inverso multiplicativo de $A$.

(a) Qual(is) da(s) seguinte(s) matriz(es) é(são) hermitiana(s), anti-hermitiana(s) ou unitária(s)?

$$A = \begin{pmatrix} 3i & 10 & -10-2i \\ -10 & 0 & 4+i \\ 10-2i & -4+i & -5i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2+i}{\sqrt{10}} & \dfrac{-2+i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \dfrac{2+i}{\sqrt{10}} & \dfrac{2-i}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+7i & -6+2i \\ 1-7i & 4 & 1+i \\ -6-2i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

**(b)** O que pode ser dito a respeito dos elementos na diagonal principal de uma matriz hermitiana? Prove sua afirmação.

**(c)** O que pode ser dito a respeito dos elementos na diagonal principal de uma matriz anti-hermitiana? Prove sua afirmação.

**(d)** Prove que os autovalores de uma matriz hermitiana são reais.

**(e)** Prove que os autovalores de uma matriz anti-hermitiana são imaginários puros ou zero.

**(f)** Prove que os autovalores de uma matriz unitária são unimodulares, ou seja, $|\lambda| = 1$. Indique onde esses autovalores estão localizados no plano complexo.

**(g)** Prove que o módulo de uma matriz unitária é um, ou seja, $|\det A| = 1$.

**(h)** Faça uma pesquisa de literatura para encontrar uma aplicação de cada um desses tipos de matriz.

**(i)** Quais são os análogos reais desses três tipos de matriz?

## Questionário de Revisão do Capítulo 1

*(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–22, responda verdadeiro ou falso. Se a afirmação for falsa, justifique sua resposta explicando por que é falsa ou dê um contraexemplo; se a afirmação for verdadeira, justifique sua resposta provando a afirmação ou cite um resultado pertinente do capítulo.

**1.** $\text{Re}(z_1 z_2) = \text{Re}(z_1)\,\text{Re}(z_2)$

**2.** $\text{Im}(4 + 7i) = 7i$

**3.** $|z - 1| = |\bar{z} - 1|$

**4.** Se $\text{Im}(z) > 0$, então $\text{Re}(1/z) > 0$.

**5.** $i < 10i$

**6.** Se $z \neq 0$, então $\text{Arg}(z + \bar{z}) = 0$.

**7.** $|x + iy| \leq |x| + |y|$

**8.** $\arg(\bar{z}) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$

**9.** Se $\bar{z} = -z$, então $z$ é imaginário puro.

**10.** $\arg(-2 + 10i) = \pi - \tan^{-1}(5) + 2n\pi$, para $n$ inteiro.

**11.** Se $z$ for uma raiz de uma equação polinomial $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z^1 + a_0 z^0 = 0$, então $\bar{z}$ também é uma raiz.

**12.** Para qualquer número complexo não nulo $z$ existe um número infinito de valores para $\arg(z)$.

**13.** Se $|z - 2| < 2$, então $|\text{Arg}\ (z)| < \pi/2$.

**14.** O conjunto $S$ de números complexos $z = x + iy$ cujas partes real e imaginária estão relacionadas por $y = \operatorname{sen} x$ é um conjunto limitado.

**15.** O conjunto $S$ de números complexos $z$ que satisfazem $|z| < 1$ ou $|z - 3i| < 1$ é um domínio.

**16.** Considere um conjunto $S$ de números complexos. Se o conjunto $A$ de todas as partes reais dos números em $S$ for limitado e o conjunto $B$ de todas as partes imaginárias dos números em $S$ for limitado, então necessariamente o conjunto $S$ é limitado.

**17.** O setor definido por $-\pi/6 < \arg(z) \leq \pi/6$ não é aberto nem fechado.

**18.** Para $z \neq 0$, há exatamente cinco valores de $z^{3/5} = (z^3)^{1/5}$.

**19.** Um ponto de fronteira de um conjunto $S$ é um ponto em $S$.

**20.** O plano complexo com eixos real e imaginário deletados não tem pontos de fronteira.

**21.** $\text{Im}(e^{i\theta}) = \operatorname{sen} \theta$.

**22.** A equação $z^n = 1$, sendo $n$ um inteiro positivo, terá apenas soluções reais para $n = 1$ e $n = 2$.

Nos Problemas 23–50, tente preencher os espaços sem recorrer ao texto.

**23.** Se $a + ib = \dfrac{3 - i}{2 + 3i} + \dfrac{2 - 2i}{1 - 5i}$, então $a =$ ______ e $b =$ ______.

**24.** Se $z = \dfrac{4i}{-3 - 4i}$, então $|z| =$ ______.

**25.** Se $|z| = \text{Re}(z)$, então $z =$ ______.

**26.** Se $z = 3 + 4i$, então $\text{Re}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right) =$ ______.

**27.** O argumento principal de $z = -1 - i$ é ______.

**28.** $\overline{\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2} =$ ______.

**29.** $\arg((1 + i)^5) =$ ______, $|(1 + i)^6| =$ ______, $\text{Im}((1 + i)^7) =$ ______ e $\text{Re}((1 + i)^8) =$ ______.

**30.** $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{483} =$ ______.

**31.** Se um ponto $z$ está no segundo quadrante, então $i\bar{z}$ está no ______ quadrante.

**32.** $i^{127} - 5i^9 + 2i^{-1} =$ ______.

**33.** Dos três pontos $z_1 = 2{,}5 + 1{,}9i$, $z_2 = 1{,}5 - 2{,}9i$ e $z_3 = -2{,}4 + 2{,}2i$, ______ é o mais distante da origem.

**34.** Se $3i\bar{z} - 2z = 6$, então $z =$ ______.

**35.** Se $2x - 3yi + 9 = -x + 2yi + 5i$, então $z = x + iy =$ ______.

**36.** Se $z = \dfrac{5}{-\sqrt{3} + i}$, então $\text{Arg}(z) =$ ______.

**37.** Se $z \neq 0$ for um número real, então $z + z^{-1}$ é real. Outros números complexos $z = x + iy$ para os quais $z + z^{-1}$ é real são definidos por $|z| =$ ______.

**38.** O vetor posição de comprimento 10 que passa por $(1, -1)$ é o mesmo que o número complexo $z =$ ______.

**39.** O vetor $z = (2 + 2i)(\sqrt{3} + i)$ está no ______ quadrante.

**40.** A fronteira do conjunto $S$ de números complexos $z$ que satisfazem simultaneamente $\text{Im}(z) > 0$ e $|z - 3i| > 1$ é ______.

**41.** Em palavras, a região no plano complexo em que $\text{Re}(z) < \text{Im}(z)$ é ______.

**42.** Na região do plano complexo que consiste nos dois discos $|z + i| \leq 1$ e $|z - i| \leq 1$ é ______ (conexa/não conexa).

**43.** Suponha que $z_0$ não seja um número real. As circunferências $|z - z_0| = |\bar{z}_0 - z_0|$ e $|z - \bar{z}_0| = |z_0 - \bar{z}_0|$ se cruzam no eixo ______ (real/imaginário).

**44.** Na notação complexa, uma equação do círculo com centro $-1$ que passa por $2 - i$ é ______.

**45.** Um inteiro positivo $n$ para o qual $(1 + i)^n = 4096$ é $n =$ ______.

**46.** $\left|\dfrac{(4-5i)^{658}}{(5+4i)^{658}}\right| =$ ______.

**47.** De $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^4 = \cos 4\theta + i\,\text{sen}\,4\theta$, obtemos as identidades trigonométricas reais: $\cos 4\theta =$ ______ e $\text{sen}\,4\theta =$ ______.

**48.** Quando $z$ é um ponto no interior do disco aberto definido por $|z| < 4$, um limite superior para $|z^3 - 2z^2 + 6z + 2|$ é dado por ______.

**49.** No Problema 22 do Conjunto de Exercícios 1.6 vimos que se $z_1$ for uma raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado $z_2 = \bar{z}_1$ também é uma raiz. Admita que a equação polinomial cúbica $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, onde $a$, $b$, $c$ e $d$ são reais, tem exatamente três raízes. Uma das raízes deve ser real porque ______.

**50.** (a) Interprete a representação circular para potências positivas inteiras de $i$ dada na Figura 1.R.1. Use esta representação para determinar $i^n$ para os seguintes valores de $n$:

$$5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ \ldots;\ i^n = ____$$
$$6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ \ldots;\ i^n = ____$$
$$7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ \ldots;\ i^n = ____$$
$$8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ \ldots;\ i^n = ____$$

(b) Reexamine os valores de $n$ nas quatro linhas da parte (a) e, então, divida cada um por 4. Com base em sua descoberta, deduza uma regra fácil para calcular $i^n$ para qualquer inteiro positivo $n$. Use sua regra para calcular

$$i^{33} = ____,\ i^{68} = ____,\ i^{87} = ____,\ i^{102} = ____,\ i^{624} = ____.$$

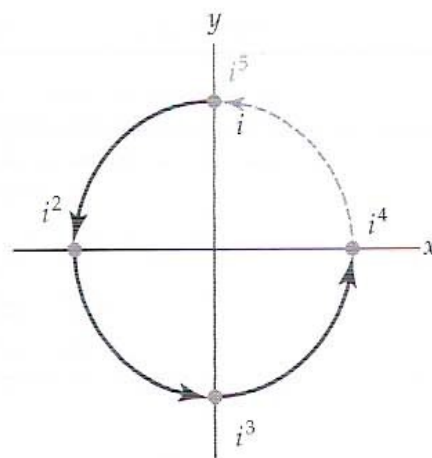



**Figura 1.R.1** Figura para o Problema 50

CAPÍTULO

# 2

# Funções Complexas e Transformações

## Índice do Capítulo



Imagem de um quadrado sob translação. Veja Exemplo 1, Figura 2.3.2.

**Introdução** No último capítulo apresentamos os números complexos e examinamos algumas de suas propriedades algébricas e geométricas. Neste capítulo focaremos o estudo de funções de um conjunto de números complexos a outro conjunto de números complexos. Veremos que, ao contrário das funções estudadas em cálculo elementar, não é possível desenhar um gráfico de uma função complexa. Por conseguinte, introduziremos a noção de uma transformação ou mapeamento como uma forma alternativa para a representação gráfica de uma função complexa. Os conceitos de um limite da continuidade de uma função complexa também são apresentados neste capítulo.

## 2.1 Funções Complexas

Um dos mais importantes conceitos em matemática é o de função. É provável que o aluno ainda se recorde de cursos anteriores que uma função é uma espécie de correspondência entre dois conjuntos; de modo mais específico:

> *Uma **função** f de um conjunto A em um conjunto B é uma regra de correspondência que associa cada elemento em A a um e apenas um elemento em B.*

Com frequência pensamos sobre uma função como sendo uma regra ou máquina que aceita *entradas* do conjunto $A$ e retorna *saídas* em um conjunto $B$. Em cálculo elementar, estudamos funções cujas entradas e saídas são números reais. Tais funções são denominadas **funções de valores reais de uma variável real**. Nesta seção iniciamos o estudo de funções cujas entradas e saídas são números complexos. Naturalmente, são denominadas **funções complexas de uma variável complexa** ou, simplesmente, **funções complexas**. Como veremos, muitas funções complexas interessantes e úteis são apenas generalizações de funções bem conhecidas do cálculo.

**Funções** Suponhamos que $f$ seja uma função de um conjunto $A$ no conjunto $B$. Se $f$ associar o elemento $a$ de $A$ ao elemento $b$ de $B$, dizemos que $b$ é a **imagem** de $a$ sob $f$, ou o **valor** de $f$ em $a$, e escrevemos $b = f(a)$. O conjunto $A$ — conjunto das entradas — é denominado **domínio** de $f$; o conjunto de imagens em $B$ — o conjunto das saídas — é denominado **imagem** de $f$. Denotamos o domínio e a imagem de uma função $f$ por $\text{Dom}(f)$ e $\text{Img}(f)$, respectivamente. Como um exemplo, consideremos a função "elevar ao quadrado" $f(x) = x^2$, definida para a variável real $x$. Como qualquer número real pode ser elevado ao quadrado, o domínio de $f$ é o conjunto $\mathbf{R}$ de todos os números reais. Isto é, $\text{Dom}(f) = A = \mathbf{R}$. A imagem de $f$ consiste em todos os números reais $x^2$, onde $x$ é um número real. É óbvio que $x^2 \geq 0$, para todo $x$ real, e é uma tarefa simples verificar, do gráfico de $f$, que a imagem de $f$ é o conjunto de todos os números reais *não negativos*. Por conseguinte, $\text{Img}(f)$ é o intervalo $[0, \infty)$. A imagem de $f$ não precisa ser todo o conjunto $B$. Por exemplo, $f$ pode ser vista como uma função de $A = \mathbf{R}$ em $B = \mathbf{R}$ e, neste caso, a imagem está contida em $B$, mas não é o mesmo que $B$.[1]

Como indica a definição a seguir, uma função *complexa* é uma função cujas entradas e saídas são números complexos.

**Definição 2.1.1 Função Complexa**

Uma **função complexa** é uma função $f$ cujos domínio e imagem são subconjuntos do conjunto de números complexo $\mathbf{C}$.

[illegible] usada [illegible] o texto. ➡

Uma função complexa também é denominada **função de valor complexo de uma variável complexa**.

Na maioria das vezes empregaremos os símbolos usuais $f$, $g$ e $h$ para denotar funções complexas. Além disso, entradas de uma função complexa $f$ serão, em geral, denotadas pela variável $z$, e as saídas, pela variável $w = f(z)$. Quando nos referirmos a uma função complexa, usaremos três notações indistintamente; por exemplo, $f(z) = z - i$, $w = z - i$ ou, apenas, a função $z - i$. Ao longo de todo o texto, a notação $w = f(z)$ denotará sempre uma função complexa, enquanto a notação $y = f(x)$ será reservada para representar uma função de valor real de uma variável real $x$.

---

EXEMPLO 1 **Função Complexa**

(a) A expressão $z^2 - (2 + i)z$ pode ser calculada para qualquer número complexo $z$ e sempre resultará em um único número complexo, de modo que $f(z) = z^2 - (2 + i)z$ define uma função complexa. Valores de $f$ podem ser calculados com o uso das operações aritméticas para números complexos dadas na Seção 1.1. Por exemplo, nos pontos $z = i$ e $z = 1 + i$ obtemos

[1] O conjunto $B$ é denominado **contradomínio** de $f$ e, em geral, representado por $\text{CoDom}(f)$. (N.T.)

## 2.1 Funções Complexas

Um dos mais importantes conceitos em matemática é o de função. É provável que o aluno ainda se recorde de cursos anteriores que uma função é uma espécie de correspondência entre dois conjuntos; de modo mais específico:

> *Uma **função** $f$ de um conjunto $A$ em um conjunto $B$ é uma regra de correspondência que associa cada elemento em $A$ a um e apenas um elemento em $B$.*

Com frequência pensamos sobre uma função como sendo uma regra ou máquina que aceita *entradas* do conjunto $A$ e retorna *saídas* em um conjunto $B$. Em cálculo elementar, estudamos funções cujas entradas e saídas são números reais. Tais funções são denominadas **funções de valores reais de uma variável real**. Nesta seção iniciamos o estudo de funções cujas entradas e saídas são números complexos. Naturalmente, são denominadas **funções complexas de uma variável complexa** ou, simplesmente, **funções complexas**. Como veremos, muitas funções complexas interessantes e úteis são apenas generalizações de funções bem conhecidas do cálculo.

**Funções** Suponhamos que $f$ seja uma função de um conjunto $A$ no conjunto $B$. Se $f$ associar o elemento $a$ de $A$ ao elemento $b$ de $B$, dizemos que $b$ é a **imagem** de $a$ sob $f$, ou o **valor** de $f$ em $a$, e escrevemos $b = f(a)$. O conjunto $A$ — conjunto das entradas — é denominado **domínio** de $f$; o conjunto de imagens em $B$ — o conjunto das saídas — é denominado **imagem** de $f$. Denotamos o domínio e a imagem de uma função $f$ por $\text{Dom}(f)$ e $\text{Img}(f)$, respectivamente. Como um exemplo, consideremos a função "elevar ao quadrado" $f(x) = x^2$, definida para a variável real $x$. Como qualquer número real pode ser elevado ao quadrado, o domínio de $f$ é o conjunto $\mathbf{R}$ de todos os números reais. Isto é, $\text{Dom}(f) = A = \mathbf{R}$. A imagem de $f$ consiste em todos os números reais $x^2$, onde $x$ é um número real. É óbvio que $x^2 \geq 0$, para todo $x$ real, e é uma tarefa simples verificar, do gráfico de $f$, que a imagem de $f$ é o conjunto de todos os números reais *não negativos*. Por conseguinte, $\text{Img}(f)$ é o intervalo $[0, \infty)$. A imagem de $f$ não precisa ser todo o conjunto $B$. Por exemplo, $f$ pode ser vista como uma função de $A = \mathbf{R}$ em $B = \mathbf{R}$ e, neste caso, a imagem está contida em $B$, mas não é o mesmo que $B$.[1]

Como indica a definição a seguir, uma função *complexa* é uma função cujas entradas e saídas são números complexos.

**Definição 2.1.1 Função Complexa**

Uma **função complexa** é uma função $f$ cujos domínio e imagem são subconjuntos do conjunto de números complexo $\mathbf{C}$.

[illegible] usada [illegible] o texto.

Uma função complexa também é denominada **função de valor complexo de uma variável complexa**.

Na maioria das vezes empregaremos os símbolos usuais $f$, $g$ e $h$ para denotar funções complexas. Além disso, entradas de uma função complexa $f$ serão, em geral, denotadas pela variável $z$, e as saídas, pela variável $w = f(z)$. Quando nos referirmos a uma função complexa, usaremos três notações indistintamente; por exemplo, $f(z) = z - i$, $w = z - i$ ou, apenas, a função $z - i$. Ao longo de todo o texto, a notação $w = f(z)$ denotará sempre uma função complexa, enquanto a notação $y = f(x)$ será reservada para representar uma função de valor real de uma variável real $x$.

---

EXEMPLO 1 **Função Complexa**

(a) A expressão $z^2 - (2 + i)z$ pode ser calculada para qualquer número complexo $z$ e sempre resultará em um único número complexo, de modo que $f(z) = z^2 - (2 + i)z$ define uma função complexa. Valores de $f$ podem ser calculados com o uso das operações aritméticas para números complexos dadas na Seção 1.1. Por exemplo, nos pontos $z = i$ e $z = 1 + i$ obtemos

[1] O conjunto $B$ é denominado **contradomínio** de $f$ e, em geral, representado por $\text{CoDom}(f)$. (N.T.)

$$f(i) = (i)^2 - (2+i)(i) = -1 - 2i + 1 = -2i$$

e

$$f(1+i) = (1+i)^2 - (2+i)(1+i) = 2i - 1 - 3i = -1 - i.$$

**(b)** A expressão $g(z) = z + 2\text{Re}(z)$ também define uma função complexa. Alguns valores de $g$ são:

$$g(i) = i + 2\text{Re}\,(i) = i + 2(0) = i$$

e

$$g(2-3i) = 2 - 3i + 2\text{Re}\,(2-3i) = 2 - 3i + 2(2) = 6 - 3i.$$

❑

Quando o domínio de uma função complexa não é especificado explicitamente, assumimos que seja o conjunto de todos os números complexos $z$ para os quais $f(z)$ é definida. Este conjunto é, às vezes, denominado *domínio natural* de $f$. Por exemplo, as funções $f(z) = z^2 - (2+i)z$ e $g(z) = z + 2\text{Re}(z)$ do Exemplo 1 são definidas para todos os números complexos $z$, de modo que $\text{Dom}(f) = \mathbf{C}$ e $\text{Dom}(g) = \mathbf{C}$. A função complexa $h(z) = z/(z^2+1)$ não é definida em $z = i$ e em $z = -i$, pois o denominador $z^2 + 1$ é igual a 0 quando $z = \pm i$. Por conseguinte, $\text{Dom}(h)$ é o conjunto de todos os números complexos, excetuando $i$ e $-i$.

Na introdução, definimos uma função de valor real de uma variável real como uma função cujos domínio e imagem são subconjuntos do conjunto dos números reais **R**. Como **R** é um subconjunto do conjunto dos números complexos **C**, *toda* função de valor real de uma variável real também é uma função complexa. Veremos, em breve, que funções de valores reais de duas variáveis reais $x$ e $y$ também são tipos especiais de funções complexas. Essas funções terão um papel importante no estudo de análise complexa. Para evitar a repetição da longa denominação *função de valor real de uma variável real*, usaremos, de aqui em diante, o termo **função real** para designar qualquer tipo de função estudada em cursos de cálculo de uma ou múltiplas variáveis.

**Partes Real e Imaginária de uma Função Complexa** Muitas vezes é útil expressar as entradas e saídas de uma função complexa em termos de suas partes real e imaginária. Se $w = f(z)$ for uma função complexa, então a imagem de um número complexo $z = x + iy$ sob $f$ é um número complexo $w = u + iv$. Simplificando a expressão $f(x+iy)$, podemos escrever as variáveis reais $u$ e $v$ em termos das variáveis reais $x$ e $y$. Por exemplo, substituindo o símbolo $z$ por $x + iy$ na função complexa $w = z^2$, obtemos

$$w = u + iv = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi. \tag{1}$$

De (1), vemos que as variáveis reais $u$ e $v$ são dadas por $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$. Este exemplo mostra que se $w = u + iv = f(x+iy)$ for uma função complexa, então $u$ e $v$ são ambas funções das duas variáveis reais $x$ e $y$. Ou seja, escrevendo $z = x + iy$, podemos expressar qualquer função complexa $w = f(z)$ em termos de duas funções reais como:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2}$$

As funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ em (2) são denominadas **partes real** e **imaginária de *f***, respectivamente.

---

EXEMPLO 2 **Partes Real e Imaginária de uma Função**

Determinemos as partes real e imaginária das funções **(a)** $f(z) = z^2 - (2+2i)z$ e **(b)** $g(z) = z + 2\text{Re}(z)$.

**Solução** Em cada caso, substituímos o símbolo $z$ por $x + iy$ e, então, simplificamos.

**(a)** $f(z) = (x+iy)^2 - (2+2i)(x+iy) = x^2 - 2x + y - y^2 + (2xy - x - 2y)i$. Portanto, $u(x, y) = x^2 - 2x + y - y^2$ e $v(x, y) = (2xy - x - 2y)$.

**(b)** Como $g(z) = x + iy + 2\text{Re}(x+iy) = 3x + iy$, temos $u(x, y) = 3x$ e $v(x, y) = y$. ❑

Uma função $f$ pode ser definida sem o uso do símbolo $z$. ➡

Toda função complexa é completamente determinada pelas funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ em (2). Dessa forma, uma função complexa $w = f(z)$ pode ser definida por meio da especificação arbitrária de duas funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$, mesmo que $w = u + iv$ não possa ser obtida através de operações familiares efetuadas apenas no símbolo $z$. Por exemplo, se $u(x, y) = xy^2$ e $v(x, y) = x^2 - 4y^3$, então $f(z) = xy^2 + i(x^2 - 4y^3)$ define uma função complexa. Para determinar o valor de $f$ no ponto $z = 3 + 2i$, substituímos $x = 3$ e $y = 2$ na expressão de $f$ e obtemos $f(3+2i) = 3 \cdot 2^2 + i(3^2 - 4 \cdot 2^3) = 12 - 23i$.

Aproveitamos para ressaltar que funções complexas definidas em termos de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sempre podem ser expressas, se desejado, em termos de operações nos símbolos $z$ e $\bar{z}$. Veja o Problema 32 no Conjunto de Exercícios 2.1.

**Função Exponencial** Na Seção 1.6 introduzimos, de modo informal, a função exponencial complexa $e^z$. Esta função complexa é um exemplo de uma função definida pela especificação de suas partes real e imaginária.

**Definição 2.1.2 Função Exponencial Complexa**

A função $e^z$, definida por:

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y, \tag{3}$$

é denominada **função exponencial complexa**.

Pela Definição 2.1.2, as partes real e imaginária da função exponencial complexa são $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, respectivamente. Valores da função exponencial complexa $w = e^z$ são obtidos expressando o ponto $z$ como $z = x + iy$ e, então, substituindo os valores de $x$ e $y$ em (3). O próximo exemplo ilustra esse procedimento.

---

EXEMPLO 3 **Valores da Função Exponencial Complexa**

Determinemos os valores da função exponencial complexa $e^z$ nos seguintes pontos:

(a) $z = 0$ (b) $z = i$ (c) $z = 2 + \pi i$

**Solução** Em cada parte, substituímos $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$ e, a seguir, simplificamos.

(a) Para $z = 0$, temos $x = 0$ e $y = 0$; portanto, $e^0 = e^0 \cos 0 + ie^0 \operatorname{sen} 0$. Como $e^0 = 1$ (para a função exponencial real), $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$, $e^0 = e^0 \cos 0 + ie^0 \operatorname{sen} 0$ é simplificada como $e^0 = 1$.

(b) Para $z = i$, temos $x = 0$ e $y = i$; logo,

$$e^i = e^0 \cos 1 + ie^0 \operatorname{sen} 1 = \cos 1 + i \operatorname{sen} 1 \approx 0{,}5403 + 0{,}8415i.$$

(c) Para $z = 2 + \pi i$, temos $x = 2$ e $y = \pi$; portanto $e^{2+\pi i} = e^2 \cos \pi + ie^2 \operatorname{sen} \pi$. Como $\cos \pi = -1$ e $\operatorname{sen} \pi = 0$, obtemos $e^{2+\pi i} = -e^2$.

**Forma Exponencial de um Número Complexo** A função exponencial nos permite expressar a forma polar de um número complexo não nulo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ de modo particularmente conveniente e compacto:

$$z = re^{i\theta}. \tag{4}$$

Chamamos (4) de **forma exponencial** do número complexo $z$. Por exemplo, uma forma polar do número complexo $3i$ é $3[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)]$, enquanto uma forma exponencial de $3i$ é $3e^{i\pi/2}$. Devemos ter em mente que na forma exponencial (4) de um número complexo o valor de $\theta = \arg(z)$ não é único. Isto é semelhante ao que se passa com a forma polar de um número complexo. Sugerimos, como exercício, comprovar que $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $\sqrt{2}\, e^{i9\pi/4}$ e $\sqrt{2}\, e^{i17\pi/4}$ são formas exponenciais válidas do número complexo $1 + i$.

Se $z$ for um número real, ou seja, se $z = x + 0i$, (3) fornece $e^z = e^x \cos 0 + ie^x \operatorname{sen} 0 = e^x$. Em outras palavras, para $z$ real a função exponencial complexa é igual à função exponencial real. Várias propriedades bem conhecidas da função exponencial real também são satisfeitas pela função exponencial complexa. Por exemplo, se $z_1$ e $z_2$ forem números complexos, (3) pode ser usada para mostrar que:

$$e^0 = 1, \tag{5}$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \tag{6}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \tag{7}$$

$$(e^{z_1})^n = e^{nz_1} \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{8}$$

Provas das propriedades (5)–(8) serão dadas na Seção 4.1, onde funções exponenciais complexas serão discutidas de forma mais detalhada.

Embora as funções exponenciais real e complexa tenham muita semelhança, também guardam algumas diferenças surpreendentes e importantes. Talvez a diferença mais inesperada seja:

*A função exponencial complexa é periódica.*

O Problema 33 do Conjunto de Exercícios 2.1 pede a comprovação de que $e^{z+2\pi i} = e^z$, para qualquer número complexo $z$. Esse resultado implica que a função exponencial complexa tem um período puramente imaginário $2\pi i$.

**Coordenadas Polares** Até aqui, as partes real e imaginária de uma função complexa foram determinadas usando a descrição cartesiana $x + iy$ da variável complexa $z$. Contudo, é igualmente válido — e muitas vezes, mais conveniente — expressar a variável complexa $z$ por meio da forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ ou, o que é equivalente, da forma exponencial $z = e^{i\theta}$. Dada uma função complexa $w = f(z)$ se substituirmos o símbolo $z$ por $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, podemos escrever a função como:

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \tag{9}$$

As funções reais $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$ em (9) continuam sendo denominadas partes real e imaginária de $f$, respectivamente. Por exemplo, substituindo o símbolo $z$ por $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ na função $f(z) = z^2$, obtemos pela fórmula de De Moivre,

$$f(z) = (r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta))^2 = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \operatorname{sen} 2\theta.$$

Por conseguinte, com o uso da forma polar de $z$ mostramos que as partes real e imaginária de $f(z) = z^2$ são

As funções $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$ não são iguais às funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$. ➡

$$u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta \quad \text{e} \quad v(r, \theta) = r^2 \operatorname{sen} 2\theta, \tag{10}$$

respectivamente. Como usamos a forma polar em vez de uma descrição cartesiana da variável $z$, as funções $u$ e $v$ em (10) não são iguais às funções $u$ e $v$ calculadas anteriormente para a função $z^2$ e dadas em (1).

Como feito com coordenadas cartesianas, uma função complexa também pode ser definida pela especificação de suas partes real e imaginária em coordenadas polares. A expressão $f(z) = r^3\cos\theta + (2r \operatorname{sen}\theta)i$ define, portanto, uma função complexa. Para determinar os valores dessa função no ponto, digamos, $z = 2i$, primeiro expressamos $2i$ na forma polar:

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

A seguir, substituímos $r = 2$ e $\theta = \pi/2$ na expressão de $f$ e obtemos:

$$f(2i) = (2)^3 \cos\frac{\pi}{2} + \left(2 \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) i = 8 \cdot 0 + (4 \cdot 1)i = 4i.$$

**Observações** ***Comparação com Análise Real***

($i$) A função exponencial complexa representa um bom exemplo de como funções complexas podem ser similares e, ao mesmo tempo, diferentes de suas análogas reais. Tanto a função exponencial real como a função exponencial complexa satisfazem as propriedades (5)–(8). No entanto, a função exponencial complexa é periódica e, da parte (c) do Exemplo 3, um valor de uma função exponencial complexa pode ser um número real negativo. Nenhuma dessas propriedades é compartilhada com a função exponencial real.

($ii$) Nesta seção fizemos a importante observação que toda função complexa pode ser definida em termos de duas funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$, como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Isso implica que o estudo de funções complexas está intimamente relacionado ao estudo de funções reais de duas variáveis reais. As noções de limite, continuidade, derivada e integral dessas funções reais serão usadas para desenvolver e auxiliar o entendimento de conceitos análogos para funções complexas.

(*iii*) No Exemplo 1 vimos que duas funções de valores reais de uma variável real e funções de valores reais de duas variáveis reais podem ser vistas como casos especiais de funções complexas. Outros tipos especiais de funções complexas que encontramos no estudo de análise complexa incluem as seguintes:

**Funções de valores reais de uma variável complexa** são funções $y = f(z)$, onde $z$ é um número complexo, e $y$, um número real. As funções $x = \text{Re}(z)$ e $r = |z|$ são dois exemplos desse tipo de função.

**Funções de valores complexos de uma variável real** são funções $w = f(t)$, onde $t$ é um número real, e $w$, um número complexo. É comum expressarmos essas funções em termos de duas funções de valores reais de uma variável real $t$, $w(t) = x(t) + iy(t)$. Por exemplo, $w(t) = 3t + i \cos t$ é uma função de valor complexo de uma variável real $t$.

Esses casos especiais de funções complexas aparecerão diversas vezes ao longo do texto.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.1 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–8, calcule o valor da função complexa $f$ nos pontos indicados.

**1.** $f(z) = z^2\bar{z} - 2i$ (a) $2i$ (b) $1 + i$ (c) $3 - 2i$

**2.** $f(z) = -z^3 + 2z + \bar{z}$ (a) $i$ (b) $2 - i$ (c) $1 + 2i$

**3.** $f(z) = \log_e |z| + i\text{Arg}(z)$ (a) $1$ (b) $4i$ (c) $1 + i$

**4.** $f(z) = |z|^2 - 2\text{Re}(iz) + z$ (a) $3 - 4i$ (b) $2 - i$ (c) $1 + 2i$

**5.** $f(z) = (xy - x^2) + i(3x + y)$ (a) $3i$ (b) $4 + i$ (c) $3 - 5i$

**6.** $f(z) = e^z$ (a) $2 - \pi i$ (b) $\frac{\pi}{3}i$ (c) $\log_e 2 - \frac{5\pi}{6}i$

**7.** $f(z) = r + i\cos^2\theta$ (a) $3$ (b) $-2i$ (c) $2 - i$

**8.** $f(z) = r \operatorname{sen} 3\theta + i \cos 2\theta$ (a) $-2$ (b) $1 + i$ (c) $-5i$

Nos Problemas 9–16, determine as partes real e imaginária, $u$ e $v$, da função complexa $f$ em termos de $x$ e $y$.

**9.** $f(z) = 6z - 5 + 9i$

**10.** $f(z) = -3z + 2\bar{z} - i$

**11.** $f(z) = z^3 - 2z + 6$

**12.** $f(z) = z^2 + \bar{z}^2$

**13.** $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z + 1}$

**14.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

**15.** $f(z) = e^{2z+i}$

**16.** $f(z) = e^{z^2}$

Nos Problemas 17–22, determine as partes real e imaginária, $u$ e $v$, da função complexa $f$ em termos de $r$ e $\theta$.

**17.** $f(z) = \bar{z}$

**18.** $f(z) = |z|$

**19.** $f(z) = z^4$

**20.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

**21.** $f(z) = e^z$

**22.** $f(z) = x^2 + y^2 - yi$

Nos Problemas 23–26, determine o domínio natural da função complexa $f$ dada.

**23.** $f(z) = 2\text{Re}(z) - iz^2$

**24.** $f(z) = \dfrac{3z + 2i}{z^3 + 4z^2 + z}$

**25.** $f(z) = \dfrac{iz}{|z - 1|}$

**26.** $f(z) = \dfrac{iz}{|z| - 1}$

### Foco em Conceitos

**27.** As seguintes expressões definem funções complexas $f(z)$? Justifique sua resposta.

(a) $\arg(z)$ (b) $\text{Arg}(z)$ (c) $\cos(\arg(z)) + i \operatorname{sen}(\arg(z))$

(d) $z^{1/2}$ (e) $|z|$ (f) $\text{Re}(z)$

**28.** Determine a imagem de cada uma das seguintes funções complexas:

(a) $f(z) = \text{Im}(z)$, definida no disco fechado $|z| \leq 2$

(b) $f(z) = (1 + i)|z|$, definida no quadrado $0 \leq \text{Re}(z) \leq 1$, $0 \leq \text{Im}(z) \leq 1$,

(c) $f(z) = \bar{z}$, definida no semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$.

**29.** Determine o domínio natural e a imagem de cada uma das seguintes funções complexas:

(a) $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$. [*Sugestão*: Para determinar a imagem, considere $|f(z)|$.]

(b) $f(z) = 3 + 4i + \dfrac{5z}{|z|}$.

(c) $f(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}$.

**30.** Dê um exemplo de uma função complexa cujo domínio natural consiste em todos os números complexos, exceto $0$, $1 + i$ e $1 - i$.

**31.** Determine o domínio natural e a imagem da função complexa $f(z) = \cos(x - y) + i \operatorname{sen}(x - y)$.

**32.** Considere $z = x + iy$. Releia a Seção 1.1 e determine como expressar $x$ e $y$ em termos de $z$ e $\bar{z}$. A seguir, escreva as seguintes funções em termos dos símbolos $z$ e $\bar{z}$:

(a) $f(z) = x^2 + y^2$

(b) $f(z) = x - 2y + 2 + (6x + y)i$

(c) $f(z) = x^2 - y^2 - (5xy)i$

(d) $f(z) = 3y^2 + (3x^2)\,i$

**33.** Neste problema examinamos algumas propriedades da função exponencial complexa:

(a) Se $z = x + iy$, mostre que $|e^z| = e^x$.

(b) Existe algum número complexo $z$ com a propriedade $e^z = 0$? [*Sugestão*: Use a parte (a).]

(c) Mostre que $f(z) = e^z$ é uma função periódica, com período puramente imaginário $2\pi i$. Ou seja, mostre que $e^{z+2\pi i} = e^z$, para todo número complexo $z$.

**34.** Use (3) para provar que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ para todo número complexo $z$.

**35.** O que pode ser dito sobre $z$ se $|e^{-z}| < 1$?

**36.** Seja $f(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,

(a) Mostre que $f$ é periódica, com período real $2\pi$.

(b) Suponha que $z$ seja real, isto é, $z = x + 0i$. Use (3) para reescrever $f(x + 0i)$. Que função real bem conhecida é obtida?

**37.** Determine o período de cada uma das funções a seguir:

(a) $f(z) = e^{z+\pi}$

(b) $f(z) = e^{\pi z}$

(c) $f(z) = e^{2iz}$

(d) $f(z) = e^{3z+i}$

**38.** Se $f(z)$ for uma função complexa com período puramente imaginário $i$, qual é o período da função $g(z) = f(iz - 2)$?

## 2.2 Funções Complexas como Transformações

Vale recordar que se $f$ for uma função de valor real de uma variável real, o gráfico de $f$ é uma curva no plano cartesiano. Nos cursos elementares, gráficos são largamente utilizados para investigar as propriedades de funções *reais*. No entanto, veremos que o gráfico de uma função *complexa* reside no espaço quadridimensional, de modo que não é possível usar gráficos para estudar funções complexas. Nesta seção discutiremos o conceito de uma *transformação complexa*,[2] desenvolvido pelo matemático alemão Bernhard Riemann para dar uma representação geométrica a uma função complexa. A idéia básica é a seguinte: toda função complexa descreve uma correspondência entre pontos em duas cópias do plano complexo. Especificamente, o ponto $z$ no plano $z$ é associado a um único ponto $w = f(z)$ no plano $w$. Usamos o termo alternativo **transformação complexa**, em vez de "função complexa", quando consideramos a função como essa correspondência entre pontos no plano $z$ e pontos no plano $w$. A representação geométrica de uma transformação complexa $w = f(z)$ consiste em duas figuras: a primeira é um subconjunto $S$ de pontos no plano $z$; a segunda, o conjunto $S'$ das imagens dos pontos em $S$ sob $w = f(z)$ no plano $w$.

[2] É igualmente comum o termo *mapeamento complexo*. (N.T.)

**Transformações** Uma ferramenta útil no estudo de funções reais no cálculo elementar é o gráfico da função. Se $y = f(x)$ for uma função de valor real de uma variável real $x$, o gráfico de $f$ é definido como o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano bidimensional. Uma definição análoga pode ser feita para funções complexas. No entanto, se $w = f(z)$ for uma função complexa, $z$ e $w$ residem no plano complexo. Por conseguinte, o conjunto de todos os pontos $(z, f(z))$ reside no espaço quadridimensional (duas dimensões da entrada $z$ e duas dimensões da saída $w$). É óbvio que um subconjunto do espaço quadridimensional não pode ser ilustrado com facilidade. Portanto,

*Não é possível desenhar o gráfico de uma função complexa.*

O conceito de uma transformação complexa provê uma forma alternativa para a representação geométrica de uma função complexa. Como descrito na introdução da seção, usamos o termo **transformação complexa** para designar a correspondência especificada por uma função complexa $w = f(z)$ entre pontos em um plano $z$ e imagens em um plano $w$. Se um ponto $z_0$ no plano $z$ corresponder ao ponto $w_0$ no plano $w$, ou seja, se $w_0 = f(z_0)$, dizemos que $f$ **transforma** ou **mapeia** $z_0$ em $w_0$ ou, de modo equivalente, que $z_0$ é **transformado** ou **mapeado** em $w_0$ por $f$.

Como um exemplo desse tipo de raciocínio geométrico, consideremos a função real $f(x) = x + 2$. Em vez de representar essa função por uma reta de inclinação 1 que cruza o eixo $y$ no ponto $(0, 2)$, consideremos que uma cópia da reta real (eixo $x$) é transformada em outra cópia da reta real (eixo $y$) por $f$. Cada ponto no eixo $x$ é transformado em um ponto a duas unidades à direita, no eixo $y$ (0 é transformado em 2, então 3 é transformado em 5, e assim por diante). Dessa forma, a função real $f(x) = x + 2$ pode ser vista como uma transformação que *translada* cada ponto na reta real para duas unidades à direita. Podemos visualizar a ação dessa transformação imaginando a reta real como uma barra rígida infinita que é deslocada duas unidades para a direita.

Para criar uma representação geométrica de uma transformação complexa iniciamos com duas cópias do plano complexo, o plano $z$ e o plano $w$, desenhadas uma ao lado da outra ou uma acima da outra. Uma transformação complexa é representada desenhando um conjunto $S$ de pontos no plano $z$ e o correspondente conjunto de imagens dos pontos em $S$ sob $f$ no plano $w$. Essa ideia é ilustrada na Figura 2.2.1, onde um conjunto $S$ no plano $z$ é representado em cinza na Figura 2.2.1(a) e um conjunto $S'$, que representa o conjunto de imagens dos pontos em $S$ sob $w = f(z)$, é representado em cinza na Figura 2.2.1(b). De aqui em diante, na discussão de transformações, adotaremos notação semelhante à da Figura 2.2.1.

## *Notação: $S'$*

*Se $w = f(z)$ for uma transformação complexa e se $S$ for um conjunto de pontos no plano $z$, denominamos o conjunto de imagens dos pontos em $S$ sob $f$ como* ***imagem de S sob f*** *e denotamos este conjunto pelo símbolo $S'$.**

Caso o conjunto $S$ tenha propriedades adicionais, como ser um domínio ou curva, usamos símbolos como $D$ e $D'$ ou $C$ e $C'$, respectivamente, para denotar o conjunto e sua imagem sob uma transformação complexa. A notação $f(C)$ também é usada para denotar a imagem de uma curva $C$ sob $w = f(z)$.

(a) Conjunto $S$ no plano $z$

(b) Imagem de $S$ no plano $w$

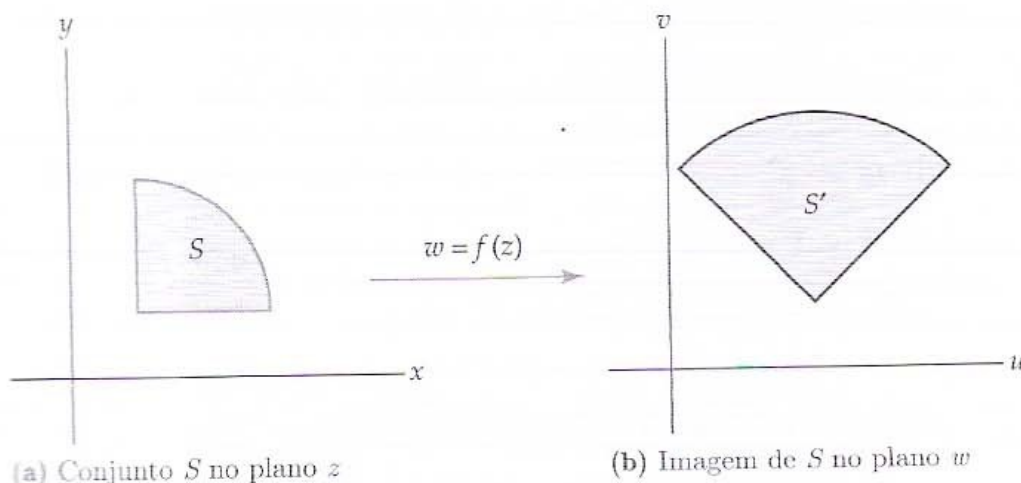



**Figura 2.2.1** Imagem de um conjunto $S$ sob uma transformação $w = f(z)$

*O conjunto $S$ é, às vezes, denominado **pré-imagem** de $S'$ sob $f$.

Uma ilustração como a Figura 2.2.1 é útil para transmitir informação a respeito da relação entre um ponto arbitrário $z$ e sua imagem $w = f(z)$. O conjunto $S$ deve, portanto, ser escolhido com um certo cuidado. Por exemplo, se $f$ for uma função cujos domínio e imagem sejam o conjunto de números complexos $\mathbf{C}$, a escolha $S = \mathbf{C}$ resultará em uma figura que consiste apenas em dois planos complexos. Essa escolha não ajudaria muito o entendimento de *como* pontos no plano $z$ são mapeados por $f$ em pontos no plano $w$.

---

**EXEMPLO 1 Imagem de um Semiplano sob $w = iz$**

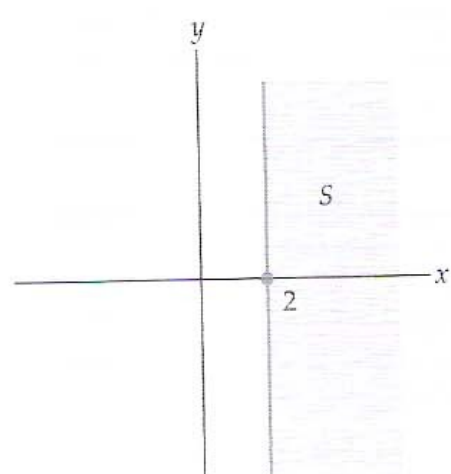
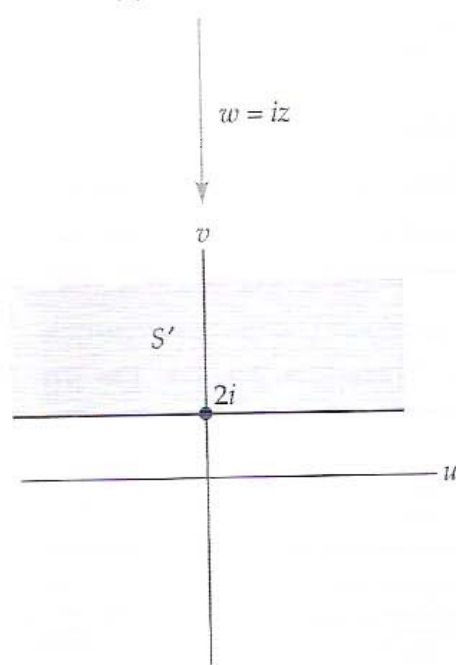
Determinemos a imagem do semiplano $\text{Re}(z) \geq 2$ sob a transformação complexa $w = iz$ e representemos a transformação graficamente.

(a) Semiplano $S$

(b) Imagem, $S'$, do semiplano $S$

**Figura 2.2.2** A transformação $w = iz$

**Solução** Seja $S$ o semiplano que consiste em todos os pontos $z$ com $\text{Re}(z) \geq 2$. Procedemos como ilustrado na Figura 2.2.1. Consideremos, primeiro, a reta vertical de fronteira de $S$, $x = 2$, mostrada em cinza na Figura 2.2.2(a). Para qualquer ponto $z$ nesta reta, temos $z = 2 + iy$, com $-\infty < y < \infty$. O valor de $f(z) = iz$ em um ponto nessa reta é $w = f(2 + iy) = i(2 + iy) = -y + 2i$. Como o conjunto de pontos $w = -y + 2i$, $-\infty < y < \infty$, é a reta $v = 2$ no plano $w$, concluímos que a reta vertical $x = 2$ no plano $z$ é mapeada na reta horizontal $v = 2$ no plano $w$ pela transformação $w = iz$. Por conseguinte, a reta vertical mostrada em cinza na Figura 2.2.2(a) é transformada na reta horizontal mostrada em preto na Figura 2.2.2(b).

Consideremos, agora, todo o semiplano $S$ mostrado em cinza na Figura 2.2.2(a). Este conjunto pode ser descrito pelas duas desigualdades simultâneas:

$$x \geq 2 \quad \text{e} \quad -\infty < y < \infty. \tag{1}$$

Para descrever a imagem de $S$, expressamos a transformação $w = iz$ em termos de suas partes real e imaginária $u$ e $v$; a seguir, usamos os limites impostos por (1) a $x$ e $y$ no plano complexo $z$ para determinar os limites sobre $u$ e $v$ no plano $w$. Substituindo o símbolo $z$ em $w = iz$ por $x + iy$, obtemos $w = i(x + iy) = -y + ix$, de modo que as partes real e imaginária de $w = iz$ são:

$$u = -y \quad \text{e} \quad v = x. \tag{2}$$

Depois de substituir as variáveis $x$ e $y$ em (1) usando as equações $x = v$ e $y = -u$ de (2), obtemos $v \geq 2$ e $-\infty < u < \infty$. Portanto, o conjunto $S'$, imagem de $S$ sob $w = iz$, consiste em todos os pontos $w = u + iv$ no plano $w$ que satisfazem as desigualdades simultâneas $v \geq 2$ e $-\infty < u < \infty$. Em palavras, o conjunto $S'$ consiste em todos os pontos no semiplano que estão na reta horizontal $v = 2$ ou acima dela. Essa imagem também pode ser descrita por apenas uma desigualdade: $\text{Im}(w) \geq 2$. Em resumo, o semiplano $\text{Re}(z) \geq 2$, mostrado em cinza na Figura 2.2.2(a), é mapeado pela transformação $w = iz$ no semiplano $\text{Im}(w) \geq 2$, mostrado em cinza na Figura 2.2.2(b). ❑

No Exemplo 1, tanto o conjunto $S$ como sua imagem $S'$ são semiplanos. Isso pode nos levar a crer que existe alguma forma geométrica simples de visualizar a imagem de outros conjuntos no plano complexo sob a transformação $w = iz$. (Na Seção 2.3, veremos que, de fato, existe.) Para a maioria das transformações, no entanto, a relação entre $S$ e $S'$ é mais complicada. O próximo exemplo ilustra isso.

---

**EXEMPLO 2 Imagem de uma Reta sob $w = z^2$**

Determinemos a imagem da reta vertical $x = 1$ sob a transformação complexa $w = z^2$ e representemos a transformação graficamente.

**Solução** Seja $C$ o conjunto de pontos na reta vertical $x = 1$ ou, de modo equivalente, o conjunto de pontos $z = 1 + iy$, com $-\infty < y < \infty$. Procederemos como no Exemplo 1. De (1) da Seção 2.1, as partes real e imaginária de $w = z^2$ são $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$, respectivamente. Para um ponto $z = 1 + iy$ em $C$, temos $u(x, y) = 1 - y^2$ e $v(x, y) = 2y$. Isso implica que a imagem de $S$ é o conjunto de pontos $w = u + iv$ que satisfazem as equações simultâneas:

$$u = 1 - y^2 \tag{3}$$

e

$$v = 2y \tag{4}$$

para $-\infty < y < \infty$. As equações (3) e (4) são *equações paramétricas* no parâmetro real $y$ e definem uma curva no plano $w$. Eliminando o parâmetro $y$, podemos determinar uma equação cartesiana em $u$ e $v$ para essa curva. Para isso, resolvemos (4) para $y$ e, a seguir, substituímos essa expressão em (3):

(a) Reta vertical Re(z) = 1

$$u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{4}. \tag{5}$$

Como $y$ pode assumir qualquer valor real e $v = 2y$, $v$ também pode assumir qualquer valor real em (5). Por conseguinte, $C'$ — imagem de $C$ — é uma parábola no plano $w$, com vértice em $(1, 0)$ e que corta o eixo $v$ em $(0, \pm 2)$, como indicado na Figura 2.2.3(b). Concluindo, mostramos que a reta vertical $x = 1$, mostrada em cinza na Figura 2.2.3(a), é mapeada na parábola $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$, mostrada em preto na Figura 2.2.3(b), pela transformação complexa $w = z^2$. ❑

(b) A imagem de C é a parábola $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$

Figura 2.2.3 Transformação $w = z^2$

Ao contrário da Figura 2.2.2, a representação da transformação $w = z^2$ mostrada na Figura 2.2.3 pouco diz a respeito das imagens que outros conjuntos no plano podem ter. A transformação por esta "função quadrática complexa" será analisada em detalhe na Seção 2.4.

**Curvas Paramétricas no Plano Complexo** Para uma função complexa simples, a forma em que o plano complexo é mapeado pode se tornar evidente após uma análise da imagem de um único conjunto; contudo, para a maioria das funções um entendimento da transformação é alcançado apenas após o exame das imagens de diversos conjuntos. Muitas vezes adquirimos um bom entendimento de uma transformação complexa por meio da análise de imagens de *curvas* (subconjuntos unidimensionais do plano complexo), e esse processo é simplificado com o uso de equações paramétricas.

Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem funções de valores reais da variável real $t$, o conjunto $C$ de todos os pontos $(x(t), y(t))$, com $a \le t \le b$, é denominado **curva paramétrica**. As equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, com $a \le t \le b$, são denominadas **equações paramétricas** de $C$. Uma curva paramétrica pode ser considerada como residindo no plano complexo se admitirmos que $x$ e $y$ representam, respectivamente, as partes real e imaginária de um ponto no plano complexo. Em outras palavras, se $x = x(t)$, $y = y(t)$, com $a \le t \le b$, forem equações paramétricas de uma curva $C$ no plano cartesiano, a equação $z(t) = x(t) + iy(t)$, com $a \le t \le b$, é uma descrição da curva $C$ no plano complexo. Por exemplo, consideremos as equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\ t$, $0 \le t \le 2\pi$, de uma curva $C$ no plano $xy$ (a curva $C$ é uma circunferência com centro $(0, 0)$ e raio 1). A equação $z(t) = \cos t + i\ \text{sen}\ t$, $0 \le t \le 2\pi$, descreve a mesma curva $C$ no plano complexo. Se, digamos, $t = \pi/2$, esta equação diz que o ponto $(\cos\frac{\pi}{2}, \text{sen}\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ está na curva $C$ no plano cartesiano, enquanto o ponto $z(\pi/2) = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = i$ representa este ponto em $C$ no plano complexo. Essa discussão é resumida na definição a seguir:

Parametrização $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t$ uma variável real.

**Definição 2.2.1 Curvas Paramétricas no Plano Complexo**

Se $x(t)$ e $y(t)$ forem funções de valores reais da variável real $t$, o conjunto $C$ que consiste em todos os pontos $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, é denominado uma **curva paramétrica** ou uma **curva paramétrica complexa**. A função de valor complexo da variável real $t$, $z(y) = x(t) + iy(t)$, é denominada **parametrização** de $C$.

Propriedades de curvas no plano cartesiano, como continuidade, diferenciabilidade, suavidade, simplicidade e fechamento, podem todas ser reformuladas como propriedades de curvas no plano complexo. Essas propriedades são importantes no estudo de integrais complexas e serão discutidas no Capítulo 5.

Os dois tipos mais elementares de curvas no plano complexo são retas e círculos. A parametrização dessas curvas no plano complexo pode ser obtida das correspondentes parametrizações no plano cartesiano. As parametrizações também podem ser deduzidas diretamente fazendo uso da geometria no plano complexo. Por exemplo, suponhamos que desejemos determinar a parametrização da reta no plano complexo

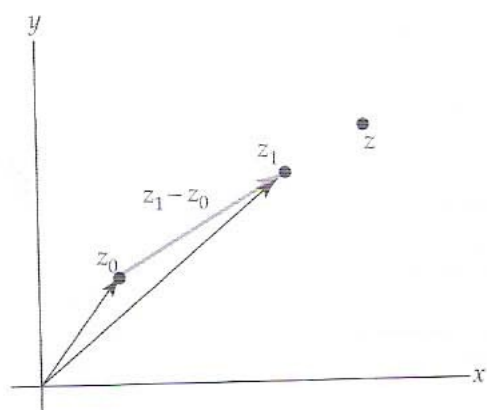



**Figura 2.2.4** Parametrização de uma reta

Estas não são as únicas parametrizações possíveis (Problema 28 do Conjunto de Exercícios 2.2)!

que contém os pontos $z_0$ e $z_1$. Sabemos, do Capítulo 1, que $z_1 - z_0$ representa o vetor com origem em $z_0$ e extremidade em $z_1$, mostrado em cinza na Figura 2.2.4. Se $z$ for um ponto qualquer na reta que contém $z_0$ e $z_1$, um exame da Figura 2.2.4 indica que o vetor $z - z_0$ é um múltiplo real de $z_1 - z_0$. Por conseguinte, se $z$ estiver na reta que contém $z_0$ e $z_1$, existe um número real $t$ tal que $z - z_0 = t(z_1 - z_0)$. Resolvendo esta equação para $z$, obtemos a parametrização da reta $z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = z_0(1 - t) + z_1t$, $-\infty < t < \infty$. Vale notar que se restringirmos o parâmetro $t$ ao intervalo $[0, 1]$, o ponto $z(t)$ variará de $z_0$ a $z_1$, o que corresponde à parametrização do segmento de reta de $z_0$ a $z_1$. Se restringirmos $t$ ao intervalo $[0, \infty)$, obtemos uma parametrização do raio que emana de $z_0$ e contém $z_1$. Essas parametrizações são incluídas no sumário que se segue.

## *Curvas Paramétricas Frequentes no Plano Complexo*

***Reta***
*Uma parametrização da reta que contém os pontos $z_0$ e $z_1$ é:*

$$z(t) = z_0(1-t) + z_1t, \quad -\infty < t < \infty. \tag{6}$$

***Segmento de Reta***
*Uma parametrização do segmento de reta de $z_0$ a $z_1$ é:*

$$z(t) = z_0(1-t) + z_1t, \quad 0 \le t \le 1. \tag{7}$$

***Raio***
*Uma parametrização do raio que emana de $z_0$ e contém $z_1$ é:*

$$z(t) = z_0(1-t) + z_1t, \quad 0 \le t < \infty. \tag{8}$$

***Circunferência***
*Uma parametrização da circunferência com centro $z_0$ e raio $r$ é:*

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{9}$$

*Em notação exponencial, esta parametrização é:*

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{10}$$

A restrição dos valores do parâmetro $t$ em (9) ou (10) fornece parametrizações de arcos de circunferência. Por exemplo, fixando $z_0 = 0$ e $r = 1$ em (10), vemos que $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$ é uma parametrização do arco semicircular da circunferência unitária centrada na origem e posicionado no semiplano superior $\operatorname{Im}(z) \ge 0$.

Curvas paramétricas são importantes no estudo de transformações complexas, pois é simples determinar uma parametrização da imagem de uma curva paramétrica. Por exemplo, se $w = iz$ e $C$ for a reta $x = 2$, dada por $z(t) = 2 + it$, $-\infty < t < \infty$, o valor de $f(z) = iz$ em um ponto nesta reta é $w = f(2 + it) = i(2 + it) = -t + 2i$, de modo que a imagem de $z(t)$ é $w(t) = -t + 2i$. Ou seja, $w(t) = -t + 2i$, $-\infty < t < \infty$ é uma parametrização da imagem $C'$. Por conseguinte, $C'$ é a reta $v = 2$. Em resumo, usamos o seguinte procedimento para determinar as imagens de curvas sob uma transformação complexa:

## *Imagem de uma Curva Paramétrica sob uma Transformação Complexa*

*Se $w = f(z)$ for uma transformação complexa e se $C$ for uma curva parametrizada por $z(t)$, $a \le t \le b$, então*

$$w(t) = f(z(t)), \quad a \le t \le b \tag{11}$$

*é uma parametrização da imagem $C'$ de $C$ sob $w = f(z)$.*

Em alguns casos é conveniente representar uma transformação complexa usando uma única cópia do plano complexo. Para isso, superpomos o plano $w$ ao plano $z$, de modo que os eixos real e imaginário do

duas cópias coincidam. Já que uma figura como esta representa simultaneamente os planos $z$ e $w$, omitimos a identificação $x$, $y$, $u$ e $v$ dos eixos. Por exemplo, se desenharmos o semiplano $S$ e a imagem $S'$ do Exemplo 1 na mesma cópia do plano complexo, vemos que o semiplano $S'$ pode ser obtido por meio da rotação do semiplano $S$ de um ângulo $\pi/2$ radianos, no sentido trigonométrico, em torno da origem. No caso da transformação $w = iz$, esta observação será comprovada na Seção 2.3. Nos exemplos a seguir, representamos uma transformação complexa usando uma única cópia do plano complexo.

---

**EXEMPLO 3 Imagem de uma Curva Paramétrica**

Usemos (11) para determinar a imagem do segmento de reta de 1 a $i$ sob a transformação complexa $w = \overline{iz}$.

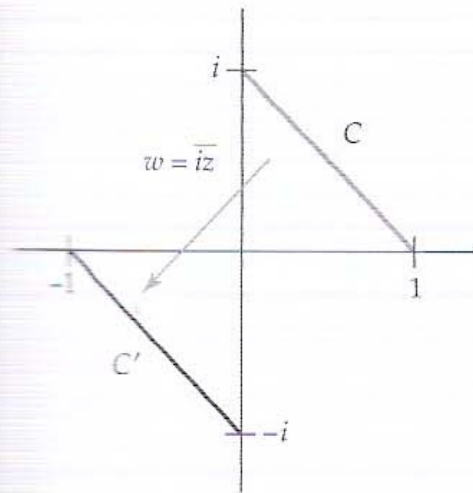



Figura 2.2.5 Transformação $w = \overline{iz}$

**Solução** Sejam $C$ o segmento de reta de 1 a $i$ e $C'$ sua imagem sob $f(z) = \overline{iz}$. Fazendo $z_0 = 1$ e $z_1 = i$ em (7), obtemos uma parametrização $z(t) = 1 - t + it$, $0 \leq t \leq 1$, de $C$. A imagem $C'$ é, portanto, dada por (11):

$$w(t) = f(z(t)) = \overline{i(1 - t + it)} = -i(1 - t) - t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Fazendo $z_0 = -i$ e $z_1 = -1$ em (7), vemos que $w(t)$ é uma parametrização do segmento de reta de $-i$ a $-1$. Portanto, $C'$ é o segmento de reta de $-i$ a $-1$. Esta transformação é ilustrada na Figura 2.2.5 com uma única cópia do plano complexo. Na Figura 2.2.5 o segmento de reta mostrado em cinza é mapeado, por $w = \overline{iz}$, no segmento de reta em preto. ❑

---

**EXEMPLO 4 Imagem de uma Curva Paramétrica**

Determinemos a imagem da semicircunferência mostrada em cinza na Figura 2.2.6 sob a transformação complexa $w = z^2$.

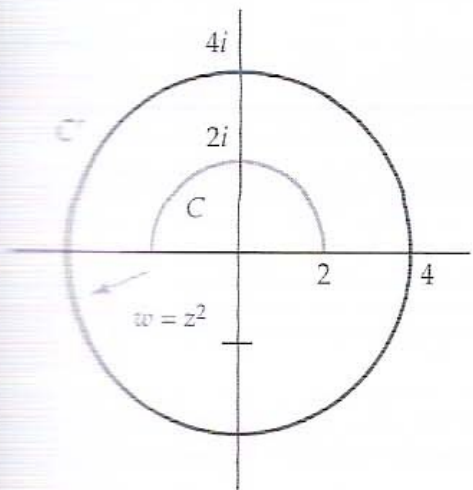



Figura 2.2.6 Transformação $w = z^2$

**Solução** Sejam $C$ a semicircunferência mostrada na Figura 2.2.6 e $C'$ sua imagem sob $f(z) = z^2$. Procedemos como no Exemplo 3. Fazendo $z_0 = 0$ e $r = 2$ em (10), obtemos a seguinte parametrização de $C$:

$$z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Logo, de (11), temos que

$$w(t) = f(z(t)) = \left(2e^{it}\right)^2 = 4e^{2it}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \tag{12}$$

é uma parametrização de $C'$. Se fizermos $t = \frac{1}{2}s$ em (12), obtemos uma nova parametrização de $C'$:

$$W(s) = 4e^{is}, \; 0 \leq s \leq 2\pi. \tag{13}$$

De (10), com $z_0 = 0$ e $r = 4$, vemos que (13) define uma circunferência com centro 0 e raio 4. Por conseguinte, a imagem $C'$ é a circunferência $|w| = 4$. Representamos esta transformação na Figura 2.2.6, onde a semicircunferência mostrada em cinza é mapeada, por $w = z^2$, na circunferência mostrada em preto. ❑

**Uso de Computadores** Sistemas algébricos computacionais, como *Maple* e *Mathematica*, efetuam operações algébricas corriqueiras com números complexos. Esta capacidade, aliada à de desenhar gráficos de curvas paramétricas, torna esses sistemas excelentes ferramentas para explorar as propriedades de transformações complexas. Em *Mathematica*, por exemplo, uma função complexa pode ser definida com o uso do comando

f[z_] := *uma expressão em z*.

Uma parametrização complexa pode ser definida de modo similar, pelo comando

g[t_] := *uma expressão em z*.

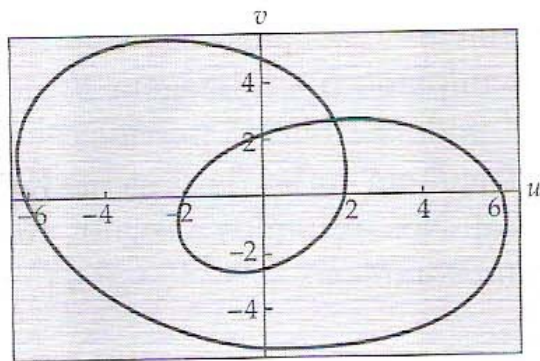



**Figura 2.2.7** Imagem de uma circunferência sob $w = z^2 + iz - \text{Re}(z)$

De (11), temos que **w[t_]:= f[g[t]]** é uma parametrização da imagem da curva. O gráfico da imagem pode ser desenhado com uso do comando para gráfico parametrizado (*parametric plot*):

**ParametricPlot[ {Re[w[t]], Im[w[t]]}, {t, a, b}]**

onde **a** e **b** são os limites superior e inferior de **t**, respectivamente. Por exemplo, *Mathematica* foi usado para produzir a Figura 2.2.7, que mostra a imagem da circunferência $|z| = 2$ sob a transformação complexa $w = z^2 + iz - \text{Re}(z)$.

**Observações** ***Comparação com Análise Real***

(*i*) Nesta seção discutimos uma importante diferença entre análises real e complexa: não é possível desenhar o gráfico de uma função complexa. Em vez de usar um gráfico, representamos uma função complexa por meio de duas figuras: a primeira descreve um subconjunto $S$ no plano complexo, e a segunda, a imagem $S'$ do conjunto $S$ sob uma transformação complexa. Um completo entendimento de uma transformação complexa é obtido quando compreendemos a relação entre *qualquer* conjunto $S$ e sua imagem $S'$.

(*ii*) Transformações complexas são intimamente relacionadas a curvas paramétricas no plano. Em seções posteriores usaremos essa relação para nos ajudar a visualizar as noções de limite, continuidade e diferenciabilidade de funções complexas. Curvas paramétricas são de fundamental importância no estudo de integrais complexas, assim como o são no estudo de integrais de linha reais.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.2 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–8, proceda como no Exemplo 1 ou do Exemplo 2 e determine a imagem $S'$ do conjunto $S$ sob a transformação complexa $w = f(z)$ dada.

**1.** $f(z) = i\bar{z}$; $S$ é a reta horizontal $y = 3$

**2.** $f(z) = \bar{z}$; $S$ é a reta $y = x$

**3.** $f(z) = 3z$; $S$ é o semiplano $\text{Im}(z) > 2$

**4.** $f(z) = 3iz$; $S$ é a fita infinita $2 \leq \text{Re}(z) \leq 3$

**5.** $f(z) = (1 + i)z$; $S$ é reta vertical $x = 2$

**6.** $f(z) = (1 - i)z$; $S$ é reta $y = 2x + 1$

**7.** $f(z) = iz + 4$; $S$ é o semiplano $\text{Im}(z) \leq 1$

**8.** $f(z) = iz + \bar{z}$; $S$ é a reta vertical $x = 3$

Nos Problemas 9–14, determine a imagem da reta dada sob a transformação complexa $w = z^2$.

**9.** $y = 1$

**10.** $x = -3$

**11.** $x = 0$

**12.** $y = 0$

**13.** $y = x$

**14.** $y = -x$

Nos Problemas 15–20, (**a**) desenhe a curva paramétrica $C$ dada por $z(t)$ e descreva a curva em palavras, (**b**) determine uma parametrização da imagem $C'$ de $C$ sob a transformação complexa dada $w = f(z)$ e (**c**) desenhe $C'$ e descreva esta curva em palavras.

**15.** $z(t) = 2(1 - t) + it, 0 \leq t \leq 1$; $f(z) = 3z$

**16.** $z(t) = i(1 - t) + (1 + i)t$, $0 \leq t < \infty$; $f(z) = -z$

**17.** $z(t) = 1 + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $f(z) = z + 1 - i$

**18.** $z(t) = i + e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$; $f(z) = (z - i)^2$

**19.** $z(t) = t,\ 0 \leq t \leq 2;\ f(z) = e^{i\pi z}$

**20.** $z(t) = 4e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi,\ f(z) = \text{Re}(z)$

Nos Problemas 21–26, use parametrização para determinar a imagem $C'$ da curva $C$ sob a transformação complexa dada $w = f(z)$.

**21.** $f(z) = z^3$; $C$ é o eixo imaginário positivo

**22.** $f(z) = iz$; $C$ é a circunferência $|z - 1| = 2$

**23.** $f(z) = 1/z$; $C$ é a circunferência $|z| = 2$

**24.** $f(z) = 1/z$, $C$ é o segmento de reta de $1 - i$ a $2 - 2i$

**25.** $f(z) = z + \bar{z}$; $C$ é a semicircunferência da circunferência $|z| = 1$ que reside no semiplano superior $\text{Im}(z) \geq 0$

**26.** $f(z) = e^z$; $C$ é o raio que emana da origem e contém $2 + \sqrt{3}i$

## Foco em Conceitos

**27.** Neste problema, determine a imagem da reta $x = 1$ sob a transformação complexa $w = 1/z$.

(**a**) A reta $x = 1$ consiste em todos os pontos $z = 1 + iy$, com $-\infty < y < \infty$. Determine as partes real e imaginária $u$ e $v$ de $f(z) = 1/z$ no ponto $z = 1 + iy$ nesta reta.

(**b**) Para as funções $u$ e $v$ da parte (a), mostre que $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$.

(**c**) Com base na parte (b), descreva a imagem da reta $x = 1$ sob a transformação complexa $w = 1/z$.

(**d**) Existe algum ponto na reta $x = 1$ que seja mapeado em 0? Você deseja alterar sua descrição da imagem na parte (c)?

**28.** Considere a parametrização $z(t) = i(1 - t) + 3t,\ 0 \leq t \leq 1$.

(**a**) Descreva esta curva paramétrica em palavras.

(**b**) Qual é a diferença entre a curva na parte (a) e a curva definida pela parametrização $z(t) = 3(1 - t) + it$, $0 \leq t \leq 1$?

(**c**) Qual é a diferença entre a curva na parte (a) e a curva definida pela parametrização $z(t) = \frac{3}{2}t + i(1 - \frac{1}{2}t)$, $0 \leq t \leq 2$?

(**d**) Determine uma parametrização do segmento de reta de $1 + 2i$ a $2 + i$, onde o parâmetro satisfaz $0 \leq t \leq 3$.

**29.** Use parametrizações para determinar a imagem da circunferência $|z - z_0| = R$ sob a transformação $f(z) = iz - 2$.

**30.** Considere a reta $y = mx + b$ no plano complexo.

(**a**) Dê uma parametrização $z(t)$ para a reta.

(**b**) Descreva, em palavras, a imagem da reta sob a transformação complexa $w = z + 2 - 3i$.

(**c**) Descreva, em palavras, a imagem da reta sob a transformação complexa $w = 3z$.

**31.** A transformação complexa $w = \bar{z}$ é denominada **reflexão** em relação ao eixo real. Explique por quê.

**32.** Seja $f(z) = az$, onde $a$ é uma constante complexa e $|a| = 1$.

(**a**) Mostre que $|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|$ para quaisquer números complexos $z_1$ e $z_2$.

(**b**) Dê uma interpretação geométrica ao resultado da parte (a).

(**c**) O que sua resposta à parte (b) diz sobre a imagem de uma circunferência sob a transformação complexa $w = az$?

**33.** Este problema investiga o efeito da transformação $w = az$, onde $a$ é uma constante complexa e $a \neq 0$, sobre ângulos entre raios que emanam da origem.

(**a**) Seja $C$ um raio no plano complexo que emana da origem. Use parametrizações para mostrar que a imagem $C'$ de $C$ sob $w = az$ também é um raio que emana da origem.

(**b**) Considere dois raios $C_1$ e $C_2$ que emanam da origem, tais que $C_1$ contém o ponto $z_1 = a_1 + ib_1$ e $C_2$ contém o ponto $z_2 = a_2 + ib_2$. No cálculo de múltiplas variáveis, você deve ter visto que o ângulo $\theta$ entre os raios $C_1$ e $C_2$ (que é igual ao ângulo entre os vetores de posição $(a_1, b_1)$ e $(a_2, b_2)$) é dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right) = \arccos\left(\frac{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2}{2\,|z_1|\,|z_2|}\right). \tag{14}$$

Sejam $C_1'$ e $C_2'$ as imagens de $C_1$ e $C_2$ sob $w = az$. Use a parte (a) e (14) para mostrar que o ângulo entre $C_1'$ e $C_2'$ é igual ao ângulo entre $C_1$ e $C_2$.

**34.** Considere a transformação complexa $w = z^2$.

(a) Repita o Problema 33(a) para a transformação $w = z^2$.

(b) Experimente raios diferentes. Que efeito a transformação complexa $w = az$ parece ter sobre o ângulo entre raios que emanam da origem?

### Tarefas para o Laboratório de Computação

Nos Problemas 35–38, use um SAC para (**a**) desenhar o gráfico da imagem da circunferência unitária sob a transformação complexa dada $w = f(z)$ e (**b**) desenhar o gráfico da imagem do segmento de reta de 1 a $1 + i$ sob a transformação complexa dada $w = f(z)$.

**35.** $f(z) = z^2 + (1 + i)z - 3$

**36.** $f(z) = iz^3 + z - i$

**37.** $f(z) = z^4 - z$

**38.** $f(z) = z^3 - \bar{z}$

## 2.3 Transformações Lineares

Recordemos que uma função real da forma $f(x) = ax + b$, onde $a$ e $b$ são constantes *reais* quaisquer, é denominada função linear. Dada a similaridade entre as análises real e complexa, definimos uma **função complexa linear** como uma função da forma $f(z) = az + b$, onde $a$ e $b$ são constantes *complexas* quaisquer. Assim como as funções reais lineares são as funções reais de mais simples representação por gráficos, as funções complexas lineares são as funções complexas de mais simples visualização como transformações no plano complexo. Nesta seção mostraremos que toda transformação linear complexa não constante pode ser descrita como uma composição de três tipos básicos de movimentos: translação, rotação e dilatação.

Antes de examinarmos uma transformação linear complexa genérica $f(z) = az + b$, investigaremos três tipos especiais de transformações lineares denominados translação, rotação e dilatação. Ao longo desta seção, usaremos os símbolos $T$, $R$ e $M$ para representar transformações de translação, rotação e dilatação, respectivamente.[3]

**Translações** Uma função complexa linear

$$T(z) = z + b, \quad b \neq 0, \tag{1}$$

é denominada **translação.** Se, em (1), fixarmos $z = x + iy$ e $b = x_0 + iy_0$, obtemos

$$T(z) = (x + iy) + (x_0 + iy_0) = x + x_0 + i(y + y_0).$$

**Figura 2.3.1** Translação

Logo, a imagem do ponto $(x, y)$ sob $T$ é o ponto $(x + x_0, y + y_0)$. Da Figura 2.3.1, vemos que, se posicionarmos $(x, y)$ e $(x + x_0, y + y_0)$ na mesma cópia do plano complexo, o vetor com origem em $(x, y)$ e extremidade em $(x + x_0, y + y_0)$ é $(x_0, y_0)$; de modo equivalente, se posicionarmos $z$ e $T(z)$ na mesma cópia do plano complexo, o vetor com origem em $z$ e extremidade em $T(z)$ é $(x_0, y_0)$. Por conseguinte, a transformação linear $T(z) = z + b$ pode ser visualizada, em uma única cópia do plano complexo, como o processo de *transladar* o ponto $z$ ao longo do vetor $(x_0, y_0)$ até o ponto $T(z)$. Como $(x_0, y_0)$ é a representação vetorial do número complexo $b$, a transformação $T(z) = z + b$ também é denominada *translação por b*.

**EXEMPLO 1 Imagem de um Quadrado sob Translação**

Determinemos a imagem $S'$ do quadrado $S$, com vértices em $1 + i$, $2 + i$, $2 + 2i$ e $1 + 2i$, sob a transformação linear $T(z) = z + 2 - i$.

[3] A dilatação é também denominada *mudança de escala* ou *escala*. Por conveniência, foi mantido o símbolo $M$ para designar esta transformação linear. (N.T.)

Figura 2.3.2 Imagem de um quadrado sob uma translação

**Solução** Representaremos $S$ e $S'$ na mesma cópia do plano complexo. A transformação $T$ é uma translação; logo, $S'$ pode ser determinado da seguinte forma:

Em (1), substituímos $b = 2 + i(-1)$ e desenhamos o vetor $(2, -1)$, com origem em cada ponto em $S$ (Figura 2.3.2). O conjunto de pontos terminais desses vetores é $S'$, imagem de $S$ sob $T$. Um exame da Figura 2.3.2 indica que $S'$ é um quadrado com vértices em:

$$T(1+i) = (1+i) + (2-i) = 3 \qquad T(2+i) = (2+i) + (2-i) = 4$$
$$T(2+2i) = (2+2i) + (2-i) = 4+i \quad T(1+2i) = (1+2i) + (2-i) = 3+i.$$

Por conseguinte, o quadrado $S$ mostrado em cinza na Figura 2.3.2 é mapeado, pela translação $T(z) = z + 2 - i$, no quadrado $S'$ mostrado em preto. ❑

Dessa descrição geométrica, vemos que uma translação não altera a forma ou as dimensões de uma figura no plano complexo. Ou seja, a imagem de uma reta, circunferência ou triângulo sob uma translação será uma reta, circunferência ou triângulo respectivamente (Problemas 23 e 24 do Conjunto de Exercícios 2.3). Uma transformação com esta propriedade, às vezes, é denominada *deslocamento rígido*.

**Rotação** Uma função complexa linear

$$R(z) = az, \quad |a| = 1, \tag{2}$$

é denominada **rotação**. Embora possa parecer que a exigência $|a| = 1$ seja uma restrição importante em (2), não é. Tenhamos em mente que a constante $a$ em (2) é uma constante complexa. Se $\alpha$ for um número complexo não nulo qualquer, $a = \alpha/|\alpha|$ é um número complexo com $|a| = 1$. Portanto, para qualquer número complexo não nulo $\alpha$, $R(z) = \dfrac{\alpha}{|\alpha|}z$ é uma rotação.

Consideremos a rotação $R$ dada em (2) e, por ora, admitamos que $\text{Arg}(a) > 0$. Como $|a| = 1$ e $\text{Arg}(a) > 0$, podemos escrever $a$ na forma exponencial como $a = e^{i\theta}$, com $0 < \theta \leq \pi$. Se, em (2), usarmos $a = e^{i\theta}$ e $z = re^{i\theta}$, a propriedade (6) da Seção 2.1 nos permite obter a seguinte descrição de $R$:

$$R(z) = e^{i\theta}re^{i\phi} = re^{i(\theta+\phi)}. \tag{3}$$

Figura 2.3.3 Rotação

De (3), vemos que o módulo de $R(z)$ é $r$, igual ao módulo de $z$. Por conseguinte, se $z$ e $R(z)$ forem posicionados na mesma cópia do plano complexo, os dois pontos estarão na circunferência com centro 0 e raio $r$ (Figura 2.3.3). De (3), observemos, também, que um argumento de $R(z)$ é $\theta + \phi$; este valor é $\theta$ radianos maior que o argumento de $z$. Portanto, a transformação linear $R(z) = az$ pode ser visualizada em uma única cópia do plano complexo como o processo de aplicar ao ponto $z$ uma *rotação* de um ângulo $\theta$ (radianos) em torno da origem, no sentido trigonométrico, até o ponto $R(z)$ (Figura 2.3.3). De modo similar, se $\text{Arg}(a) < 0$, a transformação linear $R(z) = az$ pode ser visualizada em uma única cópia do plano complexo como o processo de aplicar aos pontos uma rotação de um ângulo $\theta$ (radianos) em torno da origem, no sentido *horário*. Por essa razão, o ângulo $\theta = \text{Arg}(a)$ é denominado **ângulo de rotação** de $R$.

---

EXEMPLO 2 **Imagem de uma Reta sob Rotação**

Figura 2.3.4 Imagem de uma reta sob rotação

Determinemos a imagem do eixo real $y = 0$ sob a transformação linear

$$R(z) = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right)z.$$

**Solução** Sejam $C$ o eixo real $y = 0$ e $C'$ a imagem de $C$ sob $R$. Como $\left|\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right| = 1$, a transformação complexa $R(z)$ é uma rotação. Para determinar o ângulo de rotação, escrevemos a transformação complexa $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$ na forma exponencial $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i = e^{i\pi/4}$. Se $z$ e $R(z)$ forem posicionados na mesma cópia do plano complexo, o ponto $z$ é girado de $\pi/4$ radianos em torno da origem, no sentido trigonométrico, até ao ponto $R(z)$. A imagem $C'$ é, portanto, a reta $v = u$ que contém a origem e faz um ângulo de $\pi/4$ radianos

com o eixo real. Esta transformação é ilustrada, em uma única cópia do plano complexo, na Figura 2.3.4, onde o eixo real, mostrado em cinza, é mapeado na reta preta por $R(z) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right) z$. ☐

Como no caso de translações, rotações são deslocamentos rígidos e não alteram a forma ou dimensões de uma figura no plano complexo. Portanto, sob rotação, a imagem de uma reta, circunferência ou triângulo também será uma reta, circunferência ou triângulo, respectivamente.

**Dilatação** O último tipo especial de função linear que consideramos é a mudança de escala. Uma função complexa linear

$$M(z) = az, \; a > 0, \tag{4}$$

é denominada **dilatação**. Recordemos das Observações ao final do Seção 1.1 que, como não existe o conceito de ordem no sistema de números complexos, fica implícito na desigualdade $a > 0$ que o símbolo $a$ representa um número real. Logo, se $z = x + iy$, $M(z) = az = ax + iay$, de modo que a imagem de um ponto $(x, y)$ é o ponto $(ax, ay)$. Usando a forma exponencial $z = re^{i\theta}$ de $z$, também podemos expressar a função em (4) como

$$M(z) = a\left(re^{i\theta}\right) = (ar)\, e^{i\theta}. \tag{5}$$

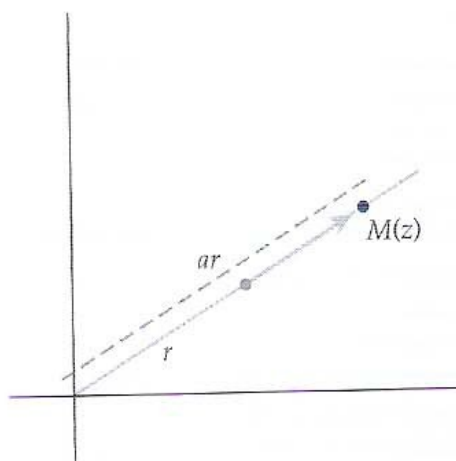



Figura 2.3.5 Dilatação

O produto $ar$ em (5) é um número real positivo, pois $a$ e $r$ são números reais positivos; disso resulta que o módulo de $M(z)$ é $ar$. Assumamos que $ar > 1$. De (5), temos que os pontos complexos $z$ e $M(z)$ têm o mesmo argumento $\theta$ e módulos diferentes, $r < ar$. Se posicionarmos os pontos $z$ e $M(z)$ na mesma cópia do plano complexo, $M(z)$ é o ponto único no raio que emana da origem e contém $z$ que dista $ar$ de 0. Como $a > 1$, $M(z)$ é $a$ vezes mais distante da origem que $z$. Assim, a transformação linear $M(z) = az$ pode ser visualizada, na mesma cópia do plano complexo onde está $z$, como o processo de *dilatar* o módulo do ponto $z$ por um fator $a$ para obter o ponto $M(z)$. Veja a Figura 2.3.5 O número real $a$ é denominado **fator de dilatação** ou **fator de escala** de $M$. Se $0 < a < 1$, o ponto $M(z)$ está $a$ vezes mais próximo da origem que o ponto $z$. Este caso especial da mudança de escala é denominado **contração**.

---

**EXEMPLO 3 Imagem de um Círculo sob Dilatação**

Determinemos a imagem da circunferência $C$ dada por $|z| = 2$ sob a transformação linear $M(z) = 3z$.

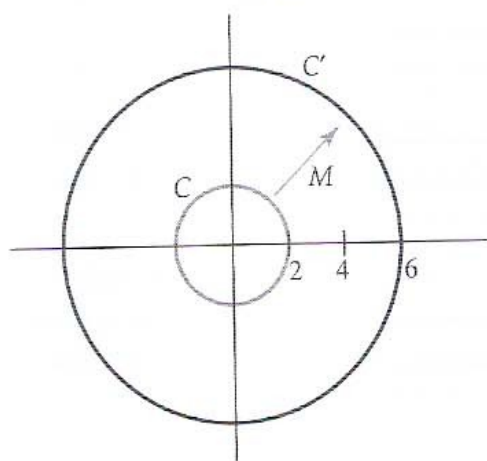



Figura 2.3.6 Imagem de uma circunferência sob dilatação

**Solução** Como $M$ é uma dilatação com fator de escala 3, cada ponto na circunferência $|z| = 2$ será mapeado em um ponto com o mesmo argumento e módulo multiplicado por 3. Portanto, cada ponto na imagem terá modulo $3 \cdot 2 = 6$. Os pontos na imagem podem ter argumentos quaisquer, pois os pontos $z$ na circunferência $|z| = 2$ podem ter argumentos arbitrários. Em consequência, a imagem $C'$ é a circunferência $|w| = 6$ com centro na origem e raio 6. Na Figura 2.3.6, esta transformação é ilustrada em uma única cópia do plano complexo. Sob a transformação $M(z) = 3z$, a circunferência $C$, mostrada em cinza na Figura 2.3.6, é mapeada na circunferência $C'$, mostrada em preto na mesma figura. ☐

Embora uma transformação de dilatação altere as dimensões de uma figura no plano complexo, não altera a forma básica da mesma. Por exemplo, a imagem de um triângulo $S$ sob a dilatação $M(z) = az$ também é um triângulo $S'$. Como os comprimentos dos lados de $S'$ são $a$ vezes maiores que os correspondentes lados de $S$, os triângulos $S$ e $S'$ são semelhantes.

**Transformações Lineares** Agora, estamos prontos para mostrar que uma transformação linear genérica $f(z) = az + b$ é uma composição de uma rotação, uma dilatação e uma translação. Recordemos que se $f$ e $g$ forem duas funções, a *composição* de $f$ e $g$ é a função $f \circ g$ definida como $f \circ g(z) = f(g(z))$. Para determinar o valor $w = f \circ g(z)$, primeiro, avaliamos a função $g$ em $z$ e, a seguir, a função $f$ em $g(z)$. De modo similar, para determinar a imagem $S''$ do conjunto $S$ sob uma composição $w = f \circ g(z)$, primeiro avaliamos a imagem $S'$ de $S$ sob $g$ e, então, a imagem $S''$ de $S'$ sob $f$.

Suponhamos, agora, que $f(z) = az + b$ seja uma função linear complexa. Assumamos que $a \neq 0$; caso contrário, a transformação seria a **transformação constante** $f(z) = b$, que mapeia qualquer ponto no plano complexo no único ponto $b$. Vale notar que podemos expressar $f$ como:

$$f(z) = az + b = |a| \left( \frac{a}{|a|} z \right) + b. \tag{6}$$

Investiguemos, passo a passo, o que acontece a um ponto $z_0$ sob a composição em (6). Primeiro, $z_0$ é multiplicado pelo número complexo $a/|a|$. Como $\left| \frac{a}{|a|} \right| = \frac{|a|}{|a|} = 1$, a transformação complexa $w = \frac{a}{|a|} z$ é uma rotação que gira o ponto $z_0$ de um ângulo $\theta = \operatorname{Arg}\left( \frac{a}{|a|} \right)$ radianos em torno da origem. O ângulo de rotação também pode ser escrito como $\theta = \operatorname{Arg}(a)$, pois $1/|a|$ é um número real. Seja $z_1$ a imagem de $z_0$ sob a rotação por $\operatorname{Arg}(a)$. O próximo passo em (6) consiste em multiplicar $z_1$ por $|a|$. Como $|a| > 0$ é um número real, a transformação complexa $w = |a|z$ é uma dilatação com fator de escala $|a|$. Agora, seja $z_2$ a imagem de $z_1$ sob a dilatação por $|a|$. O último passo na transformação linear em (6) consiste em somar $b$ a $z_2$. A transformação complexa $w = z + b$ translada $z_2$ de $b$ até o ponto $w_0 = f(z_0)$. A seguir, resumimos essa descrição de uma transformação linear.

## *Imagem de um Ponto sob uma Transformação Linear*

*Sejam $f(z) = az + b$ uma transformação linear com $a \neq 0$ e $z_0$ um ponto no plano complexo. Se os pontos $z_0$ e $w_0 = f(z_0)$ forem posicionados na mesma cópia do plano complexo, o ponto $w_0$ é determinado da seguinte forma:*

(*i*) *$z_0$ é girado de um ângulo $\operatorname{Arg}(a)$ em torno da origem*
(*ii*) *o resultado é dilatado por $|a|$ e*
(*iii*) *este último resultado é transladado de $b$.*

Esta descrição da imagem de um ponto $z_0$ sob uma transformação linear também descreve a imagem de qualquer conjunto de pontos $S$. Em particular, a imagem $S'$ de um conjunto $S$ sob $f(z) = az + b$ é o conjunto de pontos obtidos pela rotação de $S$ de um ângulo $\operatorname{Arg}(a)$, pela dilatação por $|a|$ e pela translação por $b$.

De (6), vemos que toda transformação complexa linear e não constante é uma composição de, *no máximo*, uma rotação, uma dilatação e uma translação. Enfatizamos as palavras "no máximo" para ressaltar o fato de que uma ou mais das transformações envolvidas pode ser a **transformação identidade** $f(z) = z$ (que mapeia qualquer ponto no plano complexo nele próprio). Por exemplo, a transformação linear $f(z) = 3z + i$ envolve uma dilatação por 3 e uma translação por $i$, mas não envolve uma rotação. Fica evidente de (6) que, se $a \neq 0$ for um número complexo, se $R(z)$ for uma rotação por $\operatorname{Arg}(z)$, $M(z)$ for uma dilatação por $|a|$ e $T(z)$ for uma translação por $b$, então a composição $f(z) = T \circ M \circ R(z) = T(M(\mathrm{R}(z)))$ é uma função linear complexa. Além disso, como a composição de qualquer número finito de funções lineares é uma função linear, resulta que a composição de um número finito de rotações, dilatações e translações é uma transformação linear.

Vimos que translações, rotações e dilatações preservam a forma básica da figura no plano complexo. Por conseguinte, uma transformação linear também preserva a forma básica de uma figura no plano complexo. Esta é uma importante propriedade de transformações complexas lineares e merece ser salientada.

*Uma transformação linear $w = az + b$, com $a \neq 0$, pode modificar as dimensões de uma figura no plano complexo, mas não pode alterar a forma básica da figura.*

Nota: A ordem em que são efetuados os passos em uma transformação linear é importante! ➡

Ao descrever uma função linear como uma composição de rotação, dilatação e translação, devemos ter em mente que a ordem da composição é importante. Para comprovar isso, consideremos a transformação $f(z) = 2z + i$, que dilata por 2 e translada por $i$; portanto, $f$ mapeia 0 em $i$. Se invertermos a ordem da composição — translação por $i$ e dilatação por 2 — o efeito é mapear 0 em $2i$. Portanto, alterar a ordem da composição pode resultar em uma transformação diferente. Contudo,

em alguns casos especiais a alteração da ordem da composição não altera a transformação (Problemas 27 e 28 do Conjunto de Exercícios 2.3).

Uma transformação complexa linear sempre pode ser representada como uma composição em mais de uma forma. A transformação complexa $f(z) = 2z + i$, por exemplo, pode também ser representada como $f(z) = 2(z + i/2)$. Portanto, a dilatação por 2 seguida pela translação por $i$ é igual à translação por $i/2$ seguida da dilatação por 2.

---

EXEMPLO 4 **Imagem de um Retângulo sob uma Transformação Linear**

Determinemos a imagem do retângulo com vértices $-1 + i$, $1 + i$, $1 + 2i$ e $-1 + 2i$ sob a transformação linear $f(z) = 4iz + 2 + 3i$.

**Solução** Seja $S$ o retângulo com os vértices dados e seja $S'$ a imagem de $S$ sob $f$. Como $f$ é uma transformação linear, a discussão anterior implica que $S'$ tem a mesma forma de $S$. Ou seja, $S'$ é um retângulo. Logo, para determinar $S'$ precisamos determinar apenas seus vértices, que são as imagens dos vértices de $S$ sob $f$:

$$f(-1+i) = -2-i \qquad f(1+i) = -2+7i$$
$$f(1+2i) = -6+7i \qquad f(-1+2i) = -6-i.$$

Por conseguinte, $S'$ é o retângulo com vértices $-2 - i$, $-2 + 7i$, $-6 + 7i$ e $-6 - i$. □

A transformação linear $f(z) = 4iz + 2 + 3i$ do Exemplo 4 também pode ser vista como uma composição de uma rotação, uma dilatação e uma translação. Como $\text{Arg}(4i) = \pi/2$ e $|4i| = 4$, $f$ age pela rotação de um ângulo de $\pi/2$ radianos em torno da origem, dilatação de 4 e translação de $2 + 3i$. Esta sequência é mostrada na Figura 2.3.7. Na Figura 2.3.7(a) o retângulo $S$, mostrado em cinza, é girado de $\pi/2$, resultando no retângulo $S_1$ mostrado em preto; na Figura 2.3.7(b), o retângulo $S_1$ mostrado em cinza é dilatado de 4, levando ao retângulo $S_2$ mostrado em preto; por fim, na Figura 2.3.7(c), o retângulo $S_2$ mostrado em cinza é transladado de $2 + 3i$, resultando no retângulo $S'$ mostrado em preto.

(a) Rotação por $\pi/2$ (b) Dilatação por 4 (c) Translação por $2 + 3i$

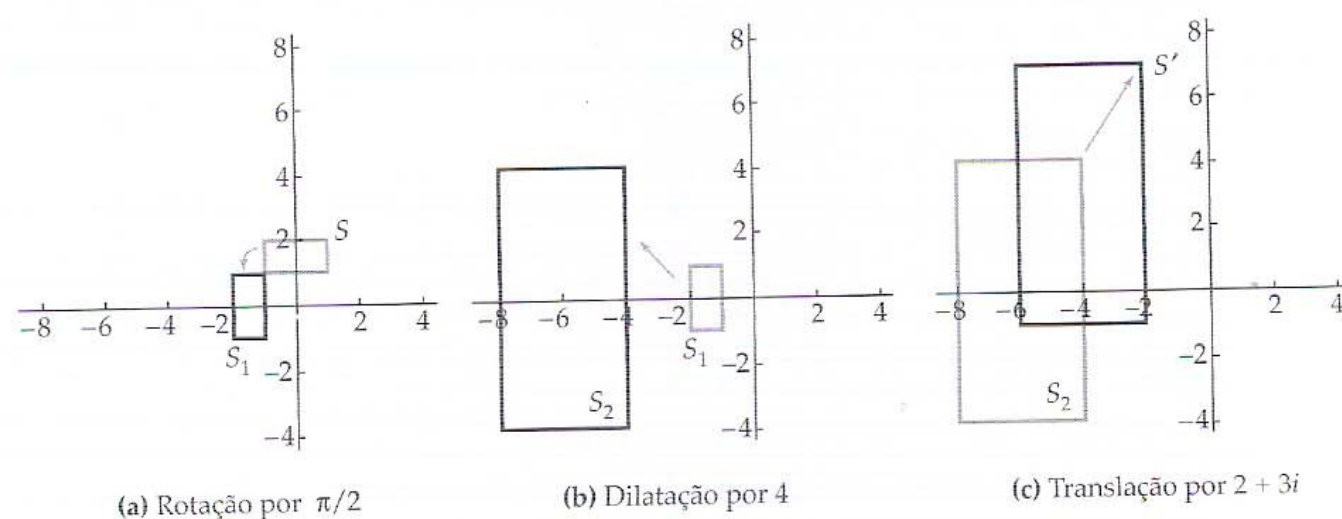



**Figura 2.3.7** Transformação linear de um retângulo

---

EXEMPLO 5 **Uma Transformação Linear de um Triângulo**

Determinemos uma função complexa linear que mapeie o triângulo equilátero com vértices $1 + i$, $2 + i$ e $\frac{3}{2} + (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})i$ no triângulo equilátero com vértices $i$, $\sqrt{3} + 2i$ e $3i$.

**Solução** Seja $S_1$ o triângulo com vértices $1 + i$, $2 + i$ e $\frac{3}{2} + (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})i$ mostrado em cinza na Figura 2.3.8(a); seja $S'$ o triângulo com vértices $i$, $\sqrt{3} + 2i$ e $3i$ mostrado em preto na Figura 2.3.8(d). Há diversas maneiras de determinar uma transformação linear que mapeie $S_1$ em $S'$. A seguir, apresentamos uma. Primeiro, transladamos $S_1$ de modo que passe a ter um vértice na origem. Se decidirmos que o vértice $1 + i$ deve ser mapeado em 0, isto é feito pela translação $T_1(z) = z - (1 + i)$. Seja $S_2$ a imagem de $S_1$ sob $T_1$. Logo, $S_2$ é o triângulo com vértices 0, 1 e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ e mostrado em preto na Figura 2.3.8(a). Dessa figura vemos que o ângulo entre o eixo imaginário e o lado de $S_2$ que contém os vértices 0 e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ é $\pi/6$. Por conseguinte, uma rotação de um ângulo de $\pi/6$ em torno da origem, no sentido trigonométrico, mapea

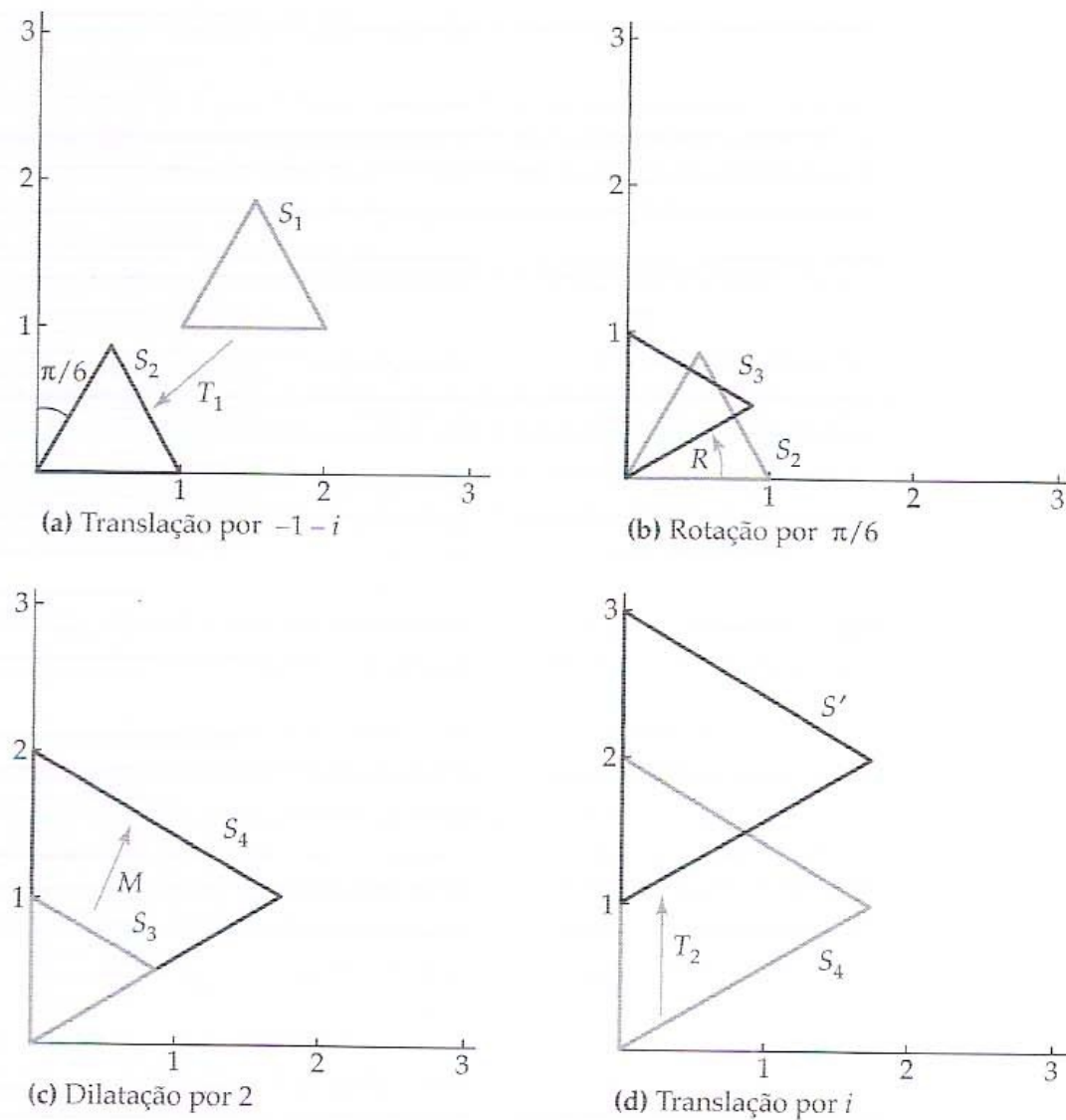



**Figura 2.3.8** Transformação linear de um triângulo

rá $S_2$ em um triângulo com dois vértices no eixo imaginário. Essa rotação é dada por $R(z) = (e^{i\pi/6})\ z = (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)z$; a imagem de $S_2$ sob $R$ é o triângulo $S_3$ com vértices em $0$, $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ e $i$, mostrado em preto na Figura 2.3.8(b). É simples verificar que cada lado do triângulo $S_3$ tem comprimento 1. Como cada lado do desejado triângulo $S'$ tem comprimento 2, dilatamos $S_3$ por um fator 2. A dilatação $M(z) = 2z$ mapeia o triângulo $S_3$, mostrado em cinza na Figura 2.3.8(c), no triângulo $S_4$, com vértices $0$, $\sqrt{3} + i$ e $2i$, mostrado em preto na Figura 2.3.8(c). Por fim, transladamos o triângulo $S_4$ de $i$ com a transformação $T(z) = z + i$. Esta translação mapeia o triângulo $S_4$, mostrado em cinza na Figura 2.3.8(d), no triângulo $S'$, com vértices $i$, $\sqrt{3} + 2i$ e $3i$, mostrado em preto na Figura 2.3.8(d).

Em resumo, concluímos que a seguinte transformação linear:

$$f(z) = T_2 \circ M \circ R \circ T_1(z) = \left(\sqrt{3} + i\right) z + 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}\,i$$

mapeia o triângulo $S_1$ no triângulo $S'$. ☐

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

O estudo de cálculo diferencial é baseado no princípio de que funções reais lineares são o tipo de função de mais simples entendimento (seja de um ponto de vista algébrico, numérico ou geométrico). Uma das muitas aplicações da derivada de uma função real $f$ é a determinação de uma função linear que aproxime $f$ em uma vizinhança de um ponto $x_0$. Em particular, vale lembrar que a aproximação linear a uma função diferenciável $f(x)$ em $x = x_0$ é a função linear $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Do ponto de vista geométrico, o gráfico da aproximação linear é a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Embora não exista uma interpretação geométrica análoga para funções complexas, a fórmula de aproximação linear pode ser aplicada a funções complexas, desde que seja feita uma definição apropriada da derivada da função complexa. Portanto, se $f'(z_0)$ representar a derivada da função complexa $f(z)$ em $z_0$ (esta definição será dada na Seção 3.1), então a **aproximação linear** de $f$ em uma vizinhança de $z_0$ é a função linear complexa $l(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$. Geometricamente, $l(z)$ aproxima a forma em que $f(z)$ age como uma transformação complexa nas proximidades do pon-

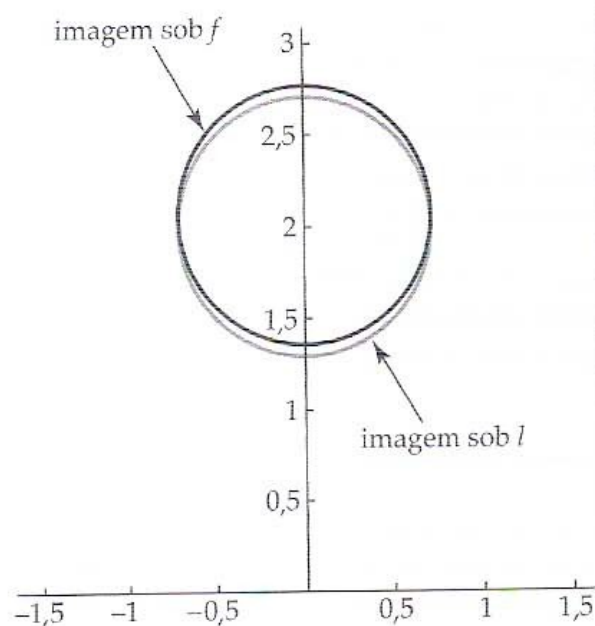



**Figura 2.3.9** Aproximação linear de $w = z^2$

to $z_0$. Por exemplo, veremos, no Capítulo 3, que a derivada da função complexa $f(z) = z^2$ é $f'(z) = 2z$. Por conseguinte, a aproximação linear de $f(z) = z^2$ em $z_0 = 1 + i$ é $l(z) = 2i + 2(1+i)(z-1-i) = 2\sqrt{2}\left(e^{i\pi/4}z\right) - 2i$. Próximo ao ponto $z = 1 + i$, a transformação $w = z^2$ pode ser aproximada pela transformação linear que consiste na composição da rotação de $\pi/4$, dilatação de $2\sqrt{2}$ e translação de $-2i$. Na Figura 2.3.9, a imagem da circunferência $|z - (1 + i)| = 0{,}25$ sob $f$ é mostrada em preto e a imagem desta circunferência sob $l$ é mostrada em cinza. A Figura 2.3.9 indica, para a circunferência $|z - (1 + i)| = 0{,}25$, que a transformação linear $l$ fornece uma aproximação precisa para a transformação linear $f$.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.3 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro*

Nos Problemas 1–6, (**a**) determine a imagem do disco fechado $|z| \leq 1$ sob a transformação linear $w = f(z)$ e (**b**) represente a transformação linear com uma sequência de gráficos, como na Figura 2.3.7.

**1.** $f(z) = z + 3i$

**2.** $f(z) = z + 2 - i$

**3.** $f(z) = 3iz$

**4.** $f(z) = (1 + i)z$

**5.** $f(z) = 2z - i$

**6.** $f(z) = (6 - 5i)z + 1 - 3i$

Nos Problemas 7–12, (**a**) determine a imagem do triângulo com vértices 0, 1 e $i$ sob a transformação linear $w = f(z)$ e (**b**) represente a transformação linear com uma sequência de gráficos, como na Figura 2.3.7.

**7.** $f(z) = z + 2i$

**8.** $f(z) = 3z$

**9.** $f(z) = e^{i\pi/4}z$

**10.** $f(z) = \frac{1}{2}i\,z$

**11.** $f(z) = -3z + i$

**12.** $f(z) = (1 - i)z - 2$

Nos Problemas 13–16, expresse a transformação linear $w = f(z)$ dada como uma composição de uma rotação, uma dilatação e uma translação, como em (6). A seguir, descreva a ação da transformação linear em palavras.

**13.** $f(z) = 3iz + 4$

**14.** $f(z) = 5\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)z + 7i$

**15.** $f(z) = -\dfrac{1}{2}z + 1 - \sqrt{3}i$

**16.** $f(z) = (3 - 2i)z + 12$

Nos Problemas 17–20, determine uma transformação linear que mapeie o conjunto $S$ no conjunto $S'$. (Nota: pode haver mais de uma transformação linear que resolva o problema.)

**17.** $S$ é o triângulo com vértices 0, 1 e $1 + i$. $S'$ é o triângulo com vértices $2i$, $3i$ e $-1 + 3i$.

**18.** $S$ é a circunferência $|z - 1| = 3$. $S'$ é a circunferência $|w + i| = 5$.

**19.** $S$ é o eixo imaginário. $S'$ é a reta que passa pelos pontos $i$ e $1 + 2i$.

**20.** $S$ é o quadrado com vértices $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ e $1 - i$. $S'$ é o quadrado com vértices 1, $2 + i$, $1 + 2i$ e $i$.

**21.** Determine duas transformações lineares distintas que mapeiem o quadrado com vértices 0, 1, $1 + i$ e $i$ no quadrado com vértices $-1$, 0, $i$ e $-1 + i$.

**22.** Determine duas transformações lineares distintas que mapeiem o semiplano $\mathrm{Re}(z) \geq 2$ no semiplano $\mathrm{Re}(w) \geq 5$.

**23.** Considere o segmento de reta parametrizado por $z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t$, $0 \leq t \leq 1$.

(a) Determine uma parametrização da imagem do segmento de reta sob a translação $T(z) = z + b$, $b \neq 0$. Descreva a imagem em palavras.

(b) Determine uma parametrização da imagem do segmento de reta sob a rotação $R(z) = az$, $|a| = 1$. Descreva a imagem em palavras.

(c) Determine uma parametrização da imagem do segmento de reta sob a dilatação $M(z) = az$, $a > 0$. Descreva a imagem em palavras.

**24.** Repita o Problema 23 para a circunferência parametrizada por $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**25.** Nas partes (a)–(c), expresse a dada composição de transformações como uma transformação linear $f(z) = az + b$.

(a) rotação de $\pi/4$, dilatação de 2 e translação de $1 + i$

(b) dilatação de 2, translação de $\sqrt{2}$ e rotação de $\pi/4$

(c) translação de $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, rotação de $\pi/4$ e dilatação de 2

(d) O que você nota nas transformações lineares em (a)–(c)?

**26.** Considere a transformação linear complexa $f(z) = (1 + \sqrt{3}i)\,z + i$. Em cada parte, determine a translação $T$, a rotação $R$ e a dilatação $M$ que satisfazem a equação dada e descreva a transformação $f$ em palavras, usando $T$, $R$ e $M$.

(a) $f(z) = T \circ M \circ R(z)$ (b) $f(z) = M \circ T \circ R(z)$

(c) $f(z) = R \circ M \circ T(z)$

## Foco em Conceitos

**27.** (a) Prove que a composição de duas translações $T_1(z) = z + b_1$, $b_1 \neq 0$, e $T_2(z) = z + b_2$, $b_2 \neq 0$, é uma translação ou a transformação identidade. A ordem da composição importa?

(b) Prove que a composição de duas rotações $R_1(z) = a_1 z$, $|a_1| = 1$, e $R_2(z) = a_2 z$, $|a_2| = 1$, é uma rotação ou a transformação identidade. A ordem da composição importa?

(c) Prove que a composição de duas dilatações $M_1(z) = a_1 z$, $a_1 > 0$, e $M_2(z) = a_2 z$, $a_2 > 0$, é uma dilatação ou a transformação identidade. A ordem da composição importa?

**28.** Dizemos que duas transformações $f$ e $g$ **comutam** se $f \circ g(z) = g \circ f(z)$ para todo $z$. Ou seja, duas transformações comutam se a ordem de sua composição não alterar a transformação.

(a) Uma translação e uma rotação diferente da rotação identidade podem comutar?

(b) Uma translação e uma dilatação diferente da dilatação identidade podem comutar?

(c) Uma rotação diferente da rotação identidade e uma dilatação diferente da dilatação identidade podem comutar?

**29.** Lembre-se, do Problema 31 do Conjunto de Exercícios 2.2, de que a transformação $f(z) = \bar{z}$ é denominada **reflexão** em relação ao eixo real. Usando a transformação $f(z) = \bar{z}$ e uma transformação linear qualquer, determine a transformação $g$ que representa uma reflexão em relação ao eixo imaginário. Ou seja, expresse a transformação $g(x + iy) = -x + iy$ em termos de constantes complexas e o símbolo $\bar{z}$.

**30.** Descreva como obter a imagem $w_0 = f(z_0)$ de um ponto $z_0$ sob a transformação $f(z) = a\bar{z} + b$ em termos de translação, rotação, dilatação e reflexão.

**31.** O que você pode dizer a respeito de uma transformação linear $f$ tal que $|z| = |f(z)|$ para todo número complexo $z$?

**32.** O que você pode dizer a respeito de uma transformação linear $f$ tal que $|z_2 - z_1| = |f(z_2) - f(z_1)|$ para quaisquer números complexos $z_1$ e $z_2$?

**33.** Um **ponto fixo** de uma transformação $f$ é um ponto $z_0$ com a propriedade $f(z_0) = z_0$.

(a) A transformação linear $f(z) = az + b$ tem um ponto fixo $z_0$? Em caso afirmativo, determine $z_0$ em termos de $a$ e $b$.

(b) Dê um exemplo de uma transformação complexa linear que não tem um ponto fixo.

(c) Dê um exemplo de uma transformação complexa linear que tem mais de um ponto fixo. [*Sugestão*: existe apenas uma transformação desse tipo.]

(d) Prove que se $z_0$ for um ponto fixo de uma transformação complexa linear $f$ e se $f$ comutar com a transformação linear complexa $g$ (veja o Problema 28), então $z_0$ é um ponto fixo de $g$.

**34.** Suponha que o conjunto $S$ seja mapeado no conjunto $S'$ pela transformação complexa $w = f(z)$. Se, como subconjuntos de uma única cópia do plano complexo, $S = S'$, então $S$ é dito ser **invariante** sob $f$. Note que para que $S$ seja invariante sob $f$, não é necessário que $f(z) = z$ para todo $z$ em $S$.

(a) Explique por que o disco fechado $|z| \leq 2$ é invariante sob a rotação $R(z) = az$, $|a| = 1$.

(b) Quais são os conjuntos invariantes sob a translação $T(z) = z + b$, $b \neq 0$?

(c) Quais são os conjuntos invariantes sob a dilatação $M(z) = az$, $a > 0$?

**35.** Este problema mostra que uma transformação linear é determinada de forma única pelas imagens de dois pontos.

(a) Seja $f(z) = az + b$ uma função linear complexa com $a \neq 0$; assuma que $f(z_1) = w_1$ e $f(z_2) = w_2$. Determine duas fórmulas que expressem $a$ e $b$ em termos de $z_1$, $z_2$, $w_1$ e $w_2$. Explique por que essas fórmulas implicam que a transformação linear é determinada de forma única pelas imagens de dois pontos.

(b) Mostre que uma função linear *não* é determinada de forma única pela imagem de um ponto. Ou seja, determine duas funções lineares distintas $f_1$ e $f_2$ que sejam iguais em um ponto.

**36.** Determine uma função linear complexa $f(z) = az + b$ que gire um ponto $z$ de um ângulo $\theta$, no sentido trigonométrico, em torno de um ponto $z_0$ no plano complexo. [*Sugestão*: pelo Problema 35, esta transformação é determinada de forma única pelas imagens de dois pontos.]

**37.** (a) Dados dois números complexos $w_1$ e $w_2$, existirá sempre uma função linear que mapeie 0 em $w_1$ e 1 em $w_2$? Justifique sua resposta.

(b) Dados três números complexos $w_1$, $w_2$ e $w_3$, existirá sempre uma função linear que mapeie 0 em $w_1$, 1 em $w_2$ e $i$ em $w_3$? Justifique sua resposta.

**38.** No Capítulo 1, usamos a desigualdade triangular para obter limitantes para os módulos de certas expressões em $z$, dado um limitante para o módulo de $z$. Por exemplo, se $|z| \leq 1$, então $|(1+i)z - 2| \leq 2 + \sqrt{2}$. Justifique essa desigualdade usando transformações lineares e, a seguir, determine um valor de $z$ para o qual $|(1+i)z - 2| = 2 + \sqrt{2}$.

**39.** Considere a função complexa $f(z) = 2iz + 1 - i$, definida no anel fechado $2 \leq |z| \leq 3$.

(a) Use transformações lineares para determinar limitantes superior e inferior para o módulo de $f(z) = 2iz + 1 - i$. Ou seja, determine valores reais $L$ e $M$ tais que $L \leq |2iz + 1 - i| \leq M$.

(b) Determine valores de $z$ que levem aos limitantes em (a). Em outras palavras, determine $z_0$ e $z_1$ tais que $|f(z_0)| = L$ e $|f(z_1)| = M$.

(c) Determine limitantes superior e inferior para o módulo da função $g(z) = 1/f(z)$, definida no anel fechado $2 \leq |z| \leq 3$.

## Projetos

**40. Grupos de Isometrias** Neste projeto, investigaremos a relação entre análise complexa e a geometria euclidiana do plano cartesiano.

A **distância euclidiana** entre dois pontos $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ no plano cartesiano é

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

É claro que, se considerarmos as representações complexas $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ desses pontos, a distância euclidiana é dada pelo módulo

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|.$$

Uma função do plano no plano que preserva a distância euclidiana entre qualquer par de pontos é denominada uma **isometria euclidiana** do plano. Em particular, uma transformação complexa $w = f(z)$ é uma isometria euclidiana do plano se

$$|z_2 - z_1| = |f(z_1) - f(z_2)|$$

para todo par de números complexos $z_1$ e $z_2$.

(a) Prove que toda transformação linear da forma $f(z) = az + b$, com $|a| = 1$, é uma isometria euclidiana.

Um **grupo** é uma estrutura algébrica que ocorre em diversas áreas da matemática. Um grupo é um conjunto $G$ associado a um tipo especial de função * de $G \times G$ em $G$. A função * é denominada uma **operação binária** em $G$, e é comum usar a notação $a*b$ em vez de $*(a, b)$ para representar um valor de *. Agora, daremos a definição formal de um grupo. Um **grupo** é um conjunto $G$ associado a uma operação binária * em $G$ que satisfaz as três propriedades seguintes:

(*i*) para todos os elementos $a$, $b$ e $c$ em $G$, $a*(b*c) = (a*b)*c$,

(*ii*) existe um elemento $e$ em $G$ tal que $e*a = a*e = a$ para todo $a$ em $G$ e

(*iii*) para todo elemento $a$ em $G$ existe um elemento $b$ em $G$ tal que $a*b = b*a = e$. (O elemento $b$ é denominado **inverso** de $a$ em $G$ e denotado por $a^{-1}$.)

Seja $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ o conjunto de todas as funções complexas da forma $f(z) = az + b$ com $|a| = 1$. No restante deste projeto você deverá demonstrar que $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ é um grupo com composição de funções como a operação binária. Este grupo recebe a denominação **grupo de isometrias do plano euclidiano que preservam orientação**.

(b) Prove que a composição de funções é uma operação binária em $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$. Ou seja, prove que se $f$ e $g$ forem funções em $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$, então a função $f \circ g$, definida por $f \circ g(z) = f(g(z))$, é um elemento em $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$.

(c) Prove que o conjunto $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ com composição satisfaz a propriedade (*i*) de um grupo.

(d) Prove que o conjunto $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ com composição satisfaz a propriedade (*ii*) de um grupo. Ou seja, prove que existe uma função $e$ em $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ tal que $e \circ f = f \circ e = f$, para todas as funções $f$ em $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$.

(e) Prove que o conjunto $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ com composição satisfaz a propriedade (*iii*) de um grupo.

## 2.4 Funções Potências Especiais

Uma **função polinomial complexa** é uma função da forma $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, onde $n$ é um inteiro positivo e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são constantes complexas. Em geral, uma transformação polinomial complexa pode ser muito complicada, mas em diversos casos especiais a ação da transformação é facilmente entendida. Por exemplo, as funções complexas lineares estudadas na Seção 2.3 são polinômios complexos de grau $n = 1$.

Nesta seção estudaremos polinômios complexos da forma $f(z) = z^n$, $n \geq 2$. Ao contrário das transformações lineares estudadas na seção anterior, as transformações $w = z^n$, $n \geq 2$ não preservam a forma básica de todas as figuras no plano complexo. Associada à função $z^n$, $n \geq 2$, também temos a *função raiz n-ésima principal* $z^{1/n}$. A função raiz $n$-ésima principal é a função inversa da função $z^n$, definida em um domínio suficientemente restrito. Por conseguinte, transformações complexas associadas a $z^n$ e $z^{1/n}$ guardam uma relação próxima.

**Funções Potências** Uma função real da forma $f(x) = x^a$, onde $a$ é uma constante real, é denominada uma função potência. Formamos uma função potência complexa permitindo que a entrada ou o expoente $a$ seja um número complexo. Em outras palavras, uma **função potência complexa** é uma função da forma $f(z) = z^\alpha$, onde $\alpha$ é uma constante complexa. Se $\alpha$ for um inteiro, a função potência pode ser calculada com as operações algébricas sobre números complexos discutidas no Capítulo 1. Por exemplo, $z^2 = z \cdot z$ e $z^{-3} = \dfrac{1}{z \cdot z \cdot z}$. Podemos, também, usar as fórmulas para raízes de números complexos da Seção 1.4 para definir funções potências com expoentes fracionários da forma $1/n$. Por exemplo, *podemos* definir $z^{1/4}$ como a função que fornece a raiz quarta principal de $z$. Nesta seção, restringiremos a atenção às funções potências complexas das formas $z^n$ e $z^{1/n}$, onde $n \geq 2$ e $n$ é um inteiro. Funções potências complexas mais elaboradas, como $z^{\sqrt{2}-i}$, serão discutidas na Seção 4.2, após a introdução da função logarítmica complexa.

### 2.4.1 Função Potência $z^n$

Nesta subseção consideraremos a função potência complexa da forma $z^n$, $n \geq 2$. É natural que comecemos o estudo com a mais simples dessas funções, a **função quadrática complexa** $z^2$.

**Função $z^2$** Valores da função potência complexa $f(z) = z^2$ são facilmente calculados por meio da multiplicação complexa. Por exemplo, em $z = 2 - i$, temos $f(2 - i) = (2 - i)^2 = (2 - i) \cdot (2 - i) = 3 - 4i$. Contudo, o entendimento da transformação complexa $w = z^2$ exige um pouco mais de esforço. Iniciamos expressando essa transformação na notação exponencial, substituindo o símbolo $z$ por $re^{i\theta}$:

$$w = z^2 = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2 e^{i2\theta}. \tag{1}$$

Figura 2.4.1 A transformação $w = z^2$

De (1), vemos que o módulo $r^2$ do ponto $w$ é o quadrado do módulo $r$ do ponto $z$ e que o argumento $2\theta$ de $w$ é o dobro do argumento $\theta$ de $z$. Se posicionarmos $z$ e $w$ na mesma cópia do plano complexo, $w$ é obtido pela dilatação de $z$ por um fator $r$ e, a seguir, pela rotação do resultado de um ângulo $\theta$ em torno da origem. Na Figura 2.4.1 ilustramos a relação entre $z$ e $w = z^2$ quando $r > 1$ e $\theta > 0$. Se $0 < r < 1$, $z$ sofre uma contração por um fator $r$; se $\theta < 0$, a rotação se dá no sentido horário.

É importante notar que o fator de dilatação ou contração e o ângulo de rotação associados a $w = f(z) = z^2$ dependem da localização do ponto $z$ no plano complexo. Por exemplo, como $f(2) = 4$ e $f(i/2) = -\frac{1}{4}$, o ponto $z = 2$ sofre uma dilatação de 2, mas não uma rotação; o ponto $z = i/2$, por sua vez, sofre uma contração de $\frac{1}{2}$ e uma rotação de $\pi/4$. Em geral, a função quadrática $z^2$ não dilata o módulo de pontos na circunferência unitária $|z| = 1$ e, também, não aplica rotação a pontos no eixo real positivo.

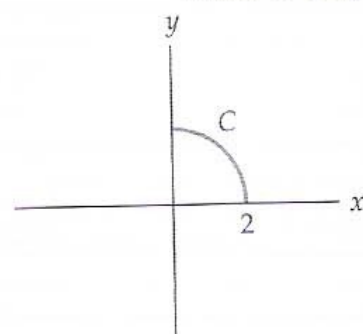
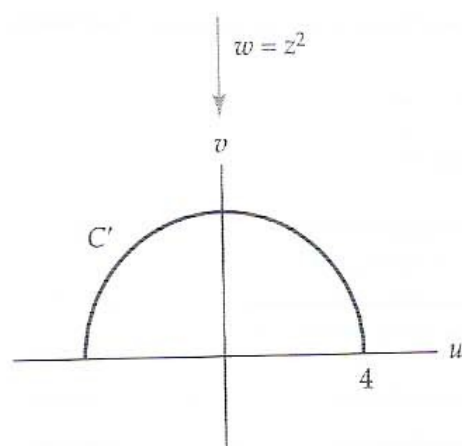
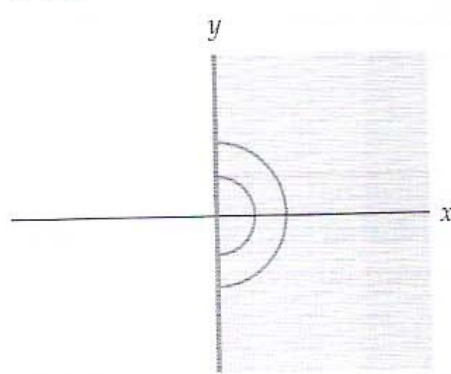
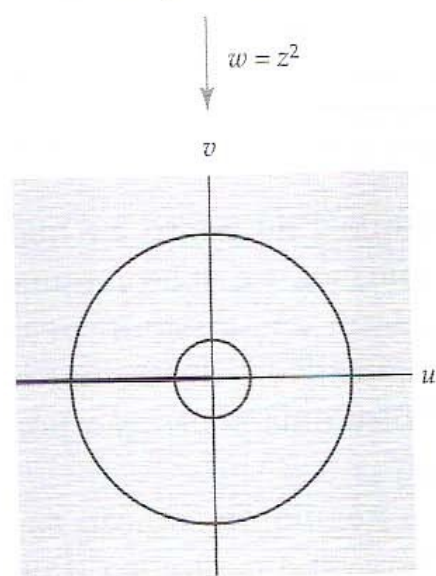
A descrição da transformação $w = z^2$ em termos de dilatação e rotação pode ser usada para visualizar a imagem de alguns conjuntos especiais. Por exemplo, consideremos o raio que emana da origem e faz um ângulo $\phi$ com o eixo real positivo. Todos os pontos nesse raio têm um argumento $\phi$, de modo que as imagens desses pontos sob $w = z^2$ têm argumento $2\phi$. Por conseguinte, as imagens estão em um raio que emana da origem e faz um ângulo $2\phi$ com o eixo real positivo. Além disso, como o módulo $\rho$ de um ponto no raio pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, \infty)$, o módulo $\rho^2$ de um ponto na imagem também pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, \infty)$. Isso implica que um raio que emana da origem e faz um ângulo $\phi$ com o eixo real positivo é mapeado, por $w = z^2$, em um raio que emana da origem e faz um ângulo $2\phi$ com o eixo real positivo. Podemos, também, justificar essa propriedade de mapeamento de $z^2$ com o emprego de (8) e (11) da Seção 2.2 para parametrizar o raio e sua imagem.

(a) Arco da circunferência $|z| = 2$

(b) Imagem de C

**Figura 2.4.2** A transformação $w = z^2$

## EXEMPLO 1 Imagem de um Arco de Circunferência sob $w = z^2$

Determinemos a imagem de um arco de circunferência definido por $|z| = 2$, $0 \le \arg(z) \le \pi/2$, sob a transformação $w = z^2$.

**Solução** Seja $C$ o arco de circunferência definido por $|z| = 2$, $0 \le \arg(z) \le \pi/2$, e mostrado em cinza na Figura 2.4.2(a); seja $C'$ a imagem de $C$ sob $w = z^2$. Como cada ponto em $C$ tem módulo 2 e como a transformação $w = z^2$ eleva o módulo de um ponto ao quadrado, cada ponto em $C'$ tem módulo $2^2 = 4$. Isso implica que a imagem $C'$ deve estar contida na circunferência $|w| = 4$, com centro na origem e raio 4. Como os argumentos de pontos em $C$ assumem todos os valores no intervalo $[0, \pi/2]$ e como a transformação $w = z^2$ dobra o argumento de um ponto, os pontos em $C'$ têm argumentos que assumem todos os valores no intervalo $[2 \times 0, 2 \times \pi/2] = [0, \pi]$. Ou seja, o conjunto $C'$ é a semicircunferência definida por $|w| = 4$, $0 \le \arg(w) \le \pi$. Mostramos, portanto, que $w = z^2$ mapeia o arco de circunferência $C$, mostrado em cinza na Figura 2.4.2(a), na semicircunferência $C'$ mostrada em preto na Figura 2.4.2(b). ❑

Uma forma alternativa de, no Exemplo 1, determinar a imagem seria usar uma parametrização. De (10) da Seção 2.2, o arco de circunferência $C$ pode ser parametrizado por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le \pi/2$; de (11) da Seção 2.2, sua imagem $C'$ é dada por $w(t) = f(z(t)) = 4e^{i2t}$, $0 \le t \le \pi/2$. Substituindo o parâmetro $t$ em $w(t)$ por um novo parâmetro $s = 2t$, obtemos $W(s) = 4e^{is}$, $0 \le s \le \pi$, que é a parametrização da semicircunferência $|w| = 4$, $0 \le \arg(w) \le \pi$.

Da mesma forma, concluímos que a função quadrática mapeia uma semicircunferência $|z| = r$, $-\pi/2 \le \arg(r) \le \pi/2$, na circunferência $|w| = r^2$. Como o semiplano direito $\text{Re}(z) \ge 0$ consiste na coleção de semicircunferências $|z| = r$, $-\pi/2 \le \arg(r) \le \pi/2$, onde $r$ pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, \infty)$, observamos que a imagem desse semiplano consiste na coleção de circunferências $|w| = r^2$, onde $r$ pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, \infty)$. Isso implica que $w = z^2$ mapeia o semiplano da direita $\text{Re}(z) \ge 0$ em todo o plano complexo. Ilustramos essa propriedade na Figura 2.4.3. Observemos que as imagens das duas semicircunferências centradas em 0 e mostradas em cinza na Figura 2.4.3(a) são as duas circunferências mostradas em preto na Figura 2.4.3(b). Como $w = z^2$ eleva ao quadrado o módulo de um ponto, a semicircunferência com menor raio na Figura 2.4.3(a) é mapeada na semicircunferência com menor raio na Figura 2.4.3(b). Vemos, ainda, na Figura 2.4.3, que o raio que emana da origem e contém o ponto $i$ e o raio que emana da origem e contém o ponto $-i$ são ambos mapeados no eixo real não positivo. Portanto, o eixo imaginário, mostrado em cor na Figura 2.4.3(a), é mapeado no conjunto que consiste no ponto $w = 0$ e no eixo $u$ negativo, mostrado em preto na Figura 2.4.3(b).

Para melhorar o entendimento da transformação $w = z^2$, consideramos, a seguir, as imagens de retas horizontal e vertical no plano complexo.

(a) Semiplano $\text{Re}(z) > 0$

(b) Imagem do semiplano em (a)

**Figura 2.4.3** A transformação $w = z^2$

## EXEMPLO 2 Imagem de uma Reta Vertical sob $w = z^2$

Determinemos a imagem da reta vertical $x = k$ sob a transformação $w = z^2$.

(a) Retas verticais no plano $z$

(b) Imagem das retas em (a)

Figura 2.4.4 A transformação $w = z^2$

(a) Retas horizontais no plano $z$

(b) Imagem das retas em (a)

Figura 2.4.5 A transformação $w = z^2$

**Solução** Neste exemplo é conveniente trabalhar com as partes real e imaginária de $w = z^2$, que, de (1) da Seção 2.1, são $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$, respectivamente. Como a reta vertical $x = k$ consiste nos pontos $z = k + iy$, $-\infty < y < \infty$, a imagem dessa reta consiste em todos os pontos $w = u + iv$, onde

$$u = k^2 - y^2, \quad v = 2ky, \quad -\infty < y < \infty. \tag{2}$$

Se $k \neq 0$, podemos eliminar a variável $y$ de (2) resolvendo a segunda equação para $y = v/2k$ e substituímos esta expressão na equação restante e na desigualdade. Após simplificação, obtemos:

$$u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2}, \quad -\infty < v < \infty. \tag{3}$$

Logo, a imagem da reta $x = k$ (com $k \neq 0$) sob $w = z^2$ é o conjunto de pontos no plano $w$ que satisfazem (3). Esta imagem é uma parábola que se abre na direção do eixo $u$ negativo, tem vértice em $(k^2, 0)$ e corta o eixo $v$ em $(0, \pm 2k^2)$. Vale notar que a imagem dada por (3) permanece inalterada se $k$ for substituído por $-k$. Isso implica que, se $k \neq 0$, o par de retas verticais $x = k$ e $x = -k$ são ambas mapeadas na parábola $u = k^2 - v^2/(4k^2)$ por $w = z^2$.

A ação da transformação $w = z^2$ sobre retas verticais é ilustrada na Figura 2.4.4. As retas verticais $x = k$, $k \neq 0$, mostradas em cinza na Figura 2.4.4(a), são mapeadas nas parábolas mostradas em preto na Figura 2.4.4(b). Em particular, de (3), temos que as retas $x = 3$ e $x = -3$, mostradas em cinza na Figura 2.4.4(a), são mapeadas na parábola com vértice em $(9, 0)$, mostrada em preto na Figura 2.4.4(b). De modo similar, as retas $x = \pm 2$ são mapeadas na parábola com vértice em $(4, 0)$, e as retas $x = \pm 1$ são mapeadas na parábola com vértice em $(1, 0)$. No caso em que $k = 0$, (2) implica que a imagem da reta $x = 0$ (que é o eixo imaginário) é dada por

$$u = -y^2, \quad v = 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

Por conseguinte, o eixo imaginário é mapeado, por $w = z^2$, no eixo real negativo, como ilustrado na Figura 2.4.4. ❑

Com pequenas modificações, o método do Exemplo 2 pode ser usado para mostrar que $w = z^2$ mapeia uma reta horizontal $y = k$, $k \neq 0$ na parábola

$$u = \frac{v^2}{4k^2} - k^2 \tag{4}$$

Vemos, novamente, que a imagem em (4) não é alterada se $k$ for substituído por $-k$, de modo que as retas horizontais $y = k$ e $y = -k$, $k \neq 0$ são ambas mapeadas, por $w = z^2$, na parábola dada por (4). Se $k = 0$, a reta horizontal $y = 0$ (que é o eixo real) é mapeada no eixo real positivo. Portanto, as retas horizontais $y = k$, $k \neq 0$, mostradas em cinza na Figura 2.4.5(a), são mapeadas, por $w = z^2$, nas parábolas mostradas em preto na Figura 2.4.5(b). Especificamente, as retas $y = \pm 3$ são mapeadas na parábola com vértice em $(-9, 0)$; as retas $y = \pm 2$ são mapeadas na parábola com vértice em $(-4, 0)$; as retas $y = \pm 1$ são mapeadas na parábola com vértice em $(-1, 0)$.

---

### EXEMPLO 3 Imagem de um Triângulo sob $w = z^2$

Determinemos a imagem do triângulo com vértices $0$, $1 + i$ e $1 - i$ sob a transformação $w = z^2$.

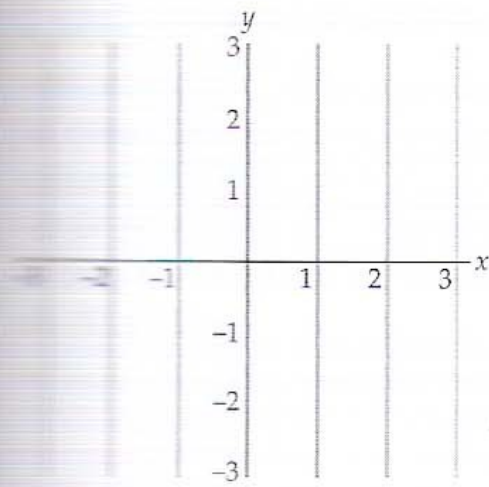
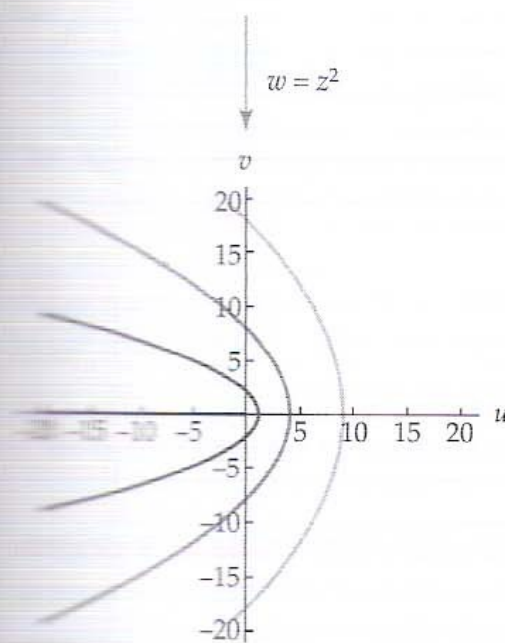
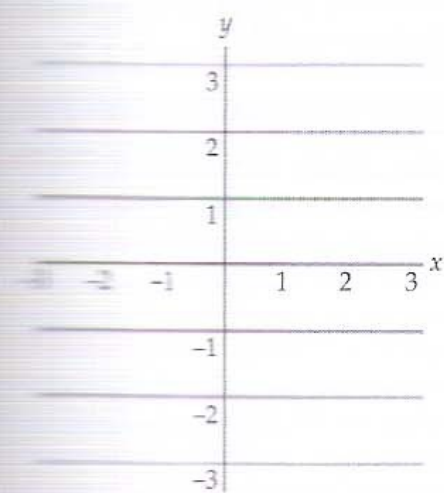
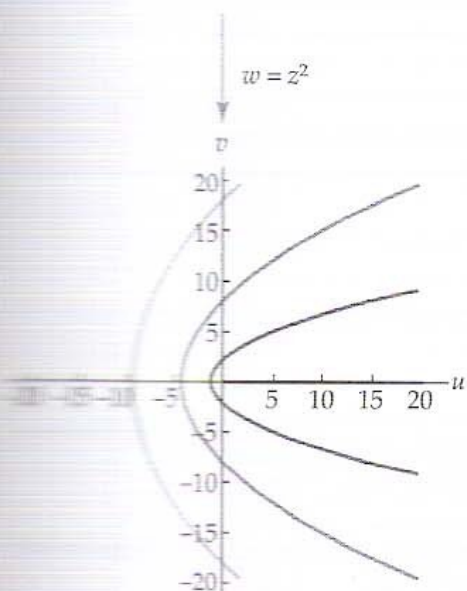
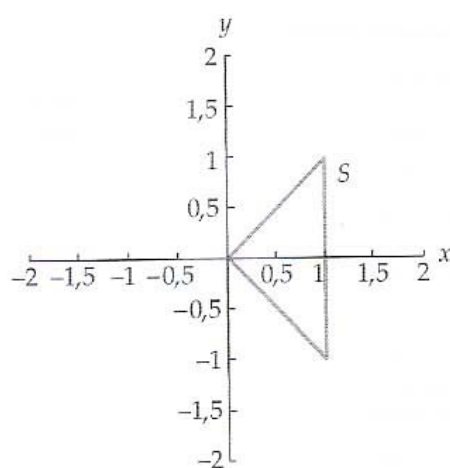
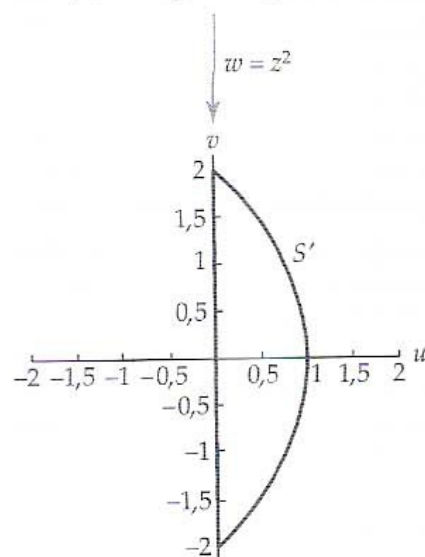
**Solução** Seja $S$ o triângulo com vértices $0$, $1 + i$ e $1 - i$, e seja $S'$ sua imagem sob $w = z^2$. Cada um dos três lados de $S$ será tratado separadamente. O lado de $S$ que contém os vértices $0$ e $1 + i$ está com raio que emana da origem e faz um ângulo de $\pi/4$ radianos com o eixo $x$ positivo. Da discussão anterior, a imagem desse segmento de reta deve estar no raio que faz um ângulo $2(\pi/4) = \pi/2$ radianos com o eixo $u$ positivo. Além disso,

(a) Triângulo no plano z

(b) Imagem do triângulo em (a)

**Figura 2.4.6** A transformação $w = z^2$

como os módulos dos pontos no lado que contém 0 e $1 + i$ variam de 0 a $\sqrt{2}$, os módulos das imagens desses pontos variam de $0^2 = 0$ a $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Por conseguinte, a imagem deste lado é o segmento de reta vertical de 0 a $2i$ contido no eixo $v$ e mostrado em preto na Figura 2.4.6(b). De modo similar, determinamos que a imagem do lado de $S$ que contém os vértices 0 e $1 - i$ é o segmento de reta de 0 a $-2i$ contido no eixo $v$ (Figura 2.4.6). O último lado de $S$ contém os vértices $1 - i$ e $1 + i$. Este lado consiste no conjunto de pontos $z = 1 + iy$, $-1 \leq y \leq 1$. Como este lado está contido na reta vertical $x = 1$, de (2) e (3) do Exemplo 2, temos que sua imagem é um segmento de parábola dado por

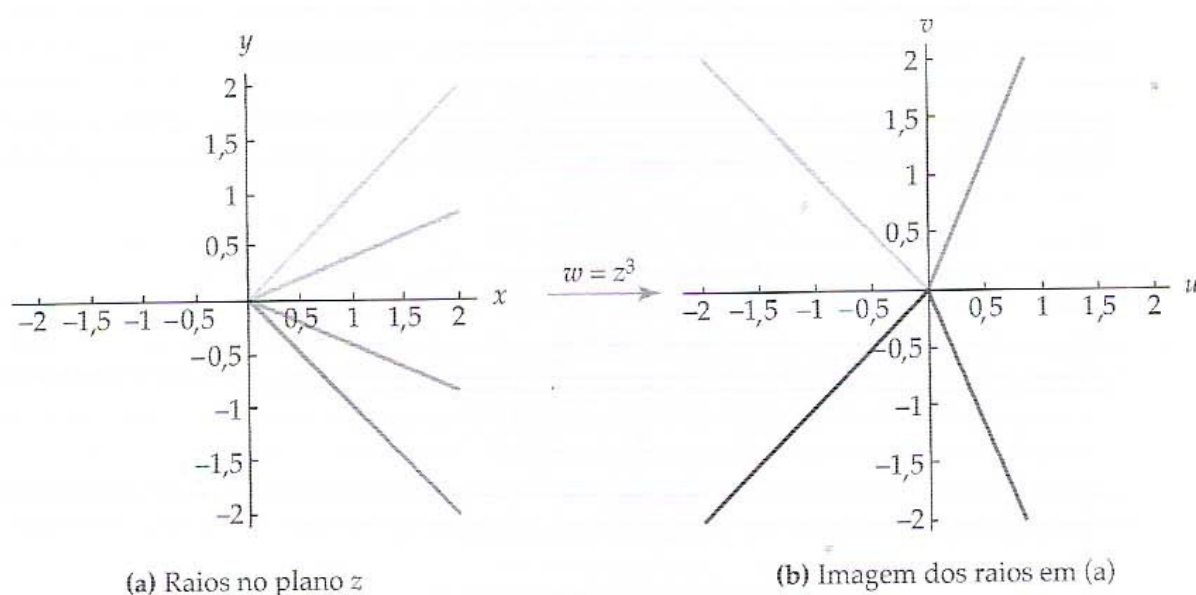
$$u = 1 - \frac{v^2}{4}, \quad -2 \leq v \leq 2.$$

Mostramos, então, que a imagem do triângulo $S$ mostrado em cinza na Figura 2.4.6(a) é a figura $S'$ mostrada em preto na Figura 2.4.6(b). ❑

**Função $z^n$, $n > 2$** Uma análise similar à usada para a transformação $w = z^2$ pode ser aplicada à transformação $w = z^n$, $n > 2$. Substituindo o símbolo $z$ por $re^{i\theta}$, obtemos

$$w = z^n = r^n e^{in\theta}. \tag{5}$$

Por conseguinte, se $z$ e $w = z^n$ forem posicionados na mesma cópia do plano complexo, esta transformação pode ser visualizada como o processo de dilatar ou contrair o módulo $r$ de $z$ ao módulo $r^n$ de $w$ e de girar $z$ em torno da origem para aumentar o argumento $\theta$ de $z$ ao argumento $n\theta$ de $w$.

Podemos usar esta descrição de $w = z^n$ para mostrar que um raio que emana da origem e faz um ângulo de $\phi$ radianos com o eixo $x$ positivo é transformado em um raio que emana da origem e faz um ângulo de $n\phi$ radianos com o eixo $u$ positivo. Esta propriedade é ilustrada para a transformação $w = z^3$ na Figura 2.4.7. Cada raio mostrado em cinza na Figura 2.4.7(a) é mapeado em um raio mostrado em preto na Figura 2.4.7(b). Como a transformação $w = z^3$ aumenta o argumento de um ponto por um fator de 3, o raio mais próximo do eixo $x$ no primeiro quadrante, na Figura 2.4.7(a), é mapeado no raio no primeiro quadrante na Figura 2.4.7(b); o outro raio no primeiro quadrante, na Figura 2.4.7(a), é mapeado no segundo quadrante na Figura 2.4.7(b). Da mesma forma, o raio mais próximo do eixo $x$ no quarto quadrante, na Figura 2.4.7(a), é mapeado no raio no quarto quadrante na Figura 2.4.7(b); o outro raio no quarto quadrante, na Figura 2.4.7(a), é mapeado no terceiro quadrante na Figura 2.4.7(b).

(a) Raios no plano z

(b) Imagem dos raios em (a)

**Figura 2.4.7** A transformação $w = z^3$

---

**EXEMPLO 4 Imagem de um Setor Circular sob $w = z^3$**

Determinemos, sob a transformação $w = z^3$, a imagem do quarto de disco definido pelas desigualdades $|z| \leq 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$.

**Solução** Seja $S$ o quarto de disco e seja $S'$ sua imagem sob $w = z^3$. Como os módulos de pontos em $S$ variam de 0 a 2 e como a transformação $w = z^3$ eleva ao cubo o módulo de um ponto, os módulos dos pontos

(a) Conjunto S para o Exemplo 4

$w = z^3$

(b) Imagem de S

Figura 2.4.8 A transformação $w = z^3$

em $S'$ variam de $0^3 = 0$ a $2^3 = 8$. Além disso, como os argumentos dos pontos em $S$ variam de 0 a $\pi/2$ e como a transformação $w = z^3$ triplica o argumento de um ponto, os argumentos dos pontos em $S'$ variam de 0 a $3\pi/2$. Portanto, $S'$ é o conjunto dado pelas desigualdades $|w| \leq 8$, $0 \leq \arg(w) \leq 3\pi/2$, mostrado em cinza na Figura 2.4.8(b). Concluímos, então, que o conjunto $S$ mostrado em cor na Figura 2.4.8(a) é mapeado pela transformação $w = z^3$ no conjunto $S'$ mostrado em cinza na Figura 2.4.8(b). ❑

## 2.4.2 Função Potência $z^{1/n}$

Agora, investigaremos as funções complexas da forma $z^{1/n}$, onde $n$ é um inteiro e $n \geq 2$. Iniciamos com o caso $n = 2$.

**Função Raiz Quadrada Principal $z^{1/2}$** Em (4) da Seção 1.4, vimos que as $n$ raízes $n$-ésimas de um número complexo não nulo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$$

onde $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$. Em particular, para $n = 2$ temos que as duas raízes quadradas de $z$ são:

$$\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{r}e^{i(\theta+2k\pi)/2} \tag{6}$$

para $k = 0, 1$. A fórmula em (6) não define uma função, pois aloca *dois* valores complexos (um para $k = 0$ e outro para $k = 1$) ao número complexo $z$. Contudo, fixando $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ e $k = 0$ em (6), podemos definir uma função que associa $z$ à única raiz quadrada principal. É natural que esta função receba a denominação **função raiz quadrada principal**.

**Definição 2.4.1 Função Raiz Quadrada Principal**

A função $z^{1/2}$ definida por:

$$z^{1/2} = \sqrt{|z|}e^{i\operatorname{Arg}(z)/2} \tag{7}$$

é denominada **função raiz quadrada principal**.

Se fizermos $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ e substituirmos $z$ por $re^{i\theta}$ em (7), obtemos uma descrição alternativa da função raiz quadrada principal para $|z| > 0$:

$$z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad \theta = \operatorname{Arg}(z). \tag{8}$$

Nota ●

Vale notar que o símbolo $z^{1/2}$ usado na Definição 2.4.1 e na Seção 1.4 representa algo diferente em cada situação. Em (7), usamos $z^{1/2}$ para representar o *valor* da raiz quadrada principal do número complexo $z$, enquanto na Seção 1.4 usamos o símbolo $z^{1/2}$ para representar o *conjunto* das duas raízes quadradas do número complexo $z$. Esta repetição de nomenclatura é lamentável, mas largamente empregada. Na maioria dos casos, o contexto em que o símbolo $z^{1/2}$ é usado deve deixar claro se representa a raiz quadrada principal ou o conjunto de raízes quadradas. Para evitar confusão, às vezes diremos explicitamente "função raiz quadrada principal $z^{1/2}$" ou "função $f(z) = z^{1/2}$ dada por (7)".

EXEMPLO 5 **Valores de $z^{1/2}$**

Determinemos os valores da função raiz quadrada principal $z^{1/2}$ nos seguintes pontos:

(a) $z = 4$ (b) $z = -2i$ (c) $z = -1 + i$

**Solução** Em cada parte, usaremos (7) para determinar o valor de $z^{1/2}$.

(a) Para $z = 4$, temos $|z| = |4| = 4$ e $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(4) = 0$, de modo que, de (7), obtemos:

$$4^{1/2} = \sqrt{4}e^{i(0/2)} = 2e^{i(0)} = 2.$$

(b) Para $z = -2i$, temos $|z| = |-2i| = 2$ e $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(-2i) = -\pi/2$, de modo que, de (7), obtemos:

$$(-2i)^{1/2} = \sqrt{2}e^{i(-\pi/2)/2} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 1 - i.$$

(c) Para $z = -1 + i$, temos $|z| = |-1 + i| = \sqrt{2}$ e $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(-1 + i) = 3\pi/4$, de modo que, de (7), obtemos:

$$(-1+i)^{1/2} = \sqrt{(\sqrt{2})}e^{i(3\pi/4)/2} = \sqrt[4]{2}e^{i(3\pi/8)} \approx 0{,}4551 + 1{,}0987i.$$

❑

É importante que no cálculo de valores da função raiz quadrada principal da Definição 2.4.1 usemos o *argumento principal.* O uso de outra escolha para o argumento de $z$ pode resultar em uma função diferente. Por exemplo, na Seção 1.4 vimos que as duas raízes quadradas de $i$ são $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$ e $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$. Para $z = \text{i}$, temos $|z| = 1$ e $\text{Arg}(z) = \pi/2$. De (7), obtemos

$$i^{1/2} = \sqrt{1}e^{i(\pi/2)/2} = 1 \cdot e^{i\,\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Por conseguinte, apenas a primeira das duas raízes de $i$ representa o valor da função raiz quadrada principal. Podemos, sem dúvida, definir outras funções "raízes quadradas". Por exemplo, seja $\theta$ o valor único do argumento de $z$ no intervalo $\pi < \theta < 3\pi$. Logo, $f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2}$ define uma função para a qual $f(i) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$. Esta função $f$ não é a função raiz quadrada principal, mas guarda uma relação próxima com ela. Como $\pi < \text{Arg}(z) + 2\pi \leq 3\pi$, $\theta = \text{Arg}(z) + 2\pi$; portanto

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2} = \sqrt{|z|}e^{i(\text{Arg}(z)+2\pi)/2} = \sqrt{|z|}e^{i\text{Arg}(z)/2}e^{i\pi}.$$

Como $e^{i\pi} = -1$, a expressão anterior é simplificada como $f(z) = -\sqrt{|z|}e^{i\text{Arg}(z)/2}$. Portanto, mostramos que a função $f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2}$, $\pi < \theta \leq 3\pi$ é o negativo da função raiz quadrada principal $z^{1/2}$.

**Funções Inversas** A função raiz quadrada principal $z^{1/2}$ dada por (7) é *uma* função inversa da função quadrática $z^2$ examinada na primeira parte desta seção. Antes de prosseguir, precisamos rever alguma terminologia geral relacionada a funções inversas.

Uma função real deve ser biunívoca para ter uma função inversa. O mesmo se aplica a funções complexas. A definição de uma função complexa biunívoca é análoga à de uma função real: uma função complexa $f$ é **biunívoca** se cada ponto $w$ na imagem de $f$ for a imagem de um único ponto $z$ — denominado *pré-imagem* de $w$ — no domínio de $f$. Ou seja, $f$ é biunívoca sempre que, se $f(z_1) = f(z_2)$, então $z_1 = z_2$. Em outras palavras, se $z_1 \neq z_2$, então $f(z_1) \neq f(z_2)$. Isso significa que uma função complexa biunívoca não mapeia pontos distintos no plano $z$ no mesmo ponto no plano $w$. Por exemplo, a função $f(z) = z^2$ não é biunívoca, pois $f(i) = f(-i) = -1$. Se $f$ for uma função complexa biunívoca, a qualquer ponto $w$ na imagem de $f$ está associada uma única pré-imagem no plano $z$, que denotamos por $f^{-1}(w)$. Esta correspondência entre um ponto $w$ e sua pré-imagem $f^{-1}(w)$ define a função inversa de uma função complexa biunívoca.

**Definição 2.4.2 Função Inversa**

Se $f$ for uma função complexa biunívoca com domínio $A$ e imagem $B$, a **função inversa de $f$**, denotada por $f^{-1}$, é a função com domínio $B$ e imagem $A$ definida por $f^{-1}(z) = w$, se $f(w) = z$.

Da Definição 2.4.2 resulta que se um conjunto $S$ for mapeado em um conjunto $S'$ por uma função biunívoca $f$, então $f^{-1}$ mapeia $S'$ em $S$. Em outras palavras, as transformações complexas $f$ e $f^{-1}$ "desfazem" uma à outra. Outro resultado da Definição 2.4.2 é: se $f$ tiver uma função inversa, então $f(f^{-1}(z)) = z$ e $f^{-1}(f(z)) = z$. Isto é, as duas composições $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ são a função identidade.

**EXEMPLO 6 Função Inversa de $f(z) = z + 3i$**

Mostremos que a função complexa $f(z) = z + 3i$ é biunívoca em todo o plano complexo e determinemos uma fórmula para sua função inversa.

**Solução** Uma forma de mostrar que $f$ é biunívoca consiste em mostrar que a igualdade $f(z_1) = f(z_2)$ implica a igualdade $z_1 = z_2$. Para a função $f(z) = z + 3i$, este resultado é imediato, pois $z_1 + 3i = z_2 + 3i$ implica $z_1 = z_2$. Como com qualquer função real, a função inversa de $f$ pode ser obtida algebricamente resolvendo a equação $z = f(w)$ para o símbolo $w$. Resolvendo $z = w + 3i$ para $w$, obtemos $w = z - 3i$, de modo que $f^{-1}(z) = z - 3i$. ❑

Da Seção 2.3, sabemos que a transformação $f(z) = z + 3i$ do Exemplo 6 é uma translação de $3i$ e $f^{-1}(z) = z - 3i$, uma translação de $-3i$. Suponhamos que essas transformações sejam representadas em uma mesma cópia do plano complexo. Como, após a translação de um ponto de $3i$, a translação de sua imagem de $-3i$ devolve o ponto à sua posição original, vemos que as transformações $f$ e $f^{-1}$ "desfazem" uma à outra, como esperado.

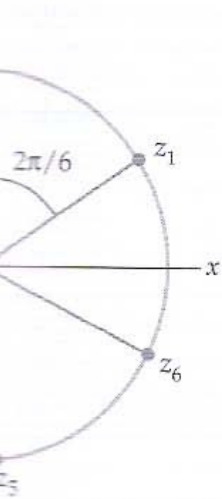



Figura 2.4.9 Pontos mapeados no mesmo ponto por $f(z) = z^6$

**Funções Inversas de $z^n$, $n > 2$** A seguir, descrevemos como obter uma função inversa da função potência $z^n$, $n \geq 2$. Isso requer alguma explicação, pois a função $f(z) = z^n$, $n \geq 2$ *não* é biunívoca. Para comprovar isso, consideremos os pontos $z_1 = re^{i\theta}$ e $z_2 = re^{i(\theta + 2\pi/n)}$, com $r \neq 0$. Como $n \geq 2$, os pontos $z_1$ e $z_2$ são distintos, ou seja, $z_1 \neq z_2$. De (5), temos que $f(z_1) = r^n e^{in\theta}$ e $f(z_2) = r^n e^{i(n\theta+2\pi)} = r^n e^{in\theta} e^{i2\pi} = r^n e^{in\theta}$. Portanto, $f$ não é biunívoca, pois $f(z_1) = f(z_2)$, mas $z_1 \neq z_2$. Na verdade, os distintos $n$ pontos $z_1 = re^{i\theta}$, $z_2 = re^{i(\theta + 2\pi/n)}$, $z_3 = re^{i(\theta + 4\pi/n)}$, ..., $z_n = re^{i(\theta + 2(n-1)\pi/n)}$ são todos mapeados por $f(z) = z^n$ no único ponto $w = r^n e^{in\theta}$. Isso é ilustrado na Figura 2.4.9 para $n = 6$. Os seis pontos $z_1, z_2, ..., z_6$, com mesmo módulo e argumentos que diferem por $2\pi/6 = 2\pi/3$, mostrados na Figura 2.5.9 são todos mapeados no mesmo ponto por $f(z) = z^6$.

A discussão anterior parece implicar que a função $f(z) = z^n$, $n \geq 2$ não tem uma função inversa, pois não é biunívoca. No cálculo elementar nos deparamos com esse problema na definição de funções inversas para certas funções reais. Por exemplo, as funções reais $f(x) = x^2$ e $g(x) = \text{sen}\, x$ não são biunívocas, mas mesmo assim definimos as funções inversas $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e $g^{-1}(x) = \text{arcsen}\, x$. Para podermos definir essas funções inversas, os domínios das funções devem ser restritos a conjuntos nos quais as mesmas são biunívocas. Por exemplo, se definida no intervalo $(-\infty, \infty)$, a função $f(x) = x^2$ não é biunívoca; contudo, passa a ser biunívoca se for definida no intervalo $[0, \infty)$. Da mesma forma, $g(x) = \text{sen}\, x$ não é biunívoca no intervalo $(-\infty, \infty)$, mas é biunívoca no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. A função $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ é a função inversa da função $f(x) = x^2$ definida no intervalo $[0, \infty)$. Como $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ e $\text{Img}(f) = [0, \infty)$, o domínio e a imagem de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ também são o intervalo $[0, \infty)$, como na Figura 2.4.10. De modo similar, $g^{-1}(x) = \text{arcsen}\, x$ é a função inversa da função $g(x) = \text{sen}\, x$ definida no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. O domínio e a imagem de $g^{-1}$ são $[-1, 1]$ e $[-\pi/2, \pi/2]$, respectivamente (Figura 2.4.11). Usamos esta mesma idéia para a função potência complexa $f(z) = z^n$, $n \geq 2$. Ou seja, para definir uma função inversa para $f(z) = z^n$, $n \geq 2$ devemos restringir o domínio de $f$ a um conjunto no qual $f$ é uma função biunívoca. Uma escolha para este "domínio restrito" foi feita no Exemplo 7 para $n = 2$.

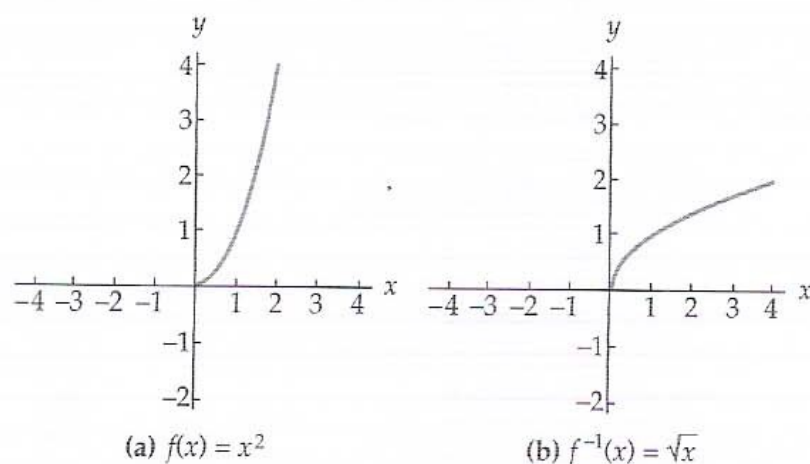



Figura 2.4.10 $f(x) = x^2$ definida em $[0, \infty)$ e sua função inversa

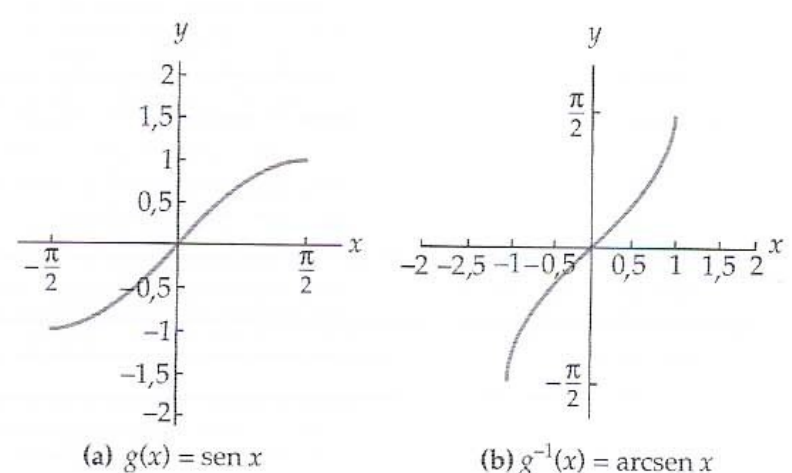



Figura 2.4.11 $g(x) = \text{sen}\, x$ definida em $[-\pi/2, \pi/2]$ e sua função inversa

**EXEMPLO 7 Um Domínio Restrito para $f(z) = z^2$**

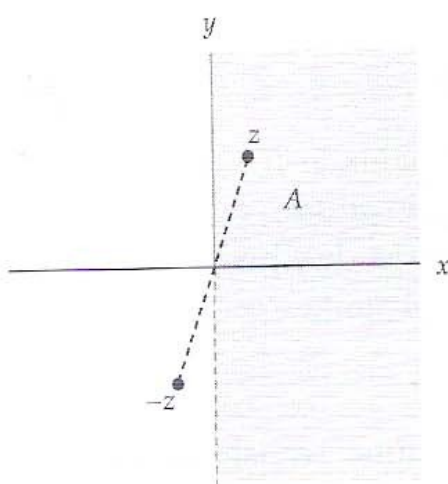



**Figura 2.4.12** Um domínio em que $f(z) = z^2$ é biunívoca

Mostremos que $f(z) = z^2$ é uma função biunívoca no conjunto $A$ definido por $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$, mostrado em cinza na Figura 2.4.12.

**Solução** Como no Exemplo 6, mostramos que $f$ é biunívoca demonstrando que, se $z_1$ e $z_2$ estão em $A$ e se $f(z_1) = f(z_2)$, então $z_1 = z_2$. Suponhamos que $z_1$ e $z_2$ estejam em $A$; assim, podemos escrever $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, com $-\pi/2 < \theta_1 \leq \pi/2$ e $-\pi/2 < \theta_2 \leq \pi/2$. Se $f(z_1) = f(z_2)$, de (1) segue que

$$r_1^2e^{i2\theta_1} = r_2^2e^{i2\theta_2}. \tag{9}$$

De (9), concluímos que os números complexos $r_1^2e^{i\theta_1}$ e $r_2^2e^{i\theta_2}$ têm os mesmos módulo e argumento principal:

$$r_1^2 = r_2^2 \quad \text{e} \quad \text{Arg}\left(r_1^2e^{i2\theta_1}\right) = \text{Arg}\left(r_2^2e^{i2\theta_2}\right). \tag{10}$$

*Lembrete:* Arg $(z)$ está no intervalo $(-\pi, \pi]$.

Como $r_1$ e $r_2$ são positivos, a primeira equação em (10) implica $r_1 = r_2$. Além disso, como $-\pi/2 < \theta_1 \leq \pi/2$ e $-\pi/2 < \theta_2 \leq \pi/2$, segue que $-\pi < 2\theta_1 \leq \pi$ e $-\pi < 2\theta_2 \leq \pi$. Isso significa que $\text{Arg}(r_1^2e^{i2\theta_1}) = 2\theta_1$ e $\text{Arg}(r_2^2e^{i2\theta_2}) = 2\theta_2$. Este fato, combinado com a segunda equação em (10), implica que $2\theta_1 = 2\theta_2$, ou $\theta_1 = \theta_2$. Por conseguinte, concluímos que $z_1 = z_2$, o que prova que $f$ é uma função biunívoca em $A$. ❑

**Uma Inversa de $f(z) = z^2$** No Exemplo 7 vimos que a função quadrática $z^2$ é biunívoca no conjunto $A$ definido por $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$. A Definição 2.4.2 implica que esta função tem uma função inversa bem definida $f^{-1}$. Agora, mostraremos que esta função inversa é a função raiz quadrada principal $z^{1/2}$ da Definição 2.4.1. Para isso, sejam $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\phi}$, onde $\theta$ e $\phi$ são os argumentos principais de $z$ e $w$, respectivamente. Suponhamos que $w = f^{-1}(z)$. Como a imagem de $f^{-1}$ é o domínio de $f$, o argumento principal $\phi$ de $w$ deve satisfazer:

$$-\frac{\pi}{2} < \phi \leq \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Contudo, pela Definição 2.4.2, $f(w) = w^2 = z$. Por conseguinte, $w$ é uma das duas raízes quadradas de $z$ dadas por (6). Ou seja, $w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ ou $w = \sqrt{r}e^{i(\theta+2\pi)/2}$. Assumamos a segunda opção como verdadeira:

$$w = \sqrt{r}e^{i(\theta+2\pi)/2}. \tag{12}$$

Como $\theta = \text{Arg}(z)$, temos $-\pi < \theta \leq \pi$, de modo que $\pi/2 < (\theta + 2\pi)/2 \leq 3\pi/2$. Deste resultado e de (12), concluímos que o argumento principal $\phi$ de $w$ deve satisfazer uma das duas condições: $-\pi < \phi \leq -\pi/2$ ou $\pi/2 < \phi \leq \pi$. Contudo, isso não pode ser verdade, pois de (11) $-\pi/2 < \phi \leq \pi/2$, de modo que a hipótese em (12) deve estar incorreta. Por conseguinte, concluímos que $w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, que é o valor da função raiz quadrada principal dada por (8).

Como $z^{1/2}$ é uma função inversa de $f(z) = z^2$ definida no conjunto $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$, o domínio e a imagem de $z^{1/2}$ são a imagem e o domínio de $f$, respectivamente. Em particular, $\text{Img}(z^{1/2}) = A$, ou seja, a imagem de $z^{1/2}$ é o conjunto de números complexos $w$ que satisfazem $-\pi/2 < \arg(w) \leq \pi/2$. Para determinar $\text{Dom}(z^{1/2})$, precisamos determinar a imagem de $f$. No Exemplo 1, mostramos que $w = z^2$ mapeia o semiplano direito, $\text{Re}(z) \geq 0$, em todo o plano complexo, como indicado na Figura 2.4.3. O conjunto $A$ é igual ao semiplano direito $\text{Re}(z) \geq 0$, excluindo os pontos no raio que emana da origem e contém o ponto $-i$. Ou seja, $A$ não inclui o ponto $z = 0$ e os pontos que satisfazem $\arg(z) = -\pi/2$. Contudo, vimos que a imagem do conjunto $\arg(z) = \pi/2$ — isto é, o eixo imaginário positivo — é igual à imagem do conjunto $\arg(z) = -\pi/2$. Os dois conjuntos são mapeados no eixo real negativo. Como $\arg(z) = \pi/2$ está contido em $A$, a única diferença entre as imagens do conjunto $A$ e do semiplano direito $\text{Re}(z) \geq 0$ é a imagem do ponto $z = 0$, que é o ponto $w = 0$. Ou seja, $w = z^2$ mapeia o conjunto $A$ definido por $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$ em todo o plano complexo, excluído o ponto $w = 0$; por conseguinte, o domínio de $f^{-1}(z) = z^{1/2}$ é todo o plano complexo **C**, excluído 0. Em resumo, mostramos que a função raiz quadrada principal $w = z^{1/2}$ mapeia o plano complexo **C**, excluído 0, no conjunto definido por $-\pi/2 < \arg(w) \leq \pi/2$. Esta transformação é ilustrada na Figura 2.4.13. $w = z^{1/2}$ mapeia a circunferência $|z| = r$, mostrada em cinza na Figura 2.4.13(a), na semicircunferência $|w| = \sqrt{r}$, $-\pi/2 < \arg(w) \leq \pi/2$, mostrada em preto na Figura 2.4.13(b). Além disso, a transformação $w = z^{1/2}$ mapeia o eixo real negativo, mostrado em cinza na Figura 2.4.13(a), no eixo imaginário positivo, mostrado em preto na Figura 2.4.13(b). É claro que, se necessário, a função raiz quadrada principal pode ser estendida para que o ponto 0 seja incluído em seu domínio.

(a) Domínio de $z^{1/2}$ (b) Imagem de $z^{1/2}$

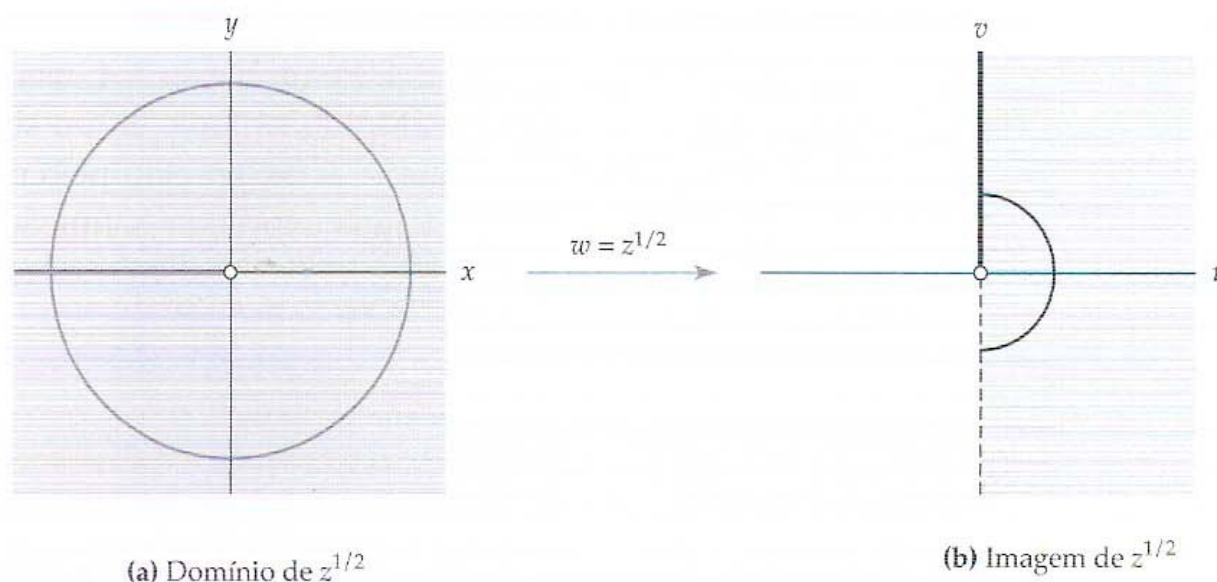



**Figura 2.4.13** Função raiz quadrada principal $w = z^{1/2}$

**Transformação $w = z^{1/2}$** Como uma transformação, a função $z^2$ eleva ao quadrado o módulo de um ponto e dobra o argumento do mesmo. Como a função raiz quadrada principal $z^{1/2}$ é uma função inversa de $z^2$, a transformação $w = z^{1/2}$ toma a raiz quadrada do módulo de um ponto e divide o argumento principal do mesmo por dois. Ou seja, se $w = z^{1/2}$, então $|w| = \sqrt{|z|}$ e $\text{Arg}(w) = \frac{1}{2}\text{Arg}(z)$. Essas relações resultam diretamente de (7) e são úteis na determinação das imagens de conjuntos sob $w = z^{1/2}$.

---

**EXEMPLO 8 Imagem de um Setor Circular sob $w = z^{1/2}$**

Determinemos a imagem do conjunto $S$ definido por $|z| \leq 3$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$, sob a função raiz quadrada principal.

(a) Um setor circular

(b) Imagem do conjunto em (a)

Figura 2.4.14 Transformação $w = z^{1/2}$

**Solução** Seja $S'$ a imagem de $S$ sob $w = z^{1/2}$. Como, para pontos em $S$, $|z| \leq 3$ e como $z^{1/2}$ toma a raiz quadrada do módulo de um ponto, devemos ter $|w| \leq \sqrt{3}$, para pontos em $S'$. Além disso, como, para pontos em $S$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$ e como $z^{1/2}$ toma a raiz quadrada do módulo de um ponto e divide o argumento de um ponto por dois, temos $\pi/4 \leq \arg(w) \leq 3\pi/8$, para pontos $w$ em $S'$. Assim, mostramos que $w = z^{1/2}$ mapeia o conjunto $S$, mostrado em cinza na Figura 2.4.14(a), no conjunto $S'$ mostrado em cinza na Figura 2.4.14(b). □

**Função Raiz $n$-ésima Principal** Modificando o argumento usado no Exemplo 7 para mostrar que a função $f(z) = z^2$ é biunívoca no conjunto definido por $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$, podemos mostrar que a função potência complexa $f(z) = z^n$, $n > 2$ é biunívoca no conjunto definido por

$$-\frac{\pi}{n} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{n}. \tag{13}$$

É relativamente simples verificar que a imagem do conjunto definido por (13) sob a transformação $w = z^n$ é todo o plano complexo $\mathbf{C}$, excluindo $w = 0$. Portanto, existe uma função inversa bem definida para $f$. Em analogia ao caso $n = 2$, esta função inversa de $z^n$ é chamada **função raiz $n$-ésima principal** $z^{1/n}$. O domínio de $z^{1/n}$ é o conjunto dos números complexos $w$ que satisfazem $-\pi/n < \arg(w) \leq \pi/n$. Uma descrição puramente algébrica da função raiz $n$-ésima principal é dada pela fórmula a seguir, que é análoga a (7).

**Definição 2.4.3 Função Raiz $n$-ésima Principal**

Para $n \geq 2$, a função $z^{1/n}$ definida por

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\text{Arg}(z)/n} \tag{14}$$

é denominada **função raiz $n$-ésima principal**.

Vale notar que a função raiz quadrada principal $z^{1/2}$ da Definição 2.4.1 é apenas um caso especial de (14), com $n = 2$. Vale notar também que, na Definição 2.4.3 e na Seção 1.4, usamos o mesmo símbolo $z^{1/n}$ que é usado para representar coisas diferentes. Como no caso do símbolo $z^{1/2}$, o significado de $z^{1/n}$ — raiz $n$-ésima principal ou o conjunto de raízes $n$-ésimas principais — é esclarecido pelo contexto ou de forma explícita.

Fazendo $z = re^{i\theta}$, com $\theta = \text{Arg}(z)$, também podemos expressar a função raiz $n$-ésima principal como

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}, \quad \theta = \text{Arg}(z). \tag{15}$$

---

**EXEMPLO 9 Valores de $z^{1/n}$**

Determinemos o valor da dada função raiz $n$-ésima principal no ponto $z$ especificado.

(a) $z^{1/3}$; $z = i$ (b) $z^{1/5}$; $z = 1 - \sqrt{3}i$

**Solução** Em cada parte, usamos (14).

(a) Para $z = i$, temos $|z| = 1$ e $\text{Arg}(z) = \pi/2$. Substituindo esses valores em (14), com $n = 3$, obtemos

$$i^{1/3} = \sqrt[3]{1}e^{i(\pi/2)/3} = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

(b) Para $z = 1 - \sqrt{3}i$, temos $|z| = 2$ e $\text{Arg}(z) = -\pi/3$. Substituindo esses valores em (14), com $n = 5$, obtemos

$$\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1/5} = \sqrt[5]{2}e^{i(-\pi/3)/5} = \sqrt[5]{2}e^{-i(\pi/15)} \approx 1{,}1236 - 0{,}2388i.$$

□

**Funções Multivalentes**[4] Na Seção 1.4 vimos que um número complexo não nulo $z$ tem $n$ raíze[s] $n$-ésimas distintas no plano complexo. Isso significa que o processo de "tirar a raiz $n$-ésima" de um númer[o] complexo $z$ *não* define uma função complexa, pois aloca um conjunto de $n$ números complexos ao númer[o] complexo $z$. Na Seção 1.4 introduzimos o símbolo $z^{1/n}$ para representar o conjunto das $n$ raízes $n$-ésimas d[e] $z$. Um processo similar é o de determinar o argumento de um número complexo $z$. Como o símbolo arg(... representa um conjunto infinito de valores, também não representa uma função complexa. Esses tipos d[e] operações com números complexos são exemplos de **funções multivalentes**. Esse termo, muitas vezes, or[i]gina confusão, pois uma função multivalente *não* é uma função; por definição, uma função dever ter *u[m] único valor*. Contudo, o termo *função multivalente* é padrão em análise complexa, e o usaremos daqui e[m] diante. Adotaremos a seguinte notação funcional para funções multivalentes:

> ***Notação: Funções multivalentes***
>
> *Na representação de funções multivalentes com a notação funcional, usaremos letras maiúsculas, como $F(z) = z^{1/3}$ ou $G(z) = \arg(z)$. Letras minúsculas, como $f$ ou $g$, serão reservadas para representar funções.*

Esta notação nos ajudará a evitar a confusão associada a símbolos como $z^{1/n}$. Por exemplo, devem[os] assumir que $g(z) = z^{1/3}$ representa a função raiz cúbica principal definida por (14), com $n = 3$, enquan[to] $G(z) = z^{1/3}$ representa a função multivalente que associa as três raízes cúbicas de $z$ ao valor de $z$. Assim, [do] Exemplo 9(a) temos $g(i) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, e do Exemplo 1 da Seção 1.4, $G(z) = \{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, -i$...

**Observações**

(*i*) Em (5), no Conjunto de Exercícios 1.4, definimos uma potência racional de $z$. Uma forma de definir uma função potência $z^{m/n}$, onde $m/n$ é um número racional, consiste em uma composição

---

[4]Estas funções são também denominadas **funções de múltiplos valores**. (N.T.)

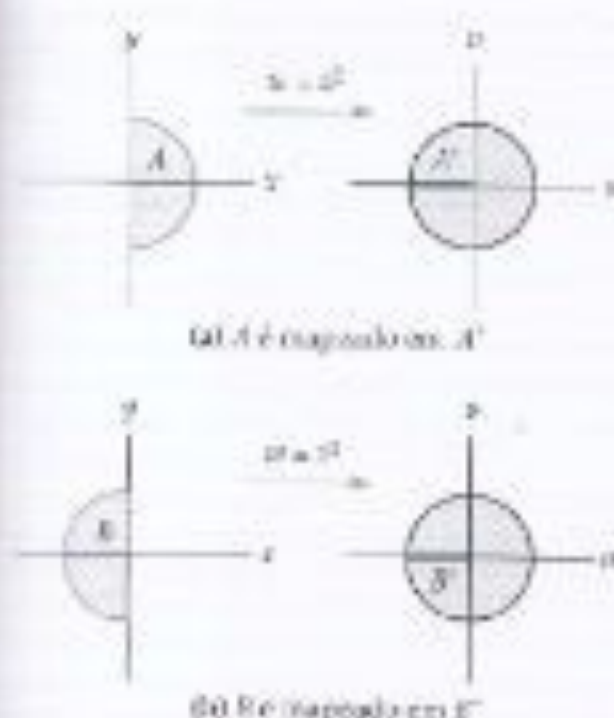
(a) $A$ é mapeado em $A'$

(b) $B$ é mapeado em $B'$

Figura 2.4.15 Transformações $w = z^2$

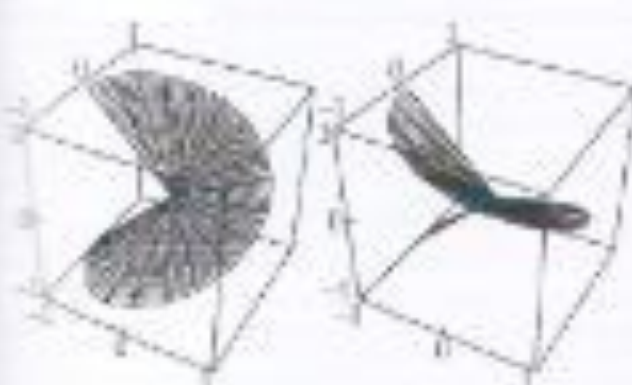
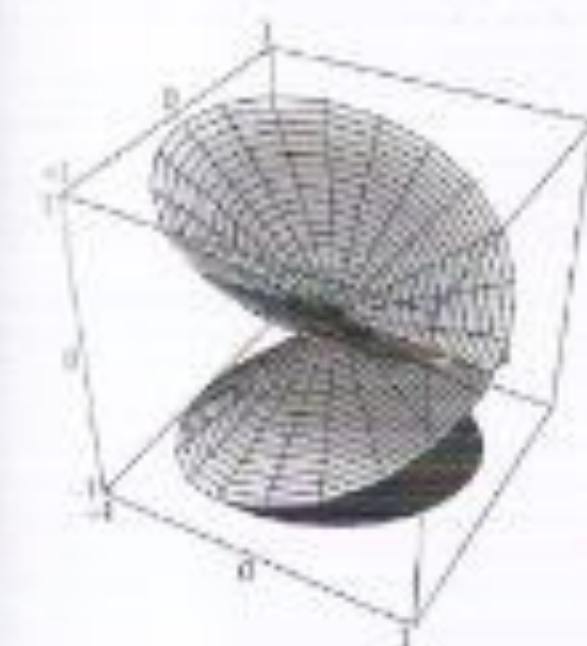
Figura 2.4.16 Discos cortados $A'$ e $B'$

(a) Discos cortados $A'$ e $B'$ no espaço $xyz$

(b) Superfície de Riemann no espaço $xyz$

Figura 2.4.17 Uma superfície de Riemann para $f(z) = z^2$

das funções raiz $n$-ésima principal e potência $z^m$. Ou seja, podemos definir $z^{m/n} = (z^{1/n})^m$. Assim, para $m/n = 2/3$ e $z = 8i$, obtemos $(8i)^{2/3} = 2 + 2\sqrt{3}i$. O emprego de uma raiz que não seja a raiz $n$-ésima principal resulta, possivelmente, em uma função diferente.

(*ii*) O leitor deve ter notado que as transformações lineares complexas estudadas na Seção 2.3 são de visualização muito mais simples que as transformações por funções potências complexas estudadas nesta seção. Em parte, transformações por funções potências complexas são mais intrincadas por não serem funções biunívocas. A visualização de uma transformação complexa do tipo **muitos para um** é difícil, assim como a de funções multivalentes, que são "inversas" de funções de muitos para um. Uma técnica para visualização de funções multivalentes, atribuída ao matemático Bernhard Riemann (1826–1866), consiste na construção de uma **superfície de Riemann** para a transformação. Como uma descrição rigorosa de superfícies de Riemann está além do escopo deste texto, faremos uma discussão informal dessas superfícies.

Iniciamos com a descrição de uma superfície de Riemann para a função quadrática complexa $f(z) = z^2$ definida no disco fechado unitário $|z| \leq 1$. Sabemos que $f(z) = z^2$ não é biunívoca. Do Exemplo 7, concluímos que $f(z) = z^2$ é biunívoca no conjunto $A$ definido por $|z| \leq 1$, $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$. Sob a transformação complexa $w = z^2$, o conjunto $A$, mostrado em cinza na Figura 2.4.15(a), é mapeado no disco fechado unitário $|w| \leq 1$ mostrado em cinza na Figura 2.4.15(a). De modo similar, podemos mostrar que $w = z^2$ é uma transformação um para um do conjunto $B$ definido por $|z| \leq 1$, $\pi/2 < \arg(z) \leq 3\pi/2$, no disco fechado unitário $|w| \leq 1$, como ilustrado na Figura 2.4.15(b). Como o disco unitário $|z| \leq 1$ é a união dos conjuntos $A$ e $B$, a imagem do disco $|z| \leq 1$ sob $w = z^2$ cobre o disco $|w| \leq 1$ duas vezes (uma vez por $A$ e uma vez por $B$). Podemos visualizar essa "cobertura" se considerarmos *dois* discos imagens para $w = z^2$. Sejam $A'$ e $B'$ as imagens de $A$ e $B$ sob $f$, respectivamente, ilustradas na Figura 2.4.15. Agora, imaginemos que os discos $A'$ e $B'$ tenham sido cortados ao longo do eixo real negativo, como indicado na Figura 2.4.16. As fronteiras dos discos cortados $A'$ e $B'$ mostradas em preto na Figura 2.4.16 são, respectivamente, as imagens das fronteiras de $A$ e $B$ mostradas em cinza. Do mesmo modo, as fronteiras tracejadas de $A'$ e $B'$ na Figura 2.4.16 são, respectivamente, as imagens das fronteiras tracejadas de $A$ e $B$. Para construir uma superfície de Riemann para $f(z) = z^2$, empilhamos os discos cortados $A'$ e $B'$ um em cima do outro, no espaço $xyz$, e os unimos colando suas fronteiras. A fronteira preta de $A'$ na Figura 2.4.16 é colada à fronteira tracejada de $B'$ mostrada na mesma figura, e a fronteira tracejada de $A'$ é colada à fronteira preta de $B'$. Ao unir os discos desta forma obtemos a superfície de Riemann ilustrada na Figura 2.4.17. Assumimos que esta superfície está posicionada diretamente acima do disco unitário fechado $|w| \leq 1$. Embora $w = z^2$ não seja uma transformação biunívoca do disco unitário fechado $|z| \leq 1$ ao do disco unitário fechado $|w| \leq 1$, é uma transformação biunívoca do disco unitário fechado $|z| \leq 1$ na superfície de Riemann que acabamos de construir. Além disso, a natureza dois para um da cobertura de $w = z^2$ pode ser visualizada mapeando o disco $|z| \leq 1$ na superfície de Riemann e, então, projetando os pontos na superfície de Riemann perpendicularmente sobre o disco $|w| \leq 1$. Adicionalmente, se revertermos a ordem desse processo, também podemos usar esta superfície de Riemann para auxiliar a visualização da função multivalente $F(z) = z^{1/2}$.

Outra superfície de Riemann interessante é a associada à função multivalente $G(z) = \arg(z)$, definida no disco perfurado $0 < |z| \leq 1$. Para

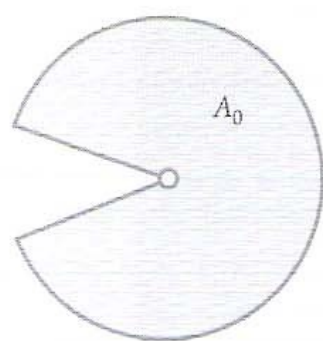
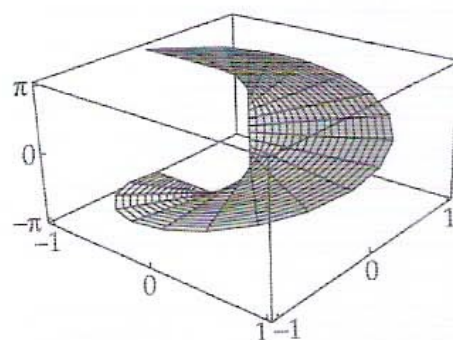
construir essa superfície tiramos uma cópia do disco perfurado $0 < |z| \leq 1$ e a cortamos ao longo do eixo real negativo, como indicado na Figura 2.4.18(a). Chamemos este disco cortado de $A_0$ e o usemos para representar os pontos no domínio escrito, em notação exponencial, como $re^{i\theta}$, com $-\pi < \theta \leq \pi$. Tiremos outra cópia do disco cortado, que chamaremos de $A_1$, e a usemos para representar os pontos no domínio escrito como $re^{i\theta}$, com $\pi < \theta \leq 3\pi$. De modo similar, seja $A_{-1}$ um disco cortado que representa os pontos no domínio escrito como $re^{i\theta}$, com $-3\pi <$ $\theta \leq -\pi$. Prosseguimos dessa forma e produzimos um conjunto infinito de discos cortados ..., $A_{-2}$, $A_{-1}$, $A_0$, $A_1$, $A_2$, ... Em geral, o disco cortado $A_n$ representa pontos no domínio de $G$ expressos como $re^{i\theta}$, com $(2n-1)\pi < \theta \leq (2n+1)\pi$. Agora, no espaço $xyz$, posicionemos os discos $A_n$ de modo que o ponto $re^{i\theta}$, com $(2n-1)\pi < \theta \leq (2n+1)\pi$, fique a uma altura $\theta$ diretamente acima do ponto $re^{i\theta}$ no plano $xy$. A Figura 2.4.18(b) mostra o disco cortado $A_0$ posicionado no espaço $xyz$. A coleção de todos os discos cortados no espaço $xyz$ forma a superfície de Riemann para a função multivalente $G(z) = \arg(z)$, mostrada na Figura 2.4.19. A superfície de Riemann indica como essa função multivalente mapeia o disco perfurado $0 < |z| \leq 1$ no eixo real: uma reta vertical que passa pelo qualquer ponto $z$ em $0 < |z| \leq 1$ cruza a superfície de Riemann em infinitos pontos. As alturas desses pontos de interseção representam as diferentes escolhas para o argumento de $z$. Portanto, ao projetar horizontalmente os pontos de interseção no eixo vertical, vemos as infinitas imagens de $G(z) = \arg(z)$.

(a) Disco cortado $A_0$

(b) $A_0$ posicionado no espaço $xyz$

Figura 2.4.18 Disco cortado $A_0$

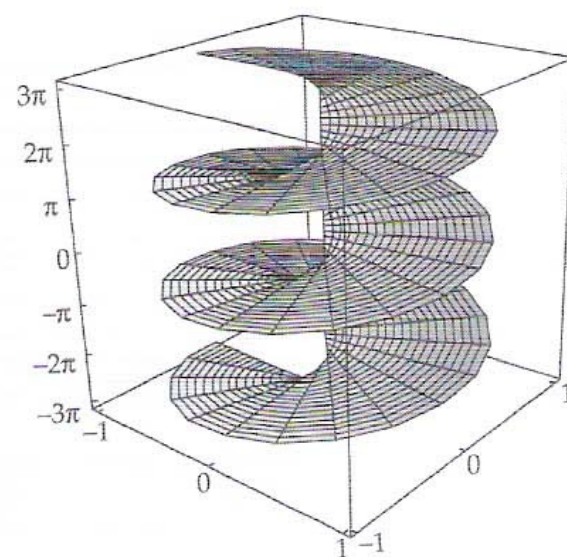



Figura 2.4.19 Superfície de Riemann para $G(z) = \arg(z)$

## CONJUNTO DE EXERCICIOS 2.4 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

### 2.4.1 Função Potência $z^n$

Nos Problemas 1–14, determine a imagem do conjunto dado sob a transformação $w = z^2$. Represente a transformação por meio de gráficos do conjunto e de sua imagem.

1. raio $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$
2. raio $\arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4}$
3. reta $x = 3$
4. reta $y = -5$
5. reta $y = -\dfrac{1}{4}$
6. reta $x = \dfrac{3}{2}$
7. eixo imaginário positivo
8. reta $y = x$
9. arco circular $|z| = \dfrac{1}{2}$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$
10. arco circular $|z| = \dfrac{4}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \dfrac{\pi}{6}$
11. triângulo com vértices $0$, $1$ e $1+i$
12. triângulo com vértices $0$, $1+2i$ e $-1+2i$
13. quadrado com vértices $0$, $1$, $1+i$ e $i$
14. quadrado com vértices $0$, $1$, $1+i$ e $-1+i$

Nos Problemas 15–20, determine a imagem do conjunto dado sob a composição de uma função linear e uma função quadrática.

**15.** raio $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$; $f(z) = 2z^2 + 1 - i$

**16.** segmento de reta de 0 a $-1 + i$; $f(z) = \sqrt{2}z^2 + 2 - i$

**17.** reta $x = 2$; $f(z) = iz^2 - 3$

**18.** reta $y = -3$; $f(z) = -z^2 + i$

**19.** arco circular $|z| = 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$; $f(z) = \frac{1}{4}e^{i\pi/4}z^2$

**20.** triângulo com vértices 0, 1 e $1 + i$; $f(z) = -\frac{1}{4}iz^2 + 1$

**21.** Determine a imagem do raio $\arg(z) = \pi/6$ sob cada uma das seguintes transformações:

(a) $f(z) = z^3$ (b) $f(z) = z^4$ (c) $f(z) = z^5$

**22.** Determine a imagem do primeiro quadrante do plano complexo sob cada uma das seguintes transformações:

(a) $f(z) = z^2$ (b) $f(z) = z^3$ (c) $f(z) = z^4$

**23.** Determine a imagem da região $1 \leq |z| \leq 2$, $\pi/4 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$, mostrada na Figura 2.4.20, sob cada uma das seguintes transformações:

(a) $f(z) = z^2$ (b) $f(z) = z^3$ (c) $f(z) = z^4$

**24.** Determine, sob cada uma das transformações a seguir, a imagem da região mostrada na Figura 2.4.20.

(a) $f(z) = 3z^2 + i$ (b) $f(z) = (i + 1)z^3 + 1$ (c) $f(z) = \frac{1}{2}z^4 - i$

## 2.4.2 Função Potência $z^{1/n}$

Nos Problemas 25–30, use (14) para determinar o valor da função raiz $n$-ésima principal dada no valor especificado para $z$.

**25.** $z^{1/2}$, $z = -i$

**26.** $z^{1/2}$, $z = 2 + i$

**27.** $z^{1/3}$, $z = -1$

**28.** $z^{1/3}$, $z = -3 + 3i$

**29.** $z^{1/4}$, $z = -1 + \sqrt{3}i$

**30.** $z^{1/5}$, $z = -4\sqrt{3} + 4i$

Nos Problemas 31–38, determine a imagem do conjunto dado sob a transformação raiz quadrada principal $w = z^{1/2}$. Represente a transformação por meio de gráficos do conjunto e de sua imagem.

**31.** raio $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

**32.** raio $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$

**33.** eixo imaginário positivo

**34.** eixo real negativo

**35.** arco $|z| = 9$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \pi$

**36.** arco $|z| = \frac{4}{7}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$

**37.** parábola $x = \frac{9}{4} - \frac{y^2}{9}$

**38.** parábola $x = \frac{y^2}{10} - \frac{5}{2}$

**39.** Determine a imagem da região mostrada na Figura 2.4.21 sob a função raiz quadrada principal $w = z^{1/2}$.

**40.** Determine a imagem da região mostrada na Figura 2.4.22 sob a função raiz quadrada principal $w = z^{1/2}$. (Seja cuidadoso nas proximidades do eixo real negativo!)

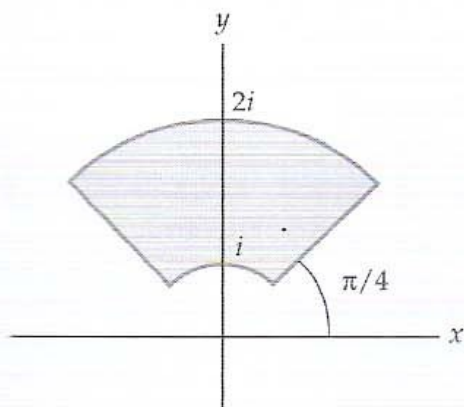



**Figura 2.4.20** Figura para os Problemas 23 e 24

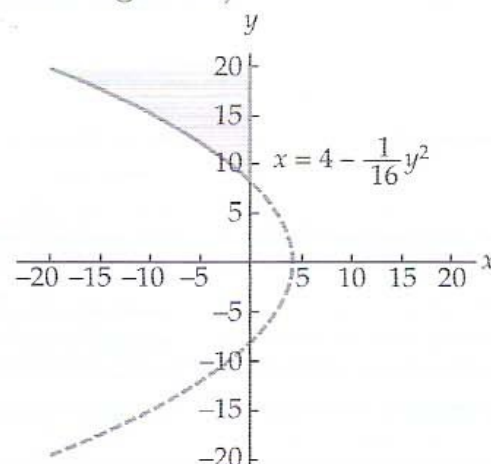



**Figura 2.4.21** Figura para o Problema 39

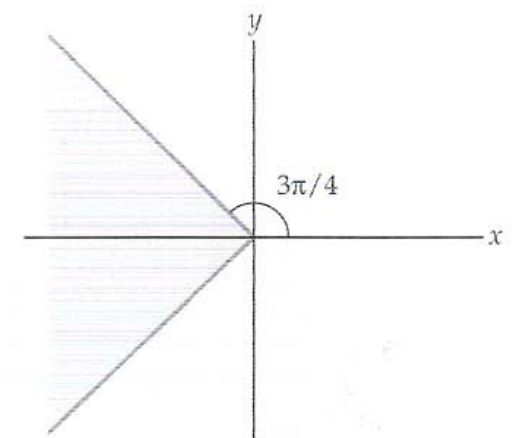



**Figura 2.4.22** Figura para o Problema 40

**Foco em Conceitos**

**41.** Use um procedimento similar ao empregado no Exemplo 2 e determine a imagem da hipérbole $xy = k$, $k \neq 0$, sob $w = z^2$.

**42.** Use um procedimento similar ao empregado no Exemplo 2 e determine a imagem da hipérbole $x^2 - y^2 = k$, $k \neq 0$, sob a transformação $w = z^2$.

**43.** Determine dois conjuntos no plano complexo que são mapeados pela função $w = z^2$ no raio $\arg(z) = \pi/2$.

**44.** Determine dois conjuntos no plano complexo que são mapeados pela função $w = z^2$ no conjunto limitado pelas curvas $u = -v$, $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$ e pelo eixo real $v = 0$.

**45.** No Exemplo 2, mostramos que a imagem de uma reta vertical $x = k$, $k \neq 0$ sob $w = z^2$ é a parábola $u = k^2 - \dfrac{v^2}{4k^2}$. Use este resultado, seu conhecimento de transformações lineares e o fato de que $w = -(iz)^2$ para provar que a imagem de uma reta horizontal $y = k$, $k \neq 0$ é a parábola $u = -\left(k^2 - \dfrac{v^2}{4k^2}\right)$.

**46.** Determine três conjuntos no plano complexo que, sob a transformação $w = z^3$, são mapeados no conjunto $\arg(w) = \pi$.

**47.** Determine quatro conjuntos no plano complexo que, sob a transformação $w = z^4$, são mapeados na circunferência $|w| = z^4$.

**48.** Determine a imagem da reta $y = mx$ sob a transformação $w = z^n$, para $n \geq 2$.

**49.** (a) Proceda como no Exemplo 6 e mostre que a função linear complexa $f(z) = az + b$, $a \neq 0$ é biunívoca em todo o plano complexo.

(b) Determine uma fórmula para a função inversa da função em (a).

**50.** (a) Proceda como no Exemplo 6 e mostre que a função complexa $f(z) = \dfrac{a}{z} + b$, $a \neq 0$, é biunívoca no conjunto $|z| > 0$.

(b) Determine uma fórmula para a função inversa da função em (a).

**51.** Determine a imagem do semiplano $\text{Im}(z) \geq 0$ sob cada uma das seguintes funções raízes $n$-ésimas principais:

(a) $f(z) = z^{1/2}$ (b) $f(z) = z^{1/3}$ (c) $f(z) = z^{1/4}$

**52.** Determine a imagem da região $|z| \leq 8$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$ sob cada uma das seguintes funções raízes $n$-ésimas principais:

(a) $f(z) = z^{1/2}$ (b) $f(z) = z^{1/3}$ (c) $f(z) = z^{1/4}$

**53.** Determine uma função que mapeia todo o plano complexo, excluindo 0, no conjunto $2\pi/3 \leq \arg(w) \leq 4\pi/3$.

**54.** Leia a parte (*ii*) das Observações e descreva a construção de uma superfície de Riemann para a função $f(z) = z^3$.

Nos Problemas 55 e 56, (**a**) use transformações para determinar limitantes superior e inferior para o módulo da função $f(z)$, definida no conjunto $S$. Isto é, determine valores reais $L$ e $M$ tais que $L \leq |f(z)| \leq M$, para todo $z$ em $S$, e (**b**) determine valores complexos $z_0$ e $z_1$ em $S$ tais que $f(z_0) = L$ e $f(z_1) = M$.

**55.** $f(z) = 2iz^2 - i$; $S$ é o quarto de disco $|z| \leq 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$.

**56.** $f(z) = \frac{1}{3}z^2 + 1 - i$; $S$ é o conjunto definido por $2 \leq |z| \leq 3$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$.

## 2.5 Função Recíproca

***Ao Professor:*** nesta seção, estudaremos a transformação complexa $w = 1/z$. Esta seção pode ser pulada sem afetar o desenvolvimento dos tópicos nos Capítulos 3–6. Contudo, tópicos apresentados nesta seção serão usados no estudo de transformações conformes no Capítulo 7.

Nas Seções 2.3 e 2.4 examinamos alguns tipos especiais de funções polinomiais complexas como transformações do plano complexo. Em analogia com funções reais, definimos **funções racionais complexas** como funções da forma $f(z) = p(z)/q(z)$, onde $p(z)$ e $q(z)$ são funções polinomiais complexas. Nesta seção estudaremos a função racional complexa mais simples, a função recíproca $1/z$, como uma transformação do plano complexo. Uma propriedade importante da transformação recíproca é mapear certas retas em círculos.

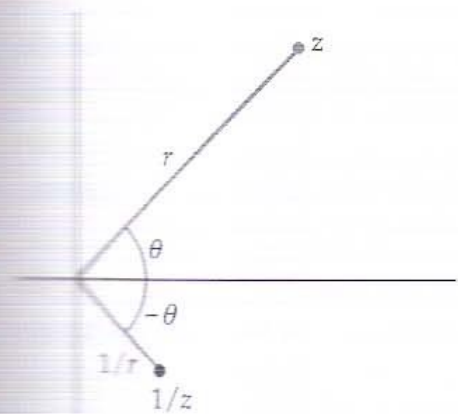



Figura 2.5.1 Transformação recíproca

**Função Recíproca** A função $1/z$, cujo domínio é o conjunto de todos os números complexos não nulos, é denominada **função recíproca**. Para estudar a função recíproca como uma transformação $w = 1/z$, primeiro a expressamos na notação exponencial. Dado $z \neq 0$, se fizermos $z = re^{i\theta}$, obtemos

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}. \tag{1}$$

De (1), vemos que o módulo de $w$ é o recíproco do módulo de $z$ e que o argumento de $w$ é o negativo do argumento de $z$. Por conseguinte, a função recíproca mapeia um ponto no plano $z$, de coordenadas $(r, \theta)$, em um ponto no plano $w$, de coordenadas $(1/r, -\theta)$. Na Figura 2.5.1 ilustramos a relação entre $z$ e $w = 1/z$ na mesma cópia do plano complexo. Como veremos, uma maneira simples de visualizar a função recíproca como uma transformação complexa consiste em uma composição de *inversão na circunferência unitária* e *reflexão em relação ao eixo real*. A seguir, definiremos e analisaremos cada uma dessas transformações.

**Inversão na Circunferência Unitária** A função

$$g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}, \tag{2}$$

cujo domínio é o conjunto de todos os números complexos não nulos, é denominada **inversão na circunferência unitária**. Descreveremos esta transformação considerando, separadamente, as imagens de pontos *na* circunferência unitária, pontos *fora* da circunferência unitária e pontos no *interior* da circunferência unitária. Consideremos, primeiro, um ponto $z$ na circunferência unitária. Como $z = 1 \cdot e^{i\theta}$, temos, de (2), que $g(z) = \frac{1}{1}e^{i\theta} = z$. Portanto, cada ponto na circunferência unitária é mapeado por $g$ nele próprio. Se, por outro lado, $z$ for um número complexo não nulo que não está na circunferência unitária, podemos escrevê-lo como $z = re^{i\theta}$, com $r \neq 1$. Quando $r > 1$ (ou seja, $z$ está fora da circunferência unitária), temos $|g(z)| = \left|\frac{1}{r}e^{i\theta}\right| = \frac{1}{r} < 1$. Consequentemente, a imagem sob $g$ de um ponto $z$ fora da circunferência unitária é um ponto no interior da circunferência unitária. Reciprocamente, se $r < 1$ (isto é, se $z$ estiver no interior da circunferência unitária), $|g(z)| = \frac{1}{r} > 1$, e concluímos que se $z$ estiver no interior da circunferência unitária sua imagem sob $g$ está fora circunferência unitária. A transformação $w = e^{i\theta}/r$ é representada na Figura 2.5.2. A circunferência $|z| = 1$, mostrada em cinza-escuro na Figura 2.5.2(a), é mapeada na circunferência $|w| = 1$, mostrada em preto na Figura 2.5.2(b). Além disso, $w = e^{i\theta}/r$ mapeia a região mostrada em cinza-claro na Figura 2.5.2(a) na região mostrada em cinza-claro na Figura 2.5.2(b), e a região em cinza-escuro na Figura 2.5.2(a), na região mostrada em cinza-escuro na Figura 2.5.2(b).

Encerramos a discussão da inversão na circunferência unitária observando, de (2), que os argumentos de $z$ e de $g(z)$ são iguais. Por conseguinte, se $z_1 \neq 0$ for um ponto com módulo $r$ no plano $z$, $g(z_1)$ é o único ponto no plano $w$ com módulo $1/r$ posicionado em um raio que emana da origem e faz um ângulo $\arg(z_1)$ com o eixo $u$ positivo, como ilustrado na Figura 2.5.2. Como os módulos de $z$ e de $g(z)$ são inversamente proporcionais, quanto mais distante um ponto $z$ estiver de 0 no plano $z$ mais próximo de 0 estará sua imagem $g(z)$ no plano $w$ e, reciprocamente, quanto mais próximo $z$ for de 0, mais distante de 0 será $g(z)$.

(a) Pontos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ no plano $z$ (b) Imagens de $z_1$, $z_2$ e $z_3$ no plano $w$

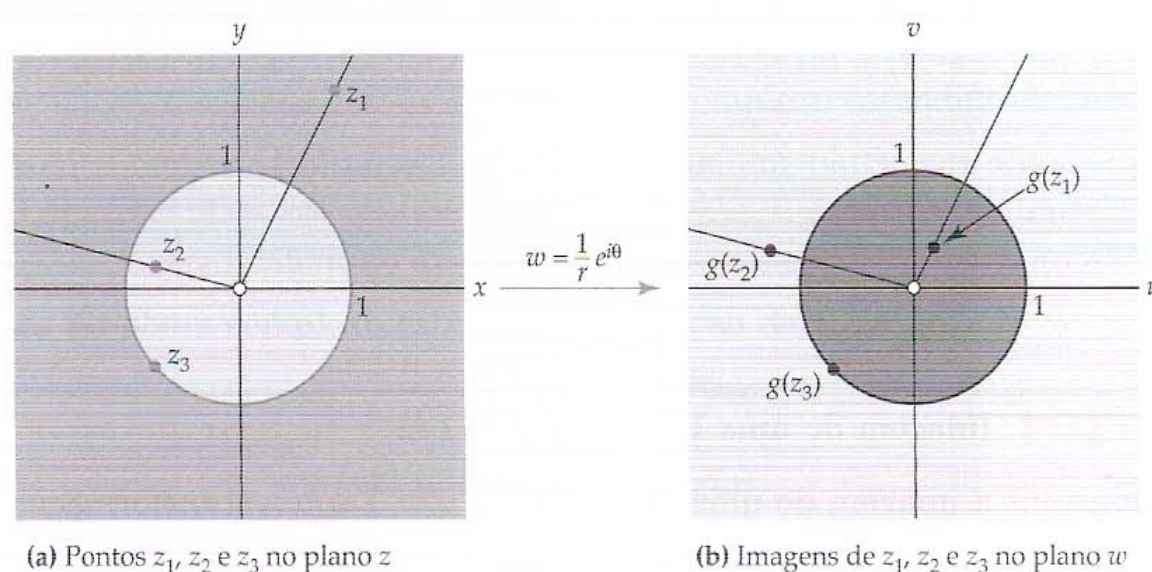



**Figura 2.5.2** Inversão na circunferência unitária

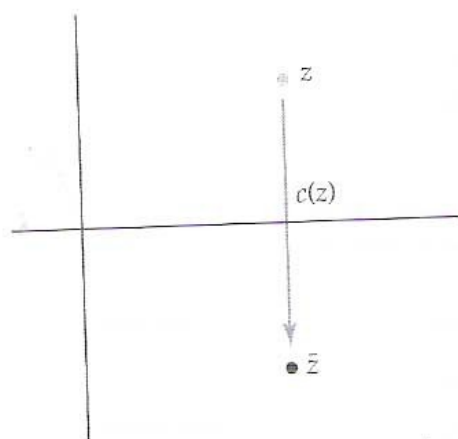



**Figura 2.5.3** Conjugação complexa

**Conjugação Complexa** A outra transformação complexa que auxilia a descrição da transformação recíproca é uma reflexão em relação ao eixo real. Sob essa transformação, a imagem de um ponto $(x, y)$ é $(x, -y)$. É simples verificar que essa transformação complexa é dada pela função $c(z) = \bar{z}$, que denominamos **função conjugação complexa**. Na Figura 2.5.3 ilustramos a relação entre $z$ e sua imagem $c(z)$ na mesma cópia do plano complexo. Substituindo o símbolo $z$ por $re^{i\theta}$, podemos expressar a função conjugação complexa como $c(z) = \overline{re^{i\theta}} = \bar{r}\overline{e^{i\theta}}$. Como $r$ é real, $\bar{r} = r$. Além disso, do Problema 34 do Conjunto de Exercícios 2.1 temos $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Portanto, a função conjugação complexa pode ser escrita como $c(z) = re^{-i\theta}$.

**Transformação Recíproca** A função recíproca $f(z) = 1/z$ pode ser escrita como a composição de inversão na circunferência unitária e conjugação complexa. Usando as formas exponenciais $c(z) = re^{-i\theta}$ e $g(z) = e^{i\theta}/r$ dessas funções, a composição $c \circ g$ é dada por:

$$c(g(z)) = c\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Comparando essa expressão com (1), vemos que $c(g(z)) = f(z) = 1/z$. Isso implica que, como uma transformação, a função recíproca primeiro inverte na circunferência unitária e, depois, reflete em relação ao eixo real.

## *Imagem de um Ponto sob a Transformação Recíproca*

*Seja $z_0$ um ponto não nulo no plano complexo. Se os pontos $w_0 = 1/z_0$ e $z_0$ forem posicionados na mesma cópia do plano, $w_0$ será o ponto obtido:*

(*i*) *invertendo $z_0$ na circunferência unitária e, a seguir,*
(*ii*) *refletindo o resultado em relação ao eixo real.*

---

EXEMPLO 1 **Imagem de uma Semicircunferência sob $w = 1/z$**

Determinemos a imagem da semicircunferência $|z| = 2$, $0 \le \arg(z) \le \pi$ sob a transformação recíproca $w = 1/z$.

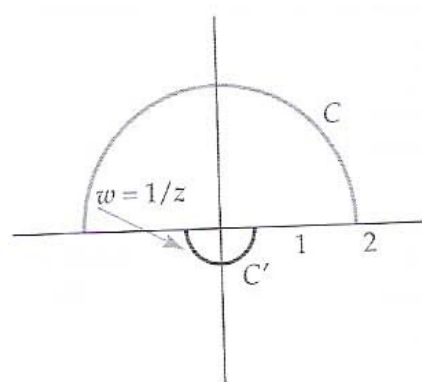



**Figura 2.5.4** Transformação recíproca

**Solução** Sejam, respectivamente, $C$ e $C'$ a semicircunferência e sua imagem sob $w = 1/z$. Para determinar $C'$, primeiro invertemos $C$ na circunferência unitária e, a seguir, refletimos o resultado em relação ao eixo real. Sob inversão na circunferência unitária, pontos com módulo 2 têm imagens com módulo $\frac{1}{2}$. Além disso, a inversão em pontos na circunferência unitária não afeta seus argumentos. Consequentemente, a imagem de $C$ sob inversão na circunferência unitária é a semicircunferência $|w| = \frac{1}{2}$, $0 \le \arg(w) \le \pi$. A reflexão desse conjunto em relação ao eixo real consiste em mudar o sinal do argumento de um ponto sem alterar o módulo do mesmo. Assim, a imagem após a reflexão em relação ao eixo real é a semicircunferência $|w| = \frac{1}{2}$, $-\pi \le \arg(w) \le 0$. Essa transformação é ilustrada na Figura 2.5.4, em uma única cópia do plano complexo, onde a semicircunferência $C$ mostrada em cinza é mapeada, por $w = 1/z$, na semicircunferência $C'$ mostrada em preto. □

Empregando raciocínio similar ao usado no Exemplo 1, podemos mostrar que a função recíproca mapeia a circunferência $|z| = k$, $k \neq 0$ na circunferência $|w| = 1/k$. Como ilustrado no próximo exemplo, a função recíproca também mapeia certas retas em circunferências.

---

EXEMPLO 2 **Imagem de uma Reta sob $w = 1/z$**

Determinemos a imagem de uma reta vertical $x = 1$ sob a transformação recíproca $w = 1/z$.

**Solução** A reta vertical $x = 1$ consiste no conjunto de pontos $z = 1 + iy$, $-\infty < y < \infty$. Depois de substituir o símbolo $z$ por $1 + iy$ em $w = 1/z$ e simplificar o resultado, obtemos

$$w = \frac{1}{1+iy} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{y}{1+y^2}i.$$

Por conseguinte, a imagem da reta vertical $x = 1$ sob $w = 1/z$ consiste em todos os pontos $u + iv$ que satisfazem:

$$u = \frac{1}{1+y^2}, \quad v = \frac{-y}{1+y^2}, \quad \text{e} \quad -\infty < y < \infty. \tag{3}$$

Podemos descrever esta imagem por meio de uma única equação cartesiana, se eliminarmos a variável $y$. De (3), notamos que $v = -yu$. A primeira equação em (3) implica $u \neq 0$, de modo que podemos reescrever esta equação como $y = -v/u$. Agora, substituímos $y = -v/u$ na primeira equação em (3), simplificamos o resultado e obtemos a equação quadrática $u^2 - u + v^2 = 0$. Completando o quadrado na variável $u$, vemos que a imagem dada em (3) corresponde a:

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}, \ u \neq 0. \tag{4}$$

Figura 2.5.5 Transformação recíproca

A equação em (4) define uma circunferência com centro em $(\frac{1}{2}, 0)$ e raio $\frac{1}{2}$. Contudo, como $u \neq 0$, o ponto $(0, 0)$ *não* está na imagem. Usando a variável complexa $w = u + iv$, podemos descrever esta imagem como $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $w \neq 0$. Representaremos esta imagem usando uma única cópia do plano complexo. Na Figura 2.5.5, a reta $x = 1$, mostrada em cinza, é mapeada por $w = 1/z$ na circunferência $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, excluído o ponto $w = 0$, que é mostrada em preto. ❑

A solução no Exemplo 2 é um pouco insatisfatória, pois a imagem não é toda a circunferência $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Isto ocorreu porque pontos na reta $x = 1$ com módulos extremamente grandes são mapeados em pontos na circunferência $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ que são extremamente próximos de 0; contudo, não existe um ponto na reta $x = 1$ que seja mapeado exatamente em 0. Para obter toda a circunferência como imagem de uma reta devemos considerar a função recíproca definida no sistema de números complexos estendido.

Nas Observações da Seção 1.5, vimos que o sistema de números complexos estendido consiste em todos os pontos no plano complexo e no ponto ideal $\infty$. No contexto de transformações, este conjunto de pontos é, em geral, referido como **plano complexo estendido**. Nesta discussão, a importante propriedade do plano complexo estendido é a correspondência (discutida na Seção 1.5) entre pontos no plano complexo estendido e pontos no plano complexo. Em particular, pontos no plano complexo estendido que são próximos do ponto ideal $\infty$ correspondem a pontos no plano complexo com módulos extremamente grandes.

Usamos esta correspondência para estender a função recíproca a uma função cujos domínio e imagem são o plano complexo estendido. Como (1) já define a função recíproca para todos os pontos $z \neq 0$ ou $\infty$ no plano complexo estendido, ampliamos esta definição especificando as imagens de 0 e $\infty$. Uma forma natural de determinar a imagem desses pontos consiste em considerar as imagens de pontos próximos. Observemos que se $z = re^{i\theta}$ for um ponto próximo de 0, $r$ é um número real positivo pequeno. Portanto, $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ é um ponto cujo módulo $1/r$ é grande. Ou seja, no plano complexo estendido, se $z$ for um ponto próximo de 0, $w = 1/z$ é um ponto próximo do ponto ideal $\infty$. Assim, é razoável definir a função recíproca $f(z) = 1/z$ no plano complexo estendido de modo que $f(0) = \infty$. Da mesma forma, notamos que se $z$ for um ponto próximo de $\infty$ no plano complexo estendido, $f(z)$ é um ponto próximo de 0. Logo, também é razoável definir a função recíproca $f(z) = 1/z$ no plano complexo estendido de modo que $f(\infty) = 0$.

**Definição 2.5.1 Função Recíproca no Plano Complexo Estendido**

A **função recíproca no plano complexo estendido** é a função definida por

$$f(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{se } z \neq 0 \text{ ou } \infty \\ \infty, & \text{se } z = 0 \\ 0, & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Em vez de introduzir uma nova notação, usaremos a notação $1/z$ para representar tanto a função recí-proca como a função recíproca no plano complexo estendido. Sempre que o ponto ideal $\infty$ for mencionado, devemos assumir que $1/z$ representa a função recíproca definida no plano complexo estendido.

---

EXEMPLO 3 **Imagem de uma Reta sob $w = 1/z$**

Determinemos a imagem da reta vertical $x = 1$ sob a função recíproca no plano complexo estendido.

**Solução** Primeiro, notamos que como a reta $x = 1$ é um conjunto ilimitado no plano complexo, o ponto ideal $\infty$ está na reta no plano complexo estendido. No Exemplo 2 concluímos que a imagem de pontos $z \neq \infty$ na reta $x = 1$ é a circunferência $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, excluído o ponto $w = 0$. Portanto, para determinar a imagem da reta sob a função recíproca no plano complexo estendido precisamos apenas determinar a imagem do ponto ideal. Da Definição 2.5.1 temos $f(\infty) = 0$, de modo que $w = 0$ é a imagem do ponto ideal. Isso "preenche" o ponto que faltava na circunferência $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Dessa forma, a reta vertical $x = 1$ é mapeada pela função recíproca no plano complexo estendido em toda a circunferência $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Esse mapeamento pode ser representado pela Figura 2.5.5 com o "buraco" em $w = 0$ preenchido. ❑

Como o ponto ideal $\infty$ está em qualquer reta vertical no plano complexo estendido, concluímos que sob a função recíproca no plano complexo estendido a imagem de qualquer reta vertical $x = k$, $k \neq 0$, é toda a circunferência $\left|w - \dfrac{1}{2k}\right| = \left|\dfrac{1}{2k}\right|$ (Problema 23 do Conjunto de Exercícios 2.5). De modo similar, também podemos mostrar que retas horizontais são mapeadas em circunferências por $w = 1/z$. Agora, resumamos essas propriedades de transformação de $w = 1/z$.

### *Transformando Retas com $w = 1/z$*

A função recíproca no plano complexo estendido mapeia:

(*i*) *a reta vertical $x = k$, $k \neq 0$, na circunferência*

$$\left|w - \frac{1}{2k}\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|, \quad e \tag{5}$$

(*ii*) *a reta horizontal $y = k$, $k \neq 0$, na circunferência*

$$\left|w + \frac{1}{2k}i\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|. \tag{6}$$

Essas duas propriedades de transformação da função recíproca são ilustradas na Figura 2.5.6. As retas verticais $x = k$, $k \neq 0$, mostradas em cinza na Figura 2.5.6(a), são mapeadas por $w = 1/z$ em circunfe-rências centradas no eixo real e mostradas em preto na Figura 2.5.6(b). A imagem da reta $x = k$, $k \neq 0$, contém o ponto $(1/k, 0)$. Logo, vemos que a reta vertical $x = 2$, mostrada na Figura 2.5.6(a), é mapeada

(a) Retas verticais e horizontais (b) Imagens das retas em (a)

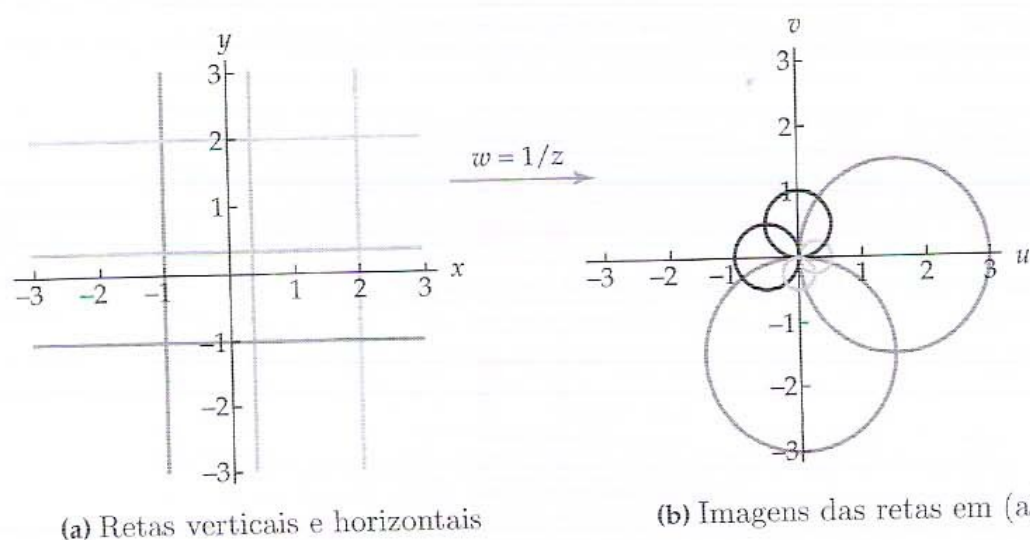



**Figura 2.5.6** Imagens de retas verticais e horizontais sob a transformação recíproca

na circunferência centrada no eixo real que contém o ponto $(\frac{1}{2}, 0)$, mostrada na Figura 2.5.6(b), e assim por diante. De modo similar, retas horizontais $y = k$, $k \neq 0$, mostradas em cinza na Figura 2.5.6(a) são mapeadas, por $w = 1/z$, nas circunferências centradas no eixo imaginário e mostradas em preto na Figura 2.5.6(b). Como a imagem da reta $y = k$, $k \neq 0$, contém o ponto $(0, -1/k)$, temos que a imagem da reta $y = 2$, mostrada na Figura 2.5.6(a), é a circunferência centrada no eixo imaginário que contém o ponto $(0, -\frac{1}{2})$, mostrada na Figura 2.5.6(b), e assim por diante.

---

EXEMPLO 4 **Transformando uma Fita Semi-infinita**

(a) Fita semi-infinita $S$

(b) Imagem de $S$

Figura 2.5.7 Transformação recíproca

Determinemos, sob $w = 1/z$, a imagem da fita semi-infinita horizontal definida por $1 \leq y \leq 2$, $x > 0$.

**Solução** Seja $S$ a fita semi-infinita horizontal definida por $1 \leq y \leq 2$, $x \geq 0$. A fronteira de $S$ consiste no segmento de reta $x = 0$, $1 \leq y \leq 2$ e nas duas semirretas $y = 1$ e $y = 2$, $0 \leq x < \infty$. Primeiro, determinemos as imagens dessas curvas de fronteira. O segmento de reta $x = 0$, $1 \leq y \leq 2$ também pode ser descrito como o conjunto $1 \leq |z| < 2$, $\arg(z) = \pi/2$. Como $w = 1/z$, temos $\frac{1}{2} \leq |w| \leq 1$. Além disso, de (1), temos $\arg(w) = \arg(1/z) = -\arg(z)$, de modo que $\arg(w) = -\pi/2$. Portanto, a imagem do segmento de reta $x = 0$, $1 \leq y \leq 2$, é o segmento de reta no eixo $v$, de $-\frac{1}{2}\,i$ a $-i$. Agora, consideremos a semirreta horizontal $y = 1$, $0 \leq x < \infty$. Fazendo $k = 1$ em (6), vemos que a imagem desta semirreta é um arco na circunferência $|w + \frac{1}{2}i| = \frac{1}{2}$. Como os argumentos de pontos na semirreta satisfazem $0 < \arg(z) \leq \pi/2$, os argumentos de pontos em sua imagem satisfazem $-\pi/2 \leq \arg(w) < 0$. Além disso, o ponto ideal $\infty$ está na semirreta, de modo que o ponto $w = 0$ está na imagem. Portanto, vemos que a imagem da semirreta $y = 1$, $0 \leq x < \infty$, é o arco de circunferência definido por $|w + \frac{1}{2}i| = \frac{1}{2}$, $-\pi/2 \leq \arg(w) \leq 0$. De modo similar, determinamos que a imagem da semirreta horizontal $y = 2$, $0 \leq x < \infty$, é o arco de circunferência $|w + \frac{1}{4}i| = \frac{1}{4}$, $-\pi/2 \leq \arg(w) \leq 0$. Para concluir, observamos que, de (6), toda semirreta $y = k$, $1 \leq k \leq 2$, posicionada entre as semirretas de fronteira $y = 1$ e $y = 2$, na fita $S$ é mapeada em um arco de circunferência $\left|w + \dfrac{1}{2k}i\right| = \dfrac{1}{2k}$, $-\pi/2 \leq \arg(w) \leq 0$, posicionado entre os arcos de circunferências $|w + \frac{1}{2}i| = \frac{1}{2}$ e $|w + \frac{1}{4}i| = \frac{1}{4}$, $-\pi/2 \leq \arg(w) \leq 0$.

Por conseguinte, a fita semi-infinita $S$, mostrada em cinza na Figura 2.5.7(a), é mapeada, pela transformação complexa $w = 1/z$, no conjunto $S'$ mostrado em cinza na Figura 2.5.7(b). ❑

## Observações

É uma tarefa simples comprovar que a função recíproca $f(z) = 1/z$ é biunívoca. Portanto, $f$ tem uma função inversa bem definida $f^{-1}$. Para determinar uma fórmula para a função inversa $f^{-1}(z)$, resolvemos a equação $z = f(w)$ para $w$. O resultado é $f^{-1}(z) = 1/z$. Esta constatação amplia nosso entendimento da transformação complexa $w = 1/z$. Por exemplo, vimos que a imagem da reta $x = 1$ sob a transformação recíproca é a circunferência $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Como $f^{-1}(z) = 1/z = f(z)$, a imagem da circunferência $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ sob a transformação recíproca é a reta $u = 1$. Da mesma forma, concluímos que as circunferências $\left|z - \dfrac{1}{2k}\right| = \left|\dfrac{1}{2k}\right|$ e $\left|z + \dfrac{1}{2k}i\right| = \left|\dfrac{1}{2k}\right|$ são mapeadas nas retas $x = k$ e $y = $ k, respectivamente.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.5 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–10, determine a imagem do dado conjunto sob a transformação recíproca $w = 1/z$ no plano complexo estendido.

1. semicircunferência $|z| = 5$
2. semicircunferência $|z| = \frac{1}{2}$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq 3\pi/2$

**3.** semicircunferência $|z| = 3$, $-\pi/4 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$

**4.** quarto de circunferência $|z| = \frac{1}{4}$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq \pi$

**5.** anel $\frac{1}{3} \leq |z| \leq 2$

**6.** região $1 \leq |z| \leq 4$, $0 \leq \arg(z) \leq 2\pi/3$

**7.** raio $\arg(z) = \pi/4$

**8.** segmento de reta de $-1$ a $1$, no eixo real, excluído o ponto $z = 0$

**9.** reta $y = 4$

**10.** reta $x = \frac{1}{6}$

Nos Problemas 11–14, use as Observações do final da Seção 2.5 e determine a imagem do dado conjunto sob a transformação recíproca $w = 1/z$ no plano complexo estendido.

**11.** circunferência $|z + i| = 1$

**12.** circunferência $|z + \frac{1}{3}i| = \frac{1}{3}$

**13.** circunferência $|z - 2| = 2$

**14.** circunferência $|z + \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$

Nos Problemas 15–18, determine a imagem do dado conjunto $S$ sob a transformação $w = 1/z$ no plano complexo estendido.

**15.**

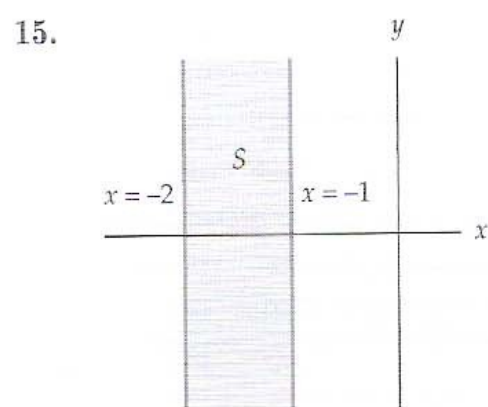



**Figura 2.5.8** Figura para o Problema 15

**16.**

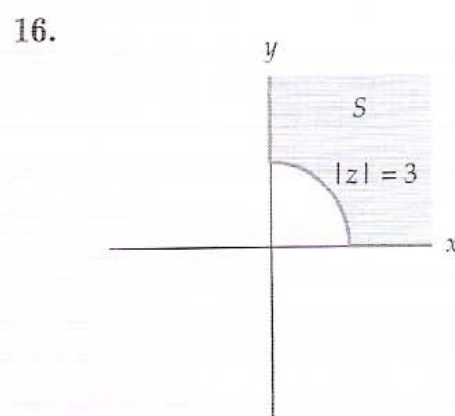



**Figura 2.5.9** Figura para o Problema 16

**17.**

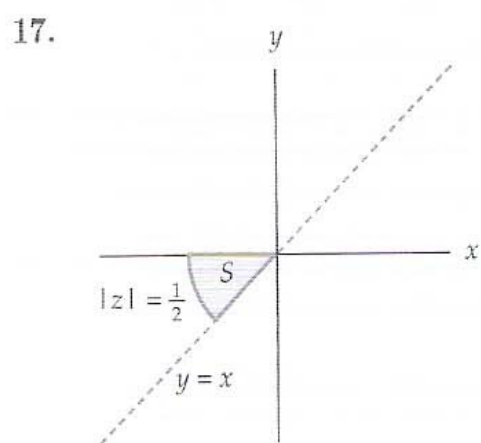



**Figura 2.5.10** Figura para o Problema 17

**18.**

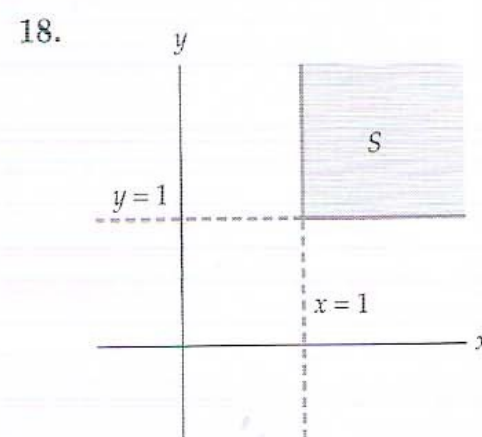



**Figura 2.5.11** Figura para o Problema 18

**19.** Considere a função $h(z) = \dfrac{2i}{z} + 1$, definida no plano complexo estendido.

(a) Usando o fato de que $h$ é uma composição da função recíproca $f(z) = 1/z$ e da função linear $g(z) = 2iz + 1$, ou seja, $h(z) = g(f(z))$, descreva, em palavras, a ação da transformação $w = h(z)$.

(b) Determine a imagem da reta $x = 4$ sob $w = h(z)$.

(c) Determine a imagem da circunferência $|z + 2| = 2$ sob $w = h(z)$.

**20.** Considere a função $h(z) = \dfrac{1}{2iz - 1}$, definida no plano complexo estendido.

(a) Usando o fato de que $h$ é uma composição da função linear $g(z) = 2iz - 1$ e da função recíproca $f(z) = 1/z$, ou seja, $h(z) = f(g(z))$, descreva, em palavras, a ação da transformação $w = h(z)$.

(b) Determine a imagem da reta $y = 1$ sob $w = h(z)$.

(c) Determine a imagem da circunferência $|z + i| =$ Ð sob $w = h(z)$.

**21.** Considere a função $h(z) = 1/z^2$, definida no plano complexo estendido.

(a) Escreva $h$ como uma composição da função recíproca e da função quadrática.

(b) Determine a imagem da circunferência $\left|z + \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$ sob a transformação $w = h(z)$.

(c) Determine a imagem da circunferência $|z - 1| = 1$ sob a transformação $w = h(z)$.

**22.** Considere a função $h(z) = \dfrac{3i}{z^2} + 1 + i$, definida no plano complexo estendido.

(a) Escreva $h$ como uma composição da função recíproca e da função quadrática.

(b) Determine a imagem da circunferência $\left|z + \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$ sob a transformação $w = h(z)$.

(c) Determine a imagem da circunferência $|z - 1| = 1$ sob a transformação $w = h(z)$.

## Foco em Conceitos

**23.** Mostre que a imagem da reta $x = k$, $k \neq 0$, sob a transformação recíproca definida no plano complexo estendido, é a circunferência $\left|w - \dfrac{1}{2k}\right| = \left|\dfrac{1}{2k}\right|$.

**24.** Segundo as Observações na Seção 2.5, como $f(z) = 1/z$ é sua própria função inversa, a transformação $w = 1/z$ no plano complexo estendido mapeia a circunferência $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ na reta $\text{Re}(w) = 1$. Comprove este fato diretamente usando as partes real e imaginária de $f$, como no Exemplo 1.

**25.** Se $A$, $B$, $C$ e $D$ forem números reais, o conjunto de pontos no plano que satisfazem a equação

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0 \tag{7}$$

é denominado **circunferência generalizada**.

(a) Mostre que, se $A = 0$, a circunferência generalizada é uma reta.

(b) Sejam $A \neq 0$ e $\Delta = B^2 + C^2 - 4AD$. Calcule o quadrado em $x$ e $y$ e mostre que uma circunferência generalizada é uma circunferência com centro em $\left(\dfrac{-B}{2A}, \dfrac{-C}{2A}\right)$ e raio $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2A}$, desde que $\Delta > 0$. (Se $\Delta < 0$, a circunferência generalizada é, com frequência, denominada *circunferência imaginária*.)

**26.** Neste problema, mostraremos que a imagem de uma circunferência generalizada (7) sob a transformação recíproca $w = 1/z$ é uma circunferência generalizada.

(a) Usando as equações $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, reescreva (7) em coordenadas polares.

(b) Mostre que, na forma polar, a função recíproca $w = 1/z$ é dada por

$$w = \frac{1}{r}\left(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta\right).$$

(c) Seja $w = u + iv$. Note que, da parte (b), $u = \dfrac{1}{r}\cos\theta$ e $v = -\dfrac{1}{r}\,\text{sen}\,\theta$. Agora, usando estas equações, reescreva a equação da parte (a) em termos de $u$ e $v$.

(d) Conclua, das partes (a)–(c), que a imagem da circunferência generalizada (7) sob $w = 1/z$ é a circunferência generalizada dada por:

$$D\left(u^2 + v^2\right) + Bu - Cv + A = 0. \tag{8}$$

**27.** Considere a reta $L$ dada pela equação $Bx + Cy + D = 0$.

(a) Determine, usando os Problemas 25 e 26, quando a imagem da reta $L$ sob a transformação recíproca $w = 1/z$ é uma reta.

(b) Se a imagem da reta $L$ for uma reta $L'$, qual é a inclinação de $L'$? Qual é a relação entre esta inclinação e a de $L$?

(c) Determine, usando os Problemas 25 e 26, quando a imagem da reta $L$ é uma circunferência.

(d) Se a imagem da reta $L$ for uma circunferência $S'$, determine o centro e o raio de $S'$.

**28.** Considere a circunferência $S$ dada pela equação $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, com $B^2 + C^2 - 4AD > 0$.

(a) Determine, usando os Problemas 25 e 26, quando a imagem da circunferência $S$ é uma reta.

(b) Determine, usando os Problemas 25 e 26, quando a imagem da circunferência $S$ é uma circunferência.

(c) Se a imagem de $S$ for uma circunferência $S'$, determine o centro e o raio de $S'$. Qual a relação entre estes valores e os do centro e raio de $S$?

Nos Problemas 29 e 30, (**a**) use transformações para determinar limitantes superior e inferior para o módulo da função $f(z)$ especificada, definida no dado conjunto $S$. Ou seja, determine valores reais $L$ e $M$ tais que $L \leq |f(z)| \leq M$ para todo $z$ em $S$, e (**b**) determine valores complexos $z_0$ e $z_1$ em $S$ tais que $f(z_0) = L$ e $f(z_1) = M$.

**29.** $f(z) = \dfrac{1+i}{z} + 2i$; $S$ é o anel $1 \leq |z| \leq 2$.

**30.** $f(z) = \dfrac{1}{z} + i$; $S$ é o semiplano $x \geq 2$.

## 2.6 Limites e Continuidade

O mais importante conceito em cálculo elementar é o de limite. De forma intuitiva, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que valores $f(x)$ da função $f$ podem ser feitos arbitrariamente próximos do número real $L$ se valores de $x$ forem escolhidos suficientemente próximos do número real $x_0$, mas não iguais a $x_0$. Na análise real, os conceitos de continuidade, derivada e integral definida são *todos* baseados no conceito de limite. Limites complexos têm um papel semelhante na análise complexa. O conceito de um limite complexo é similar ao de um limite real: $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ significa que valores $f(z)$ da função $f$ podem ser feitos arbitrariamente próximos do número complexo $L$ se valores de $z$ forem escolhidos suficientemente próximos do número complexo $z_0$, mas não iguais a $z_0$. Embora guardem aparente semelhança, existe uma fundamental diferença entre estes dois conceitos de limite. Em um limite real, há duas direções em que $x$ pode se aproximar de $x_0$ na reta real: da esquerda ou da direita. Em um limite complexo, no entanto, há infinitas direções em que $z$ pode se aproximar de $z_0$ no plano complexo. Para que um limite complexo exista, cada direção em que $z$ se aproxima de $z_0$ deve levar ao mesmo valor de limite.

*Nesta seção, definiremos o limite de uma função complexa, examinaremos algumas de suas propriedades e apresentaremos o conceito de continuidade para funções de uma variável complexa.*

### 2.6.1 Limites

**Limites Reais** A descrição de um limite real, dada na introdução da seção, representa apenas uma definição intuitiva deste conceito. Para uma definição rigorosa de um limite real devemos especificar de forma precisa o que significam as frases "arbitrariamente próximo de" e "suficientemente próximo de". Primeiro, observamos que uma colocação precisa desses termos implica o uso de valores absolutos, pois $|a - b|$ mede a distância entre dois pontos na reta de números reais. Nesta reta, os pontos $x$ e $x_0$ são "próximos" se $|x - x_0|$ for um número positivo pequeno. De modo similar, os pontos $f(x)$ e $L$ são "próximos" se $|f(x) - L|$ for um número positivo pequeno. Em matemática é costume usar as letras gregas minúsculas $\varepsilon$ e $\delta$ para representar números positivos pequenos. Assim, a expressão "$f(x)$ pode ser feito arbitrariamente próximo de $L$" se torna precisa se dissermos que, para qualquer número real $\varepsilon > 0$, $x$ pode ser escolhido de modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Na definição intuitiva anterior, exigimos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que o valor de $x$ for "suficientemente próximo de $x_0$, mas não igual a $x_0$". Isso significa que existe alguma distância $\delta > 0$ com a propriedade de que, se $x$ estiver a uma distância de, no máximo, $\delta$ de $x_0$ e $x \neq x_0$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. O número real $\delta$ não é único e, em geral, depende da escolha de $\varepsilon$, da função $f$ e do ponto $x_0$. Em resumo, temos a seguinte definição precisa do limite real:

#### *Limite de uma Função Real $f(x)$*

*O limite de $f$ à medida que $x$ tende a $x_0$ existe e é igual a $L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.* (1)

A interpretação geométrica de (1) é mostrada na Figura 2.6.1. Nesta figura, vemos que no intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, excluindo o ponto $x = x_0$, o gráfico da função $y = f(x)$ assume valores entre as retas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, que são as retas tracejadas mais claras na Figura 2.6.1. Na terminologia de transformações, o intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, excluindo o ponto $x = x_0$, mostrado em cinza na Figura 2.6.1, é mapeado no conjunto mostrado em preto no eixo $y$, no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Para que este limite exista, a relação ilustrada na Figura 2.6.1 deve ocorrer para qualquer escolha de $\varepsilon > 0$. Na Figura 2.6.1, notamos que, se for escolhido um valor menor para $\varepsilon$, um menor valor de $\delta$ será necessário.

**Figura 2.6.1** Interpretação geométrica de um limite real

**Limites Complexos** Um limite complexo é, fundamentalmente, o mesmo que um limite real, exceto pelo fato de ser baseado na noção de "proximidade" no plano com-

plexo. Como, no plano complexo a distância entre dois pontos $z_1$ e $z_2$ é dada pelo módulo da diferença entre $z_1$ e $z_2$, a definição precisa de um limite complexo envolve $|z_1 - z_2|$. Por exemplo, a frase "$f(z)$ pode ser feito arbitrariamente próximo do número complexo $L$" pode ser posta, de forma precisa, como: para todo $\varepsilon > 0$, $z$ pode ser escolhido de modo que $|f(z) - L| < \varepsilon$. Como o módulo de um número complexo é um número *real*, na definição de limite complexo dada a seguir, tanto $\varepsilon$ como $\delta$ representam números *reais* positivos de valores pequenos. O análogo complexo de (1) é:

**Definição 2.6.1 Limite de uma Função Complexa**

Seja $f$ uma função complexa definida em uma vizinhança deletada de $z_0$, e seja $L$ um número complexo. **O limite de $f$ à medida que $z$ tende a $z_0$ existe e é igual a $L$**, o que é representado como $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, se, para todo $\varepsilon > 0$, existir algum $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

(a) Vizinhança deletada $\delta$ de $z_0$

(b) Vizinhança $\varepsilon$ de $L$

Figura 2.6.2 Interpretação geométrica de um limite complexo

No caso de funções complexas, recorremos ao conceito de transformações complexas para entendermos a Definição 2.6.1. Recordemos, da Seção 1.5, que o conjunto de pontos $w$ no plano complexo que satisfazem $|w - L| < \varepsilon$ é denominado vizinhança de $L$, e que este conjunto consiste em todos os pontos no plano complexo que se encontram no interior de uma circunferência de raio $\varepsilon$ e centro no ponto $L$, mas não nesta circunferência. Recordemos, ainda, da Seção 1.5, que o conjunto de pontos que satisfazem a desigualdade $0 < |z - z_0| < \delta$ é denominado vizinhança deletada de $z_0$ e consiste em todos os pontos na vizinhança $|z - z_0| < \delta$, excluindo o ponto $z_0$. Pela Definição 2.6.1, se $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ e se $\varepsilon$ for um número positivo qualquer, existe uma vizinhança deletada de $z_0$ de raio $\delta$ com a seguinte propriedade: para todo ponto $z$ nesta vizinhança deletada, $f(z)$ está na vizinhança $\varepsilon$ de $L$. Em outras palavras, $f$ mapeia a vizinhança deletada $0 < |z - z_0| < \delta$ no plano $z$ na vizinhança $|w - L| < \varepsilon$ no plano $w$. Na Figura 2.6.2(a), a vizinhança deletada de $z_0$, mostrada em cor, é mapeada no conjunto mostrado em cinza escuro na Figura 2.6.2(b). Como exige a Definição 2.6.1, a imagem está na vizinhança $\varepsilon$ de $L$, mostrada em cinza claro na Figura 2.6.2(b).

Limites reais e complexos têm muitas propriedades comuns, mas existe pelo menos uma diferença fundamental. No caso de funções reais, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$. Ou seja, há duas direções de onde $x$ pode se aproximar de $x_0$ na reta real: da direita (denotada por $x \to x_0^+$) ou da esquerda (denotada por $x \to x_0^-$). O limite real existe se e somente se estes dois limites forem iguais. Por exemplo, consideremos a função real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

O limite de $f$ à medida que $x$ se aproxima de 0 não existe, pois $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$, mas $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$, como ilustrado na Figura 2.6.3.

Para limites de funções complexas, $z$ pode se aproximar de $z_0$ de *qualquer* direção no plano complexo, ou seja, ao longo de qualquer curva ou percurso que passa por $z_0$, como indica a Figura 2.6.4. Para que

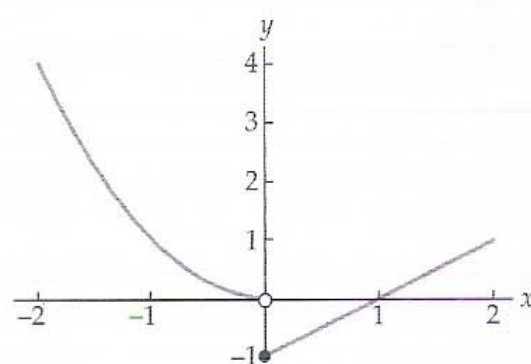



**Figura 2.6.3** O limite de $f$ à medida que $x$ tende a 0 não existe

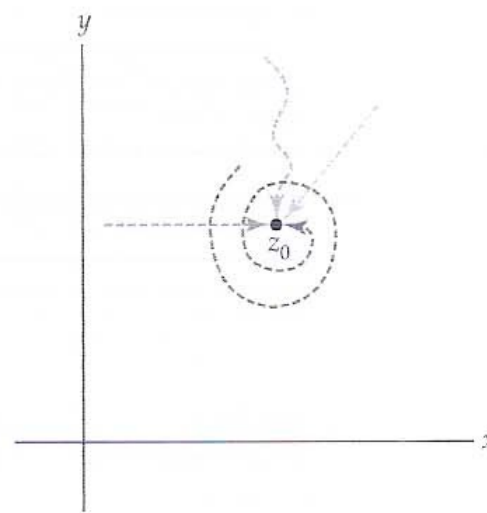



**Figura 2.6.4** Diferentes percursos de aproximação a $z_0$ em um limite

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ exista e seja igual a $L$, é necessário que $f(z)$ se aproxime do número complexo $L$ ao longo de qualquer curva possível que passe por $z_0$. Este conceito pode ser expresso em forma negativa como:

### *Critério para a Não Existência de um Limite*

*Se $f$ se aproximar de dois números complexos $L_1 \neq L_2$ ao longo de duas curvas ou percursos diferentes que passam por $z_0$, então $\lim_{z \to z_0} f(z)$ não existe.*

---

EXEMPLO 1 **Um Limite que Não Existe**

Mostremos que $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ não existe.

**Solução** Para mostrar que este limite não existe determinaremos dois percursos diferentes para $z$ se aproximar de 0 e que levam a valores diferentes para $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$. Primeiro, façamos $z$ se aproximar de 0 ao longo do eixo real. Ou seja, consideremos números reais da forma $z = x + 0i$, onde o número real $x$ tende a 0. Para esses pontos, temos

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 0i}{x - 0i} = \lim_{x \to 0} 1 = 1. \qquad (2)$$

Façamos, agora, $z$ tender a 0 pelo eixo imaginário, ou seja, $z = 0 + iy$, onde o número real $y$ tende a 0. Neste caso, obtemos:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{y \to 0} \frac{0 + iy}{0 - iy} = \lim_{y \to 0} (-1) = -1. \qquad (3)$$

Como os valores em (2) e (3) não são iguais, concluímos que $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ não existe. □

O limite $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ do Exemplo 1 não existe porque os valores de $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ à medida que $z$ tende a 0 pelos eixos real e imaginário não são iguais. Contudo, mesmo que estes valores fossem iguais, o limite complexo podia não existir (Problemas 19 e 20 do Conjunto de Exercícios 2.6). Em geral, o cálculo de valores de $\lim_{z \to z_0} f(z)$ à medida que $z$ se aproxima de $z_0$ em diferentes direções, como no Exemplo 1, pode provar que um limite *não existe*, mas não pode ser usado para provar que um limite *existe*. Para provar que um limite existe, devemos usar a Definição 2.6.1 diretamente. Isto requer a demonstração que para todo número real $\varepsilon$ existe uma escolha adequada de $\delta$ que atende as exigências da Definição 2.6.1. Provas deste tipo são comumente conhecidas como "provas épsilon-delta". Mesmo no caso de funções relativamente simples provas épsilon-delta podem se revelar muito trabalhosas. Como este é um texto introdutório, restringiremos a atenção ao que consideremos exemplos simples de provas épsilon-delta.

---

EXEMPLO 2 **Prova Épsilon-Delta de um Limite**

Provemos que $\lim_{z \to 1+i} (2 + i)z = 1 + 3i$.

**Solução** Segundo a Definição 2.6.1, $\lim_{z \to 1+i} (2 + i)z = 1 + 3i$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|(2 + i)z - (1 + 3i)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |z - (1 + i)| < \delta$. A prova de que este limite existe requer que determinemos um valor adequado de $\delta$ para um dado valor de $\varepsilon$. Em outras palavras, para um dado valor de $\varepsilon$, devemos determinar um número positivo $\delta$ tal que, se $0 < |z - (1 + i)| < \delta$, $|(2 + i)z - (1 + 3i)| < \varepsilon$. Uma forma de determinar $\delta$ consiste em trabalhar "de trás para a frente". A idéia é iniciar com a desigualdade:

$$|(2 + i)z - (1 + 3i)| < \varepsilon \qquad (4)$$

e, então, usar propriedades de números complexos e do módulo para manipular esta desigualdade até que envolva a expressão $|z - (1 + i)|$. Por conseguinte, um passo inicial natural consiste em fatorar $(2 + i)$ do lado esquerdo de (4):

$$|2+i| \cdot \left| z - \frac{1+3i}{2+i} \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Como $|2+i| = \sqrt{5}$ e $\dfrac{1+3i}{2+i} = 1+i$, (5) é equivalente a:

$$\sqrt{5} \cdot |z-(1+i)| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |z-(1+i)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Logo, (6) indica que devemos tomar $\delta = \varepsilon/\sqrt{5}$. Vale lembrar que a escolha do valor de $\delta$ não é única. A escolha $\delta = \varepsilon/\sqrt{5}$ é um resultado das operações algébricas particulares que usamos para obter (6). Uma vez determinado o valor de $\delta$, apresentamos, a seguir, a prova formal de que $\lim_{z \to 1+i} (2+i)z = 1+3i$ não indica como a escolha de $\delta$ foi feita:

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon/\sqrt{5}$. Se $0 < |z-(1+i)| < \delta$, temos $|z-(1+i)| < \varepsilon/\sqrt{5}$. Multiplicando os dois lados desta desigualdade por $|2+i| = \sqrt{5}$, obtemos:

$$|2+i| \cdot |z-(1+i)| < \sqrt{5} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad |(2+i)z-(1+3i)| < \varepsilon.$$

Portanto, $|(2+i)z-(1+3i)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |z-(1+i)| < \delta$. Com isso, segundo a Definição 2.6.1, provamos que $\lim_{z \to 1+i} (2+i)z = 1+3i$. ❑

**Limites Reais de Múltiplas Variáveis** A prova épsilon-delta do Exemplo 2 ilustra o importante fato de que, embora a teoria de limites complexos seja baseada na Definição 2.6.1, esta não fornece um método conveniente para o *cálculo* de limites. A seguir, no Teorema 2.6.1, apresentamos um método prático para o *cálculo* de limites complexos. Além de ser uma útil ferramenta computacional, este teorema também estabelece uma importante conexão entre o limite *complexo* de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e os limites reais de funções de valores reais das duas variáveis reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Como toda função complexa é completamente determinada pelas funções reais $u$ e $v$, não é surpresa que o limite de uma função complexa possa ser expresso em termos dos limites reais de $u$ e $v$.

Antes de enunciar o Teorema 2.6.1, recordemos alguns conceitos importantes relacionados aos limites de funções de valores reais de duas variáveis reais $F(x, y)$. A seguinte definição de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x, y) = L$ é análoga tanto a (1) como à Definição 2.6.1.

### *Limite da Função Real $F(x, y)$*

*O limite de $F$ à medida que $(x, y)$ tende a $(x_0, y_0)$ existe e é igual ao número real $L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|F(x, y) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$.* (7)

A expressão $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ em (7) representa a distância entre os pontos $(x, y)$ e $(x_0, y_0)$ no plano cartesiano. Usando (7), é relativamente fácil provar que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 1 = 1, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0, \text{ e } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0. \tag{8}$$

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = L$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y) = M$, (7) também pode ser usada para mostrar que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cF(x, y) = cL, \quad c \text{ é uma constante real,} \tag{9}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (F(x, y) \pm G(x, y)) = L \pm M, \tag{10}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x, y) \cdot G(x, y) = L \cdot M \tag{11}$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{F(x, y)}{G(x, y)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \tag{12}$$

Limites que envolvem expressões polinomiais em $x$ e $y$ podem ser calculados com facilidade combinando (8) com as propriedades (9)–(12). Por exemplo,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3xy^2 - y) = 3\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} y\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} y\right) - \lim_{(x,y)\to(1,2)} y$$
$$= 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 10.$$

Em geral, se $p(x, y)$ for uma função polinomial de duas variáveis, (8)–(12) podem ser usadas para mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} p(x, y) = p(x_0, y_0). \tag{13}$$

Se $p(x, y)$ e $q(x, y)$ forem duas funções polinomiais de duas variáveis e $q(x_0, y_0) \neq 0$, (13) e (12) fornecem:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{p(x,y)}{q(x,y)} = \frac{p(x_0,y_0)}{q(x_0,y_0)}. \tag{14}$$

A seguir apresentamos o Teorema 2.6.1, que relaciona os limites reais de $u(x, y)$ e $y(x, y)$ ao limite complexo de $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Uma prova épsilon-delta do Teorema 2.6.1 é dada no Apêndice I.

**Teorema 2.6.1 Partes Real e Imaginária de um Limite**

Sejam $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $L = u_0 + iv_0$. Entao, $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ se e somente se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

O Teorema 2.6.1 tem diversas aplicações. A principal e mais importante é permitir o cálculo de numerosos limites complexos a partir do simples cálculo de um par de limites reais.

---

EXEMPLO 3 **Uso do Teorema 2.6.1 no Cálculo de um Limite**

Usemos o Teorema 2.6.1 para calcular $\lim_{z\to 1+i} (z^2 + i)$.

**Solução** Como $f(z) = z^2 + i = x^2 - y^2 + (2xy + 1)i$, podemos aplicar o Teorema 2.6.1 com $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy + 1$ e $z_0 = 1 + i$. Identificando $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$, calculamos os seguintes limites reais para determinar $u_0$ e $v_0$:

$$u_0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 - y^2) \quad \text{e} \quad v_0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (2xy + 1).$$

Como estes dois limites envolvem apenas funções polinomiais de múltiplas variáveis, podemos usar (13) para obter:

$$u_0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 - y^2) = 1^2 - 1^2 = 0$$

e

$$v_0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (2xy + 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 3,$$

de modo que $L = u_0 + iv_0 = 0 + i(3) = 3i$. Logo, $\lim_{z\to 1+i} (z^2 + i) = 3i$. □

Além de permitir o cálculo de limites específicos, o Teorema 2.6.1 é uma importante ferramenta teórica para a dedução de várias propriedades de limites complexos a partir de propriedades de limites reais. O seguinte teorema fornece um exemplo desse procedimento.

**Teorema 2.6.2 Propriedades de Limites Complexos**

Sejam $f$ e $g$ funções complexas. Se $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ e $\lim_{z \to z_0} g(z) = M$, então

($i$) $\lim_{z \to z_0} cf(z) = cL$, $c$ é uma constante complexa

($ii$) $\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = L \pm M$

($iii$) $\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = L \cdot M$ e

($iv$) $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

**Prova de ($i$)** Cada parte do Teorema 2.6.2 resulta do Teorema 2.6.1 e das propriedades (9)–(12). Provaremos a parte ($i$) e deixaremos a prova das outras como exercício.

Sejam $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = u_0 + iv_0$ e $c = a + ib$. Como $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, o Teorema 2.6.1 garante que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

De (9) e (10), temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (au(x, y) - bv(x, y)) = au_0 - bv_0$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (bu(x, y) + av(x, y)) = bu_0 + av_0.$$

Contudo, $\text{Re}(c\, f(z)) = au(x, y) - bv(x, y)$ e $\text{Im}(c\, f(z)) = bu(x, y) + av(x, y)$. Portanto, pelo Teorema 2.6.1,

$$\lim_{z \to z_0} cf(z) = au_0 - bv_0 + i\,(bu_0 + av_0) = cL. \qquad \square$$

Os resultados dos Teoremas 2.6.2($ii$) e 2.6.2($iii$) são válidos para qualquer soma finita de funções ou produto finito de funções, respectivamente. Após o estabelecimento de alguns limites complexos, podemos usar o Teorema 2.6.2 para calcular um grande número de limites de forma bem direta. Os dois limites básicos de que precisamos são os da **função constante complexa** $f(z) = c$, onde $c$ é uma constante complexa, e da **função identidade complexa** $f(z) = z$. O Problema 45 do Conjunto de Exercícios 2.6 pede que seja mostrado que:

$$\lim_{z \to z_0} c = c, \quad c \text{ é uma constante complexa,} \tag{15}$$

e

$$\lim_{z \to z_0} z = z_0. \tag{16}$$

O exemplo a seguir ilustra como estes limites básicos podem ser combinados com o Teorema 2.6.2 no cálculo de limites de funções racionais complexas.

---

EXEMPLO 4 **Cálculo de Limites com o Teorema 2.6.2**

Usemos o Teorema 2.6.2 e os limites básicos em (15) e (16) para calcular os limites

(a) $\lim_{z \to i} \dfrac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1}$

(b) $\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \dfrac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}$

**Solução**

(a) Segundo o Teorema 2.6.2($iii$) e (16), temos

$$\lim_{z \to i} z^2 = \lim_{z \to i} z \cdot z = \left(\lim_{z \to i} z\right) \cdot \left(\lim_{z \to i} z\right) = i \cdot i = -1.$$

De modo similar, $\lim_{z\to i} z^4 = i^4 = 1$. Usando estes limites, os Teoremas 2.6.2($i$) e 2.6.2($ii$) e o limite em (16), obtemos:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to i}\left((3+i)z^4 - z^2 + 2z\right) &= (3+i)\lim_{z\to i} z^4 - \lim_{z\to i} z^2 + 2\lim_{z\to i} z\\ &= (3+i)(1) - (-1) + 2(i)\\ &= 4+3i,\end{aligned}$$

e $\lim_{z\to i}(z+1) = 1+i$. Portanto, do Teorema 2.6.2($i$), temos:

$$\lim_{z\to i}\frac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1} = \frac{\lim_{z\to i}\left((3+i)z^4 - z^2 + 2z\right)}{\lim_{z\to i}(z+1)} = \frac{4+3i}{1+i}.$$

Após o cálculo da divisão, obtemos $\lim_{z\to i}\dfrac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}i.$

(b) Para calcular $\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\dfrac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}$, procedemos como em (a):

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}(z^2 - 2z + 4) &= \left(1+\sqrt{3}i\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{3}i\right) + 4\\ &= -2 + 2\sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i + 4 = 0,\end{aligned}$$

e $\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\left(z - 1 - \sqrt{3}i\right) = 1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i = 0$. Parece que não podemos aplicar o Teorema 2.6.2($iv$), pois o limite no denominador é 0. No entanto, no cálculo anterior observamos que $1+\sqrt{3}i$ é uma raiz do polinômio quadrático $z^2 - 2z + 4$. Da Seção 1.6 sabemos que, se $z_1$ for uma raiz de um polinômio quadrático, $z - z_1$ é um fator do polinômio. Usando divisão longa, obtemos, segundo (5) da Seção 1.6:

$$z^2 - 2z + 4 = \left(z - 1 + \sqrt{3}i\right)\left(z - 1 - \sqrt{3}i\right).$$

Como, no limite, $z$ não pode assumir o valor $1+\sqrt{3}i$, podemos cancelar o fator no numerador e no *denominador* da *função* racional. Ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i} &= \lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\frac{\left(z - 1 + \sqrt{3}i\right)\left(z - 1 - \sqrt{3}i\right)}{z - 1 - \sqrt{3}i}\\ &= \lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\left(z - 1 + \sqrt{3}i\right).\end{aligned}$$

Usando o Teorema 2.6.2($ii$) e os limites (15) e (15), obtemos:

$$\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\left(z - 1 + \sqrt{3}i\right) = 1 + \sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i.$$

Portanto,

$$\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i} = 2\sqrt{3}i.$$

Na Seção 3.1 calcularemos o limite na parte (b) do Exemplo 4 de outra maneira.

### 2.6.2 Continuidade

**Continuidade de Funções Reais** Recordemos que se o limite de uma função real $f$ à medida que se aproxima da $x_0$ existe e é igual ao valor de $f$ em $x_0$, dizemos que $f$ é *contínua* no ponto $x_0$. Em símbolos essa definição é representada como:

### *Continuidade de uma Função Real f(x)*

*Uma função f é contínua em um ponto $x_0$ se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (17)

Vale notar que para que a equação $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ em (17) seja satisfeita, três condições devem ser atendidas. O limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ deve existir, $f$ deve ser definida em $x_0$ e estes dois valores devem ser reais. Se qualquer uma dessas condições não for atendida, $f$ não pode ser contínua em $x_0$. Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

ilustrada na Figura 2.6.3 não é contínua no ponto $x = 0$, pois $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. Da mesma forma, embora $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$, a função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ não é contínua em $x = 1$, pois $f(1)$ não é definida.

Na análise real, visualizamos o conceito de continuidade por meio do gráfico da função $f$. De modo informal, a função $f$ é contínua se não houver falhas ou buracos no gráfico de $f$. Como não é possível desenhar o gráfico de uma função complexa, a discussão da continuidade de funções complexas será, principalmente, de natureza algébrica.

**Continuidade de Funções Complexas** A definição de continuidade de uma função complexa é, em essência, igual à de uma função real. Ou seja, uma função complexa $f$ é contínua em um ponto $z_0$ se o limite de $f$ à medida que $z$ tende a $z_0$ existir e for igual ao valor de $f$ em $z_0$. Isso nos leva à seguinte definição para o caso de funções complexas, que é análoga a (17).

**Definição 2.6.2 Continuidade de uma Função Complexa**

Uma função complexa $f$ é **contínua em um ponto** $z_0$ se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Como no caso de funções reais, se uma função complexa $f$ for contínua em um ponto as três condições a seguir devem ser atendidas.

### *Critério para Continuidade em um Ponto*

*Uma função complexa f é contínua em um ponto $z_0$ se cada uma das três condições forem atendidas:*

(*i*) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *existe,*

(*ii*) *$f$ é definida em $z_0$* e

(*iii*) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Se uma função complexa $f$ não for contínua em um ponto $z_0$, dizemos que $f$ é **descontínua** em $z_0$. Por exemplo, a função $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ é descontínua em $z = 2$ e em $z = -i$.

---

EXEMPLO 5 **Teste de Continuidade em um Ponto**

Consideremos a função $f(z) = z^2 - iz + 2$. Para determinar se $f$ é contínua em, digamos, $z_0 = 1 - i$, devemos calcular $\lim_{z\to z_0} f(z)$ e $f(z_0)$ e, a seguir, verificar se estes dois valores complexos são iguais. Usando o Teorema 2.6.2 e os limites em (15) e (16), obtemos:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 1-i} \left(z^2 - iz + 2\right) = (1-i)^2 - i(1-i) + 2 = 1 - 3i.$$

Além disso, para $z_0 = 1 - i$, temos:

$$f(z_0) = f(1-i) = (1-i)^2 - i(1-i) + 2 = 1 - 3i.$$

Como $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, concluímos que $f(z) = z^2 - iz + 2$ é contínua no ponto $z_0 = 1 - i$. □

Como indica o Exemplo 5, a continuidade de um polinômio complexo ou de uma função racional complexa é facilmente estabelecida com o uso do Teorema 2.6.2 e dos limites em (15) e (16). Funções mais complicadas, por sua vez, podem exigir outras técnicas.

---

EXEMPLO 6 **Descontinuidade da Função Raiz Quadrada Principal**

Mostremos que a função raiz quadrada principal $f(z) = z^{1/2}$, definida por (7) da Seção 2.4, é descontínua no ponto $z_0 = -1$.

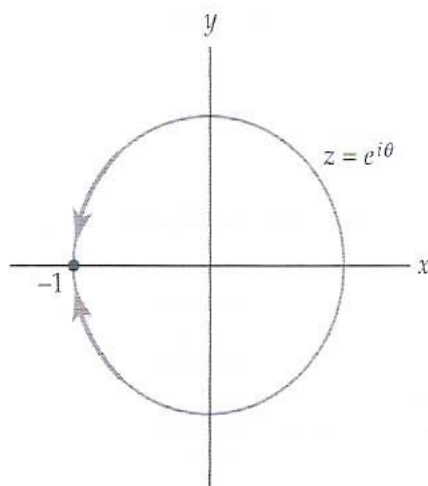



Figura 2.6.5 Figura para o Exemplo 6

**Solução** Para mostrar que $f(z) = z^{1/2}$ é descontínua em $z_0 = -1$, mostramos que $\lim\limits_{z\to -1} z^{1/2}$ não existe. Segundo o critério especificado anteriormente, basta identificar dois percursos diferentes que passam por $z_0 = -1$, ao longo dos quais $z^{1/2}$ tende a valores distintos. Antes de iniciarmos, recordemos, de (7) da Seção 2.4, que a função raiz quadrada principal é definida por $z^{1/2} = \sqrt{|z|}e^{i\text{Arg}(z)/2}$. Agora, consideremos que $z$ se aproxima de −1 ao longo do quarto da circunferência unitária no segundo quadrante, como na Figura 2.6.5. Ou seja, consideremos os pontos $|z| = 1$, $\pi/2 < \arg(z) < \pi$. Na forma polar, esse percurso pode ser descrito como $z = e^{i\theta}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, com $\theta$ tendendo a $\pi$. Fazendo $|z| = 1$ e $\text{Arg}(z) = \theta$ tender a $\pi$, obtemos:

$$\lim_{z\to -1} z^{1/2} = \lim_{z\to -1} \sqrt{|z|}e^{i\text{Arg}(z)/2} = \lim_{\theta\to\pi} \sqrt{1}e^{i\theta/2}.$$

Como $e^{i\theta/2} = \cos(\theta/2) + i\,\text{sen}(\theta/2)$, temos

$$\lim_{z\to -1} z^{1/2} = \lim_{\theta\to\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0 + i(1) = i. \quad (18)$$

A seguir, fazemos $z$ tender a −1 pelo quarto da circunferência unitária no terceiro quadrante, como na Figura 2.6.5. Ao longo dessa curva temos os pontos $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < -\pi/2$, com $\theta$ tendendo a $-\pi$. Fazendo $|z| = 1$ e $\text{Arg}(z) = \theta$ tender a $-\pi$, obtemos:

$$\lim_{z\to -1} z^{1/2} = \lim_{\theta\to -\pi} e^{i\theta/2} = \lim_{\theta\to -\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right) = -i. \quad (19)$$

Como os valores complexos em (18) e (19) não são iguais, concluímos que $\lim\limits_{z\to -1} z^{1/2}$ não existe. Por conseguinte, a função raiz quadrada principal $f(z) = z^{1/2}$ é descontínua no ponto $z_0 = -1$. □

Na Definição 2.6.2 definimos continuidade de uma função complexa $f$ em um único ponto $z_0$ no plano complexo. Muitas vezes nos interessa a continuidade de uma função em um conjunto de pontos no plano complexo. Uma função complexa $f$ é **contínua em um conjunto $S$** se $f$ for contínua em $z_0$, para todo $z_0$ em $S$. Por exemplo, usando o Teorema 2.6.2 e os limites em (15) e (16), podemos mostrar que $f(z) = z^2 - iz + 2$ é contínua em **C**. A função $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, por sua vez, é contínua no conjunto de todos os números complexos $z$ tais que $z \neq \pm i$.

**Propriedades de Funções Contínuas** Como a definição do conceito de continuidade é baseada no limite complexo, várias propriedades de limites complexos podem ser transformadas em asserções a respeito da continuidade. Consideremos o Teorema 2.6.1, que descreve a conexão entre o limite complexo de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e os limites reais de $u$ e $v$. Usando a seguinte definição de continuidade de funções reais $F(x, y)$, podemos enunciar este teorema a respeito de limites como um teorema a respeito de continuidade.

### *Continuidade de uma Função Real $F(x, y)$*

*Uma função $F$ é contínua em um ponto $(x_0, y_0)$ se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x, y) = F(x_0, y_0). \tag{20}$$

De novo, esta definição de continuidade é análoga a (17). De (20) e do Teorema 2.6.1, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 2.6.3 Partes Real e Imaginária de uma Função Contínua**

Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $z_0 = x_0 + iy_0$, a função complexa $f$ é contínua no ponto $z_0$ se e somente se as duas funções reais $u$ e $v$ forem contínuas no ponto $(x_0, y_0)$.

**Prova** Se $f$ é contínua em $z_0$, da Definição 2.6.2 temos:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0). \tag{21}$$

Substituindo $u_0 = u(x_0, y_0)$ e $v_0 = v(x_0, y_0)$ no Teorema 2.6.1, obtemos:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0). \tag{22}$$

Portanto, de (20), $u$ e $v$ são contínuas em $(x_0, y_0)$. Reciprocamente, se $u$ e $v$ são contínuas em $(x_0, y_0)$, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

O Teorema 2.6.1 garante, então, que $\lim_{z\to z_0} f(z) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0)$. Consequentemente, $f$ é contínua, segundo a Definição 2.6.2. ❑

---

EXEMPLO 7 **Teste de Continuidade Usando o Teorema 2.6.3**

Mostremos que a função $f(z) = \bar{z}$ é contínua em **C**.

**Solução** Segundo o Teorema 2.6.3, $f(z) = \bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ é contínua em $z_0 = x_0 + iy_0$ se tanto $u(x, y) = x$ como $v(x, y) = -y$ forem contínuas em $(x_0, y_0)$. Como $u$ e $v$ são funções polinomiais de duas variáveis, de (13), temos:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = x_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = -y_0.$$

Isso implica que $u$ e $v$ são contínuas em $(x_0, y_0)$ e, portanto, $f$ é contínua em $z_0 = x_0 + iy_0$, pelo Teorema 2.6.3. Como $z_0 = x_0 + iy_0$ é um ponto arbitrário, concluímos que a função $f(z) = \bar{z}$ é contínua em **C**. ❑

As propriedades algébricas de limites complexos estabelecidas no Teorema 2.6.2 também se aplicam à continuidade de funções complexas.

**Teorema 2.6.4 Propriedades de Funções Contínuas**

Se $f$ e $g$ são contínuas no ponto $z_0$, as seguintes funções são contínuas no ponto $z_0$:

($i$) $cf$, $c$ é uma constante complexa,

($ii$) $f \pm g$,

($iii$) $f \cdot g$ e

($iv$) $\dfrac{f}{g}$, desde que $g \neq 0$.

**Prova de (*ii*)** Provaremos apenas a parte (*ii*), pois as provas das partes restantes são idênticas. Como $f$ e $g$ são contínuas em $z_0$, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ e $\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$. Segundo o Teorema 2.6.2, $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = f(z_0) + g(z_0)$. Portanto, pela Definição 2.6.2, $f + g$ é contínua em $z_0$, □

Os resultados dos Teoremas 2.6.4(*ii*) e 2.6.4(*iii*) se aplicam a qualquer soma finita ou produto finito de funções contínuas, respectivamente. Podemos usá-los para mostrar que polinômios complexos são funções contínuas.

**Teorema 2.6.5 Continuidade de Funções Polinomiais**

Funções polinomiais complexas são contínuas em todo o plano complexo.

**Prova** Seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ um polinômio complexo e seja $z_0$ um ponto qualquer no plano complexo **C**. De (16), a função identidade $f(z) = z$ é contínua em $z_0$ e, por aplicações sucessivas do Teorema 2.6.4(*iii*), isso implica que a função potência $f(z) = z^n$, onde $n$ é um inteiro e $n \geq 1$, também é contínua neste ponto. Além disso, (15) implica que toda função constante complexa $f(z) = c$ é contínua em $z_0$; portanto, o Teorema 2.6.4(*i*) garante que cada uma das funções $a_n z^n$, $a_{n-1} z^{n-1}$, ..., $a_1 z$ e $a_0$ é contínua em $z_0$. Por meio de aplicações sucessivas do Teorema 2.6.4(*ii*), vemos que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ é contínua em $z_0$. Como $z_0$ é um ponto arbitrário no plano complexo, mostramos que a função polinomial $p$ é contínua em todo o plano complexo **C**. □

Como uma função racional $f(z) = p(z)/q(z)$ é o quociente das funções polinomiais $p$ e $q$, os Teoremas 2.6.5 e 2.6.4(*iv*) garantem que $f$ é contínua em todo ponto $z_0$ para o qual $q(z_0) \neq 0$. Em outras palavras,

***Continuidade de Funções Racionais***

*Funções racionais são contínuas em seus domínios.*

**Funções Limitadas** Funções complexas contínuas têm propriedades importantes que são análogas às propriedades de funções reais contínuas. Por exemplo, se uma função real $f$ for contínua em um intervalo fechado $I$ na reta real, $f$ é limitada em $I$. Isso significa que existe um número real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x$ em $I$. Um resultado similar para funções reais de múltiplas variáveis afirma que, se $F(x, y)$ for contínua em uma região fechada e limitada $R$ do plano cartesiano, existe um número real $M > 0$ tal que $|F(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y)$ em $R$; dizemos que $F$ é limitada em $R$.

Suponhamos, agora, que a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja definida em uma região fechada e limitada $R$ no plano complexo. Como no caso de funções reais, dizemos que $f$ é **limitada** em $R$ se existir uma constante real $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z$ em $R$. Se $f$ for contínua em $R$, o Teorema 2.6.3 nos informa que $u$ e $v$ são funções reais contínuas em $R$. Portanto, $F(x,y) = \sqrt{[u(x,y)]^2 + [v(x,y)]^2}$ também é contínua em $R$. Como $F$ é contínua na região fechada e limitada $R$, concluímos que $F$ é limitada em $R$. Isto é, existe uma constante real $M > 0$ tal que $|F(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y)$ em $R$. Contudo, como $|f(z)| = F(x, y)$, $|f(z)| \leq M$ para todo $z$ em $R$. Em outras palavras, a função complexa $f$ é limitada em $R$. Assim, fica estabelecida a seguinte propriedade de funções complexas contínuas:

***Propriedade de Limitação***

*Se uma função complexa $f$ for contínua em uma região fechada e limitada $R$, $f$ é limitada em $R$. Isto é, existe uma constante real $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z$ em $R$.*

Embora este resultado nos assegure que existe um limitante $M$ para $f$ em $R$, o mesmo não nos fornece qualquer mecanismo prático de calculá-lo. Uma abordagem para determinar um limitante consiste em

usar a desigualdade triangular, como no Exemplo 3 da Seção 1.2. Outra abordagem para determinar um limitante consiste em fazer uso de transformações complexas (Problemas 38 e 39 do Conjunto de Exercícios 2.3, Problemas 55 e 56 do Conjunto de Exercícios 2.4, e Problemas 29 e 30 do Conjunto de Exercícios 2.5). No Capítulo 5 veremos que para uma classe especial de importantes funções complexas um limitante pode apenas ser alcançado por um ponto na fronteira de $R$.

**Ramos** Na Seção 2.4 discutimos, brevemente, o conceito de uma função multivalente $F(z)$ que associa um conjunto de números complexos à entrada $z$. (Vale recordar que, segundo a convenção adotada, letras maiúsculas, como $F$, $G$ e $H$, representam funções multivalentes.) Exemplos de funções multivalentes são: $F(z) = z^{1/n}$, que associa a entrada $z$ ao conjunto de $n$ raízes $n$-ésimas de $z$, e $G(z) = \arg(z)$, que associa a entrada $z$ ao conjunto infinito de argumentos de $z$. Na prática, com frequência é necessário dispor de uma forma consistente de escolher apenas uma das raízes de um número complexo ou apenas um dos argumentos de um número complexo. Em outras palavras, nesses casos o interesse reside no cálculo de apenas um dos valores de uma função multivalente. Se a escolha desse valor for feita com o conceito de continuidade em mente é obtida uma *função*, denominada *ramo* de uma função multivalente. Em termos mais rigorosos, um **ramo** de uma função multivalente $F$ é uma função $f_1$ que é contínua em algum domínio e associa exatamente um dos múltiplos valores de $F$ a cada ponto $z$ nesse domínio.

## *Notação: Ramos*

*Ramos de uma função multivalente $F$ são representados, na notação de função, por letra minúscula com subscrito numérico, como $f_1$, $f_2$, e assim por diante.*

A exigência de que um ramo seja contínuo implica que o domínio de um ramo é diferente do domínio da função multivalente. Por exemplo, a função multivalente $F(z) = z^{1/2}$, que associa cada entrada $z$ ao conjunto das duas raízes quadradas de $z$. Embora a função raiz quadrada principal $f(z) = z^{1/2}$ associe exatamente um valor de $F$ (a raiz quadrada principal de $z$) a cada entrada $z$, $f$ *não é* um ramo de $F$. A razão para isto é que a função raiz quadrada principal não é contínua em seu domínio. Em particular, no Exemplo 6 mostramos que $f(z) = z^{1/2}$ não é contínua em $z_0 = -1$. O argumento usado no Exemplo 6 pode ser modificado sem dificuldade para mostrar que $f(z) = z^{1/2}$ é descontínua em qualquer ponto no eixo real negativo. Portanto, para obter um ramo de $F(z) = z^{1/2}$ que coincida com a função raiz quadrada principal devemos restringir o domínio para excluir pontos no eixo real negativo. Isso resulta na função

$$f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad -\pi < \theta < \pi. \tag{23}$$

A função $f_1$ definida em (23) é denominada **ramo principal** de $F(z) = z^{1/2}$, pois o valor de $\theta$ representa o argumento principal de $z$, para todo $z$ em $\text{Dom}(f_1)$. No exemplo a seguir, mostramos que $f_1$ é, de fato, um ramo de $F$.

---

### EXEMPLO 8 Um Ramo de $F(z) = z^{1/2}$

Mostremos que a função $f_1$ definida em (23) é um ramo da função multivalente $F(z) = z^{1/2}$.

Figura 2.6.6 Domínio $D$ do ramo

**Solução** O domínio da função $f_1$ é o conjunto definido por $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, mostrado em cinza na Figura 2.6.6. De (8) da Seção 2.4, vemos que a função $f_1$ coincide com a função raiz quadrada principal $f$ neste conjunto. Assim, $f_1$ associa a entrada $z$ a exatamente um dos valores de $F(z) = z^{1/2}$. Falta mostrar que $f_1$ é contínua em seu domínio. Para isso, consideremos um ponto $z$ com $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. Se $z = x + iy$ e $x > 0$, $z = re^{i\theta}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(y/x)$. Como $-\pi/2 < \tan^{-1}(y/x) < \pi/2$, a desigualdade $-\pi < \theta < \pi$ é satisfeita. Substituindo as expressões de $r$ e $\theta$ em (23), obtemos:

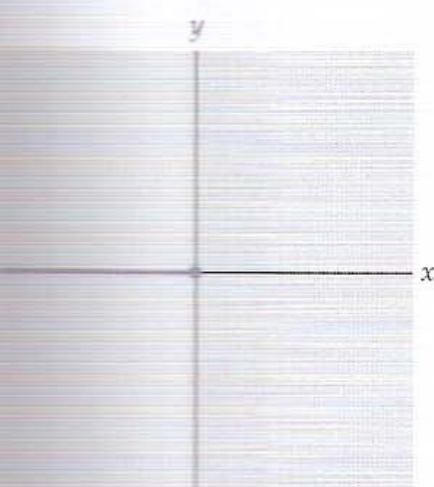
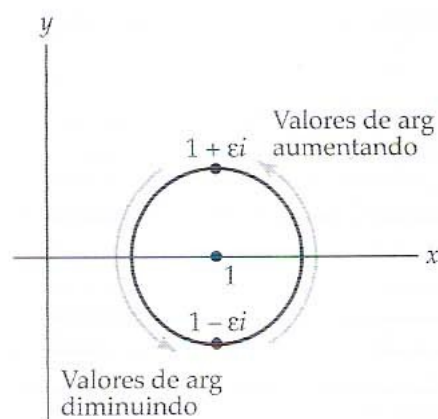
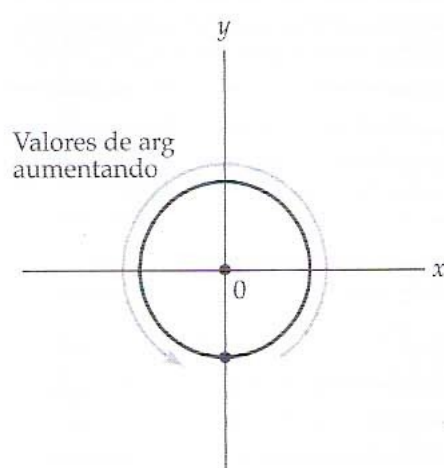
$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sqrt[4]{x^2 + y^2}e^{i\tan^{-1}(y/x)/2} \\ &= \sqrt[4]{x^2 + y^2}\cos\left(\frac{\tan^{-1}(y/x)}{2}\right) + i\sqrt[4]{x^2 + y^2}\,\text{sen}\left(\frac{\tan^{-1}(y/x)}{2}\right). \end{aligned}$$

Como, para $x > 0$, as partes real e imaginária de $f_1$ são funções reais contínuas, concluímos, pelo Teorema 2.6.3, que $f_1$ é contínua para $x > 0$. Um argumento similar pode ser usado para pontos com $y > 0$, usando $\theta = \cot^{-1}(x/y)$, e para pontos com $y < 0$, usando $\theta = -\cot^{-1}(x/y)$. Em cada caso, segundo o Teorema 2.6.3, $f_1$ é contínua. Portanto, a função $f_1$ definida em (23) é um ramo da função multivalente $F(z) = z^{1/2}$. □

(a) $z = 1$ não é um ponto de ramo

(b) $z = 0$ é um ponto de ramo

**Figura 2.6.7** $G(z) = \arg(z)$

**Pontos e Cortes de Ramos** Embora a função multivalente $F(z) = z^{1/2}$ seja definida para todo número complexo não nulo em **C**, o ramo principal $f_1$ é definido apenas no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. Em geral, um **corte de ramo** ou **linha de corte** para um ramo $f_1$ de uma função multivalente $F$ é uma porção de uma curva excluída do domínio de $F$, de modo que $f_1$ seja contínua nos pontos remanescentes. Portanto, o eixo real não positivo, mostrado em cinza-escuro na Figura 2.6.6, é um corte de ramo para o ramo principal $f_1$, dado por (23), da função multivalente $F(z) = z^{1/2}$. Um outro ramo de $F$, com o mesmo corte de ramo, é dado por $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $\pi < \theta < 3\pi$. Estes dois ramos são distintos porque para, digamos, $z = i$, $f_1(i) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ e $f_2(i) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$. Se fizermos $\phi = \theta - 2\pi$, o ramo $f_2$ pode ser expresso como $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i(\phi+2\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\phi/2}e^{i\pi}$, $-\pi < \phi < \pi$. Como $e^{i\pi} = -1$, isto implica $f_2(z) = -\sqrt{r}e^{i\phi/2}$, $-\pi < \phi < \pi$. Assim, mostramos que $f_2 = -f_1$. Podemos interpretar estes dois ramos de $F(z) = z^{1/2}$ como análogos às raízes quadradas positiva e negativa de um número real positivo.

Outros ramos de $F(z) = z^{1/2}$ podem ser definidos, de modo similar a (23), usando qualquer raio que emane na origem como corte de ramo. Por exemplo, $f_3(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $-3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$ define um ramos de $F(z) = z^{1/2}$. O corte de ramo para $f_3$ é o raio $\arg(z) = -3\pi/4$ junto com o ponto $z = 0$.

Não é coincidência que o ponto $z = 0$ esteja nos cortes de ramo para $f_1$, $f_2$ e $f_3$. O ponto $z = 0$ deve estar nos cortes de ramo de *todos* os ramos da função multivalente $F(z) = z^{1/2}$. Em geral, um ponto com a propriedade de estar no corte de ramo de todo e qualquer ramo é denominado **ponto de ramo** de $F$. Em outras palavras, um ponto de ramo é um ponto $z_0$ com a seguinte propriedade: considerando uma circunferência qualquer com centro em $z_0$ e raio suficientemente pequeno, se a percorrermos a partir de um ponto $z_1$, os valores de qualquer ramo não retornam ao valor em $z_1$. Por exemplo, consideremos qualquer ramo da função multivalente $G(z) = \arg(z)$ e o ponto, digamos, $z_0 = 1$. Se percorrermos a pequena circunferência $|z - 1| = \varepsilon$ no sentido trigonométrico a partir do ponto $z_1 = 1 - \varepsilon i$, os valores do ramo aumentam até alcançarmos o ponto $1 + \varepsilon i$ e, então, os valores do ramo decrescem até o valor do ramo em $z_1$, como ilustrado na Figura 2.6.7(a). Isto significa que o ponto $z_0 = 1$ não é um ponto de ramo. Agora, repitamos o processo para o ponto $z_0 = 0$. Para a pequena circunferência $|z| = \varepsilon$, os valores do ramo aumentam ao longo de toda a circunferência, como ilustrado na Figura 2.6.7(b). Quando retornamos ao ponto de partida, o valor do ramo não é mais o mesmo: aumentou em $2\pi$. Portanto, $z_0 = 0$ é um ponto de ramo de $G(z) = \arg(z)$.

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

($i$) Como na análise real, podemos definir os conceitos de limites infinitos e limites no infinito para funções complexas. De modo intuitivo, o limite $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ significa que valores da função $f$ podem ser feitos arbitrariamente próximos de $L$ se valores de $z$ forem escolhidos de modo que $|z|$ seja suficientemente grande. Uma definição precisa de um **limite no infinito** é:

*O limite de $f$ à medida que $z$ tende $\infty$ existe e é igual a $L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$, sempre que $|z| > 1/\delta$.*

Com esta definição não é difícil mostrar que:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \text{ se e somente se } \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L. \tag{24}$$

De modo similar, o **limite infinito** $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ é definido por:

*O limite de f à medida que z tende a $z_0$ é ∞ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta$ tal que $|f(z) - L| < 1/\varepsilon$, sempre que $0 < |z| > \delta$.*

Desta definição, obtemos o seguinte resultado (Problemas 21–26 do Conjunto de Exercícios 2.6):

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \text{ se e somente se } \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0. \tag{25}$$

(*ii*) Em análise real visualizamos uma função contínua como uma função cujo gráfico não tem falhas ou buracos. É natural especular se existe uma propriedade análoga para funções complexas contínuas. A resposta é sim, mas esta propriedade deve ser tratada em termos de transformações complexas. Primeiro, recordemos que uma curva paramétrica definida pelas equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$ é denominada contínua se as funções reais $x$ e $y$ forem contínuas. De modo similar, uma curva paramétrica complexa definida por $z(t) = x(t) + iy(t)$ é **contínua** se $x(t)$ e $y(t)$ forem funções reais contínuas. Como no caso de curvas paramétricas no plano cartesiano, uma curva paramétrica no plano complexo não tem falhas ou buracos. Essas curvas representam uma forma de visualizar funções complexas contínuas.

*Se uma função complexa f for contínua em um conjunto S, a imagem de toda curva paramétrica contínua em S deve ser uma curva contínua.*

Para comprovar isso, consideremos a função contínua complexa $f(z) = u(x, y) + iy(x, y)$ e uma curva paramétrica contínua definida por $z(t) = x(t) + iy(t)$. Segundo o Teorema 2.6.3, $u(x, y)$ e $y(x, y)$ são funções reais contínuas. Além disso, como $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas, segundo o cálculo de múltiplas variáveis, as composições $u(x(t), y(t))$ e $v(x(t), y(t))$ são funções contínuas. Consequentemente, a imagem da curva paramétrica dada por $w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$ é contínua (Problemas 59–62 do Conjunto de Exercícios 2.6).

## CONJUNTO DE EXERCICIOS 2.6 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

### 2.6.1 Limites

Nos Problemas 1–8, use o Teorema 2.6.1 e as propriedades de limites reais discutidas anteriormente para calcular o limite complexo dado.

**1.** $\lim_{z \to 2i} (z^2 - \bar{z})$

**2.** $\lim_{z \to 1+i} \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}$

**3.** $\lim_{z \to 1-i} (|z|^2 - i\bar{z})$

**4.** $\lim_{z \to 3i} \frac{\text{Im}(z^2)}{z + \text{Re}(z)}$

**5.** $\lim_{z \to \pi i} e^z$

**6.** $\lim_{z \to 0} \frac{z^2 + \bar{z}^2}{\text{Re}(z) + \text{Im}(z)}$

**7.** $\lim_{z \to 0} \frac{e^z - e^{\bar{z}}}{\text{Im}(z)}$

**8.** $\lim_{z \to 1+i} \left(\log_e |x^2 + y^2| + i \arctan \frac{y}{x}\right)$

Nos Problemas 9–16, use o Teorema 2.6.2 e os limites básicos em (15) e (16) para calcular o limite complexo dado.

**9.** $\lim_{z \to 2-i} (z^2 - z)$

**10.** $\lim_{z \to i} (z^5 - z^2 + z)$

**11.** $\lim_{z \to e^{i\pi/4}} \left(z + \frac{1}{z}\right)$

**12.** $\lim_{z \to 1+i} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$

**13.** $\lim_{z \to -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}$

**14.** $\lim_{z \to 2+i} \frac{z^2 - (2+i)^2}{z - (2+i)}$

**15.** $\lim_{z \to z_0} \frac{(az + b) - (az_0 + b)}{z - z_0}$

**16.** $\lim_{z \to -3+i\sqrt{2}} \frac{z + 3 - i\sqrt{2}}{z^2 + 6z + 11}$

**17.** Considere o limite $\lim_{z \to 0} \frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}$.

(a) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de 0 ao longo da reta $y = x$?

(b) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de 0 ao longo do eixo imaginário?

(c) Com base nas respostas para (a) e (b), o que você pode dizer a respeito de $\lim_{z\to 0} \frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}$?

**18.** Considere o limite $\lim_{z\to i} (|z| + i\text{Arg}\,(iz))$.

(a) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de $i$ ao longo da circunferência unitária $|z| = 1$ no primeiro quadrante?

(b) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de $i$ ao longo da circunferência unitária $|z| = 1$ no segundo quadrante?

(c) Com base nas respostas para (a) e (b), o que você pode dizer a respeito de $\lim_{z\to i} (|z| + i\text{Arg}\,(iz))$?

**19.** Considere o limite $\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$.

(a) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de 0 ao longo eixo real?

(b) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de 0 ao longo do eixo imaginário?

(c) Suas respostas para (a) e (b) implicam que $\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ existe? Justifique sua resposta.

(d) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de 0 ao longo da reta $y = x$?

(e) O que você pode dizer a respeito de $\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$?

**20.** Considere o limite $\lim_{z\to 0} \left(\frac{2y^2}{x^2} - \frac{x^2 - y^2}{y^2} i\right)$.

(a) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de 0 ao longo da reta $y = x$?

(b) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de 0 ao longo da reta $y = -x$?

(c) Suas respostas para (a) e (b) implicam que $\lim_{z\to 0} \left(\frac{2y^2}{x^2} - \frac{x^2 - y^2}{y^2} i\right)$ existe? Explique por quê.

(d) A que valor tende o limite à medida que $z$ se aproxima de 0 ao longo da reta $y = 2x$?

(e) O que você pode dizer a respeito de $\lim_{z\to 0} \left(\frac{2y^2}{x^2} - \frac{x^2 - y^2}{y^2} i\right)$?

Os Problemas 21–26 envolvem os conceitos de limite infinito e limite no infinito discutido na parte ($i$) das Observações. Nos Problemas 21–26, use (24) ou (25), o Teorema 2.6.2 e os limites básicos em (15) e (16) para calcular o dado limite complexo.

**21.** $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2 + iz - 2}{(1 + 2i)z^2}$

**22.** $\lim_{z\to\infty} \frac{iz + 1}{2z - i}$

**23.** $\lim_{z\to i} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$

**24.** $\lim_{z\to -i/2} \frac{(1 - i)z + i}{2z + i}$

**25.** $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2 - (2 + 3i)z + 1}{iz - 3}$

**26.** $\lim_{z\to i} \frac{z^2 + 1}{z^2 + z + 1 - i}$

## 2.6.2 Continuidade

Nos Problemas 27–34, mostre que a função $f$ é contínua no ponto especificado.

**27.** $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i$; $z_0 = 2 - i$

**28.** $f(z) = z^3 - \frac{1}{z}$; $z_0 = 3i$

**29.** $f(z) = \frac{z^3}{z^3 + 3z^2 + z}$; $z_0 = i$

**30.** $f(z) = \frac{z - 3i}{z^2 + 2z - 1}$; $z_0 = 1 + i$

**31.** $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z - 1}, & |z| \neq 1 \\ 3, & |z| = 1 \end{cases}$; $z_0 = 1$

**32.** $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z^2 + z + 1}, & |z| \neq 1 \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, & |z| = 1 \end{cases}$; $z_0 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

**33.** $f(z) = \bar{z} - 3\,\text{Re}(z) + i$; $z_0 = 3 - 2i$

**34.** $f(z) = \dfrac{\text{Re}(z)}{z + iz} - 2z^2$; $z_0 = e^{i\pi/4}$

Nos Problemas 35–40, mostre que a função $f$ é descontínua no ponto especificado.

**35.** $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z + i}$; $z_0 = -i$

**36.** $f(z) = \dfrac{1}{|z| - 1}$; $z_0 = i$

**37.** $f(z) = \text{Arg}(z)$; $z = -1$

**38.** $f(z) = \text{Arg}(iz)$; $z_0 = i$

**39.** $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 - 1}{z - 1}, & |z| \neq 1 \\ 3, & |z| = 1 \end{cases}$; $z_0 = i$

**40.** $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$; $z_0 = 0$

Nos Problemas 41–44, use o Teorema 2.6.3 para determinar a maior região no plano complexo em que a função $f$ é contínua.

**41.** $f(z) = \text{Re}(z)\,\text{Im}(z)$

**42.** $f(z) = \bar{z}$

**43.** $f(z) = \dfrac{z - 1}{z\bar{z} - 4}$

**44.** $f(z) = \dfrac{z^2}{(|z| - 1)\,\text{Im}(z)}$

## Foco em Conceitos

**45.** Use o Teorema 2.6.1 para provar que:

(a) $\lim_{z \to z_0} c = c$, onde $c$ é uma constante. (b) $\lim_{z \to z_0} z = z_0$.

**46.** Use o Teorema 2.6.1 para provar que $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$.

**47.** Use o Teorema 2.6.2 e o Problema 46 para provar que

(a) $\lim_{z \to z_0} \text{Re}(z) = \text{Re}(z_0)$.

(b) $\lim_{z \to z_0} \text{Im}(z) = \text{Im}(z_0)$.

(c) $\lim_{z \to z_0} |z| = |z_0|$.

**48.** Use o Teorema 2.6.1 para provar a parte (*ii*) do Teorema 2.6.2.

**49.** A seguir, é dada uma prova épsilon-delta para $\lim_{z \to z_0} z = z_0$. Preencha as lacunas.

**Prova** Pela Definição 2.6.1, $\lim_{z \to z_0} z = z_0$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|______| < \varepsilon$, sempre que $0 < |______| < \delta$. Fazendo $\delta =$ ______, fica assegurado que asserção anterior é verdadeira.

**50.** A seguir, é dada uma prova épsilon-delta para $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$. Preencha as lacunas.

**Prova** Pela Definição 2.6.1, $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|______| < \varepsilon$, sempre que $0 < |______| < \delta$. Segundo propriedades do módulo e da conjugação complexos, $|z - z_0| = |\overline{z - z_0}| = |______|$. Portanto, se $0 < |z - z_0| < \delta$ e $\delta =$ ______, $|\bar{z} - \bar{z}_0| < \varepsilon$.

**51.** Neste problema, será desenvolvida uma prova épsilon-delta para $\lim_{z \to 1+i} [(1 - i)z + 2i] = 2 + 2i$.

(a) Escreva a definição épsilon-delta (Definição 2.6.1) de $\lim_{z \to 1+i} [(1 - i)z + 2i] = 2 + 2i$.

(b) Fatore $(1 - i)$ da desigualdade que envolve $\varepsilon$ (da parte (a)) e simplifique. A seguir, reescreva esta desigualdade na forma $|z - (1 + i)| <$ ______.

(c) Com base no que fez na parte (b), que valor deve ser fixado para $\delta$?

(d) Escreva uma prova épsilon-delta para $\lim_{z \to 1+i} [(1 - i)z + 2i] = 2 + 2i$.

**52.** Neste problema, será desenvolvida uma prova épsilon-delta para $\lim_{z \to 2i} \dfrac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i} = 5i$.

(a) Escreva a definição épsilon-delta (Definição 2.6.1) de $\lim_{z \to 2i} \dfrac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i} = 5i$.

(b) Simplifique a desigualdade que envolve $\varepsilon$ (da parte (a)) e a reescreva na forma $|z - 2i| <$ ______.

(c) Com base no que fez parte (b), que valor deve ser fixado para $\delta$?

(d) Escreva uma prova épsilon-delta para $\lim_{z\to 2i} \frac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i} = 5i$.

**53.** (a) É verdade que $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \lim_{z\to z_0} f(\bar{z})$ para qualquer função complexa $f$? Caso afirmativo, dê uma breve justificativa; caso negativo, dê um contraexemplo.

(b) Se $f(z)$ for uma função contínua em $z_0$, é verdade que $\overline{f(z)}$ é contínua em $z_0$?

**54.** Se $f$ for uma função para a qual $\lim_{x\to 0} f(x + i0) = 0$ e $\lim_{y\to 0} f(0 + iy) = 0$, é possível concluir que $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$? Justifique sua resposta.

**55.** (a) Prove que a função $f(z) = \text{Arg}(z)$ é descontínua em todo ponto no eixo real negativo.

(b) Prove que a função $f_1$ definida por

$$f_1(z) = \theta, -\pi < \theta < \pi$$

é um ramo da função multivalente $F(z) = \arg(z)$. [*Sugestão*: Veja o Exemplo 8.]

**56.** Considere a função multivalente $F(z) = z^{1/3}$, que associa $z$ ao conjunto das três raízes cúbicas de $z$. Defina, de forma explícita, três ramos distintos $f_1$, $f_2$ e $f_3$ de $F$ que tenham o eixo real não negativo como um corte de ramo.

**57.** Considere a função multivalente $F(z) = (z - 1 + i)^{1/2}$.

(a) Qual é o ponto de ramo de $F$. Justifique sua resposta.

(b) Defina, de forma explícita, dois ramos distintos $f_1$ e $f_2$ de $F$. Em cada caso, especifique o corte de ramo.

**58.** Considere a função multivalente $F(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$. Quais são os pontos de ramo (existem dois) de $F$? Justifique sua resposta.

### Tarefas para o Laboratório de Computação

Releia a parte (*ii*) das Observações do fim da Seção 2.6. Nos Problemas 57–60, use um SAC para mostrar que a função dada não é contínua no interior da circunferência unitária; para isto, faça um gráfico da imagem da curva paramétrica contínua dada. (Seja cuidadoso; em *Mathematica* e *Maple*, os gráficos podem se revelar enganosos.)

**59.** $f(z) = z + \text{Arg}(z)$, $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}it$, $-1 \le t \le 1$

**60.** $f(z) = \sqrt[4]{r}e^{i\theta/4}$, $\theta = \text{Arg}(z)$, $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}it$, $-1 \le t \le 1$

**61.** $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $\theta = \text{Arg}(z)$, $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

**62.** $f(z) = |z - 1|\text{Arg}(-z) + i\text{Arg}(iz)$, $z(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

## 2.7 Aplicações

***Ao Professor***: as aplicações a linhas de fluxo apresentadas nesta seção requerem familiaridade com a solução de equações diferenciais.

Neste capítulo vimos que uma das principais diferenças entre funções reais e complexas é a impossibilidade de desenhar gráficos de funções complexas. Isso motivou a introdução de transformações como um método alternativo para a representação gráfica de funções complexas. Há, contudo, outras técnicas para visualizar funções complexas. Nesta seção mostraremos que funções complexas fornecem representações de campos vetoriais bidimensionais. Em capítulos posteriores usaremos a representação complexa de um campo vetorial para resolver problemas práticos nas áreas de fluxo fluido, fluxo de calor, gravitação e eletrostática.

**Campos Vetoriais** No cálculo de múltiplas variáveis, uma função de valor vetorial de duas variáveis reais

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (1)$$

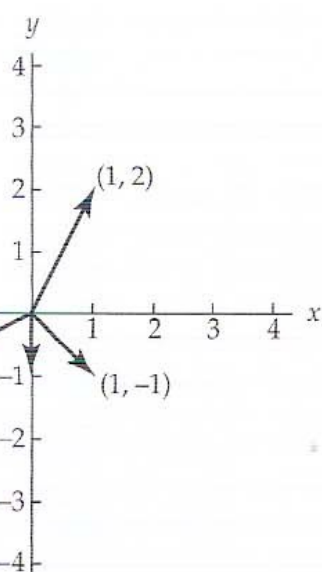
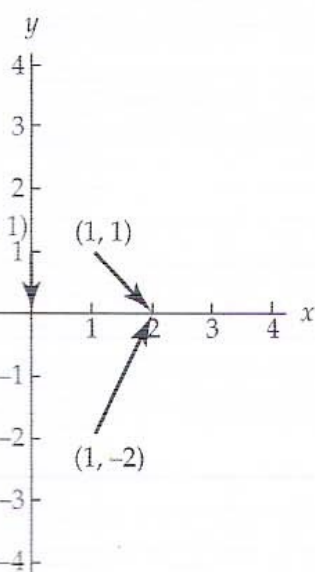
é denominada **campo vetorial bidimensional**. Usando a base ortogonal padrão de vetores unitários **i** e **j** podemos expressar o campo vetorial em (1) como:

(a) Valores de F representados como vetores de posição

(b) Valores de F representados com ponto inicial em $(x, y)$

Figura 2.7.1 Alguns valores vetoriais da função $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$

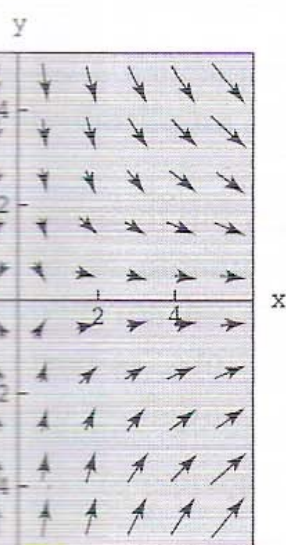



Figura 2.7.2 Campo vetorial $f(z) = \bar{z}$

Figura 2.7.3 Vetores no campo vetorial $f(z) = z^2$

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}. \tag{2}$$

Por exemplo, a função $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (2xy)\mathbf{j}$ é um campo vetorial bidimensional para a qual, digamos, $\mathbf{F}(1, 3) = (1 + 3)\mathbf{i} + (2 \cdot 1 \cdot 3)\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Valores de uma função $\mathbf{F}$ dada por (2) são vetores que podem ser representados como vetores de posição, com ponto inicial na origem. No entanto, para obter uma representação gráfica do campo vetorial (2) que exiba a relação entre a entrada $(x, y)$ e a saída $\mathbf{F}(x, y)$ desenhamos o vetor $\mathbf{F}(x, y)$ com ponto inicial $(x, y)$ e ponto terminal $(x + P(x, y), y + Q(x, y))$. Por exemplo, na Figura 2.7.1(a), os quatro valores funcionais $\mathbf{F}(1, 1) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{j}$, $\mathbf{F}(1, -2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{F}(-2, 1) = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ são representados como vetores de posição; na Figura 2.7.1(b) vemos uma porção da representação gráfica do campo vetorial obtida posicionando esses quatro vetores com pontos iniciais em $(x, y)$. Especificamente, a Figura 2.7.1(b) consiste nos quatro vetores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $-\mathbf{j}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ e $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ desenhados com ponto inicial em $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, -2)$ e $(-2, 1)$ e ponto final em $(2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(-4, 0)$, respectivamente.

**Funções Complexas como Campos Vetoriais** Existe uma forma natural de representar um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ com uma função complexa $f$. Especificamente, usamos as funções $P$ e $Q$ como as partes real e imaginária de $f$; neste caso, dizemos que a função complexa $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ é a **representação complexa** do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$. Reciprocamente, qualquer função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tem um campo vetorial associado, $\mathbf{F}(x, y) = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$. A partir daqui, $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ serão denominados **campos vetoriais**. Como um exemplo, consideremos o campo vetorial $f(z) = \bar{z}$. Como $f(z) = x - iy$, a função $f$ é a representação complexa do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Parte deste campo vetorial foi mostrada na Figura 2.7.1(b). Uma representação mais completa do campo vetorial $f(z) = \bar{z}$ é mostrada na Figura 2.7.2 (esta figura foi criada com *Mathematica*). Observemos que o campo vetorial ilustrado na Figura 2.7.2 fornece uma representação gráfica da função complexa $f(z) = \bar{z}$ que é diferente da fornecida por uma transformação. Comparemos esta figura com a Figura 2.5.3 da Seção 2.5.

Na representação de um campo vetorial $\mathbf{F}$ associado a uma função complexa $f$ vale notar que desenhar o vetor $\mathbf{F}(x, y)$ com ponto inicial $(x, y)$ é equivalente a desenhar a representação vetorial do número complexo $f(z)$ com ponto inicial $z$. No exemplo a seguir ilustraremos essa observação.

---

EXEMPLO 1 **Representação de Vetores em um Campo Vetorial**

Representemos, no campo vetorial $f(z) = z^2$, os vetores correspondentes aos pontos $z = 1, 2 + i, 1 + i$ e $i$.

**Solução** Com cálculo simples, obtemos:

$$f(1) = 1^2 = 1, \qquad f(2 + i) = (2 + i)^2 = 3 + 4i,$$
$$f(i) = i^2 = -1, \qquad \text{e} \qquad f(1 + i) = (1 + i)^2 = 2i.$$

Isso implica que no campo vetorial $f(z) = z^2$ os números complexos $1$, $3 + 4i$, $-1$ e $2i$ são representados como vetores com pontos iniciais $1$, $2 + i$, $i$ e $1 + i$, respectivamente. Esses vetores são ilustrados na Figura 2.7.3. ❑

**Uso de Computadores** Desenhar vetores manualmente é uma tarefa simples, mas tediosa. Felizmente, sistemas algébricos computacionais, como *Mathematica* ou *Maple*, têm comandos internos para representar campos vetoriais bidimensionais graficamente. Na Figura 2.7.4 o campo vetorial $f(z) = iy$ foi representado com o emprego do comando **PlotVectorField** de *Mathematica*. Vale observar que os comprimentos dos vetores

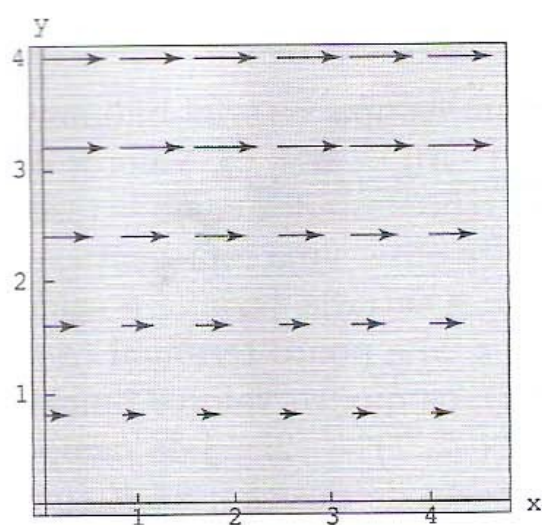



**Figura 2.7.4** Figura gerada com *Mathematica* para o campo vetorial $f(z) = iy$

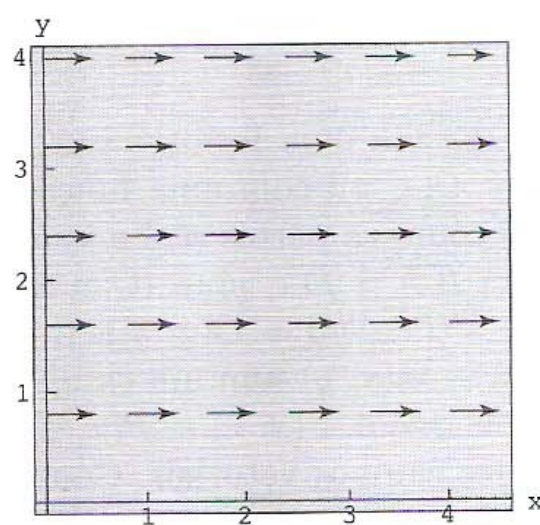



**Figura 2.7.5** Figura gerada com *Mathematica* para o campo vetorial normalizado $f(z) = iy$.

na representação de *Mathematica* são menores do que deveriam ser. Por exemplo, no ponto, digamos, $z = 1 + i$, temos $f(1 + i) = i$, mas o vetor desenhado em $z = 1 + i$ não tem comprimento 1. A razão para isso é que *Mathematica* altera proporcionalmente os comprimentos dos vetores em um campo vetorial para criar uma figura mais bonita (em particular, este procedimento de *Mathematica* também garante que não há superposição de vetores). Portanto, os comprimentos dos vetores na Figura 2.7.4 não representam, de forma precisa, os comprimentos *absolutos* dos vetores neste campo vetorial. Os vetores na Figura 2.7.4, no entanto, representam de forma precisa os comprimentos *relativos* dos vetores no campo vetorial.*

Em muitas aplicações o interesse principal reside nas direções e não nas magnitudes dos vetores em um campo vetorial. Por exemplo, posteriormente discutiremos a determinação de percursos ao longo dos quais partículas se movem em um fluxo fluido. Para esse tipo de aplicação podemos utilizar um campo vetorial normalizado. Em um **campo vetorial normalizado** os vetores têm os comprimentos alterados de modo que todos tenham o mesmo comprimento. A Figura 2.7.5 mostra um campo vetorial normalizado para $f(z) = iy$; esta figura foi criada em *Mathematica*, com o emprego da opção **ScaleFunction** com o comando **PlotVectorField**. É interessante comparar esta figura com a Figura 2.7.4.

Em muitas aplicações as magnitudes dos vetores são importantes e, nesses casos, um campo vetorial normalizado é inadequado. Veremos exemplos disso no Capítulo 5, quando discutiremos circulação e fluxo líquido em um fluxo fluido. Neste texto chamaremos a atenção sempre que usarmos um campo vetorial normalizado. Por conseguinte, em um sentido gráfico o termo campo vetorial fica reservado à representação de um conjunto de vetores que *não* foram normalizados.

**Fluxo Fluido** Um dos vários usos de campos vetoriais em matemática aplicada é a modelagem de fluxo fluido. Como, na análise complexa, estamos confinados a duas dimensões, consideremos apenas o **fluxo bidimensional** de um fluido. Isso significa que o movimento do fluido se dá em planos paralelos ao plano $xy$ e que o movimento e as características físicas do fluido são os mesmos em todos os planos. Essas hipóteses permitem que analisemos o fluxo em uma única folha do fluido. Suponhamos que $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ represente, no plano complexo, um **campo de velocidade** de um fluxo plano. Dessa forma, $f(z)$ especifica a velocidade de uma partícula do fluido posicionada no ponto $z$ no plano. O módulo de $|f(z)|$ é a **amplitude da velocidade** da partícula, e o vetor $f(z)$ indica a direção do fluxo neste ponto.

Para um campo de velocidade que $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de um fluxo bidimensional, as funções $P$ e $Q$ representam as componentes da velocidade nas direções $x$ e $y$, respectivamente. Se $z(t) = x(t) + iy(t)$ for uma parametrização do percurso ao longo do que a partícula se desloca em um fluxo fluido, o vetor tangencial ao percurso $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ deve coincidir com $f(z(t))$. Portanto, as partes real e imaginária do vetor tangencial ao percurso de uma partícula em um fluido devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \tag{3}$$

A família de soluções do sistema de equações diferenciais de primeira ordem (3) representa as **linhas de fluxo** do fluxo plano associado a $f(z)$.

EXEMPLO 2 **Linhas de Fluxo**

Determinemos as linhas de fluxo do fluxo plano associado a $f(z) = \bar{z}$.

*Para mais informação a respeito da representação gráfica de campos vetoriais com *Mathematica* é sugerida a consulta ao relatório técnico *Guide to Standard Mathematical Packages* [Guia de Pacotes Matemáticos Consagrados], publicado por Wolfram Research.

**Solução** Como $f(z) = \bar{z} = x - iy$, identificamos $P(x, y) = x$ e $Q(x, y) = -y$. De (3), as linhas de fluxo de $f$ são a família de soluções do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

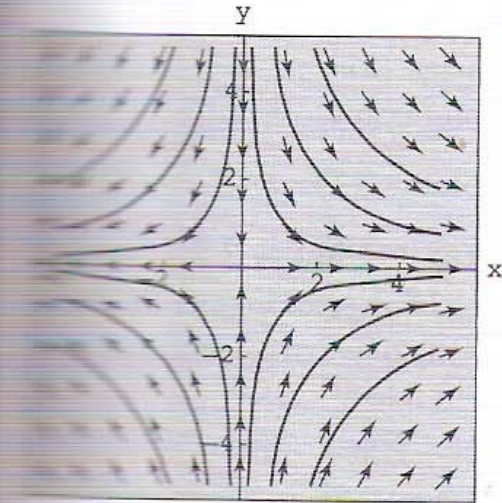



Figura 2.7.6 Linhas de fluxo no fluxo bidimensional associado a $f(z) = \bar{z}$.

Essas equações diferenciais são independentes, de modo que podem ser resolvidas por separação de variáveis. Assim, obtemos as soluções gerais $x(t) = c_1 e^t$ e $y(t) = c_2 e^{-t}$, onde $c_1$ e $c_2$ são constantes reais. Para desenhar as curvas $z(t) = x(t) + iy(t)$ eliminamos o parâmetro $t$ e obtemos uma equação cartesiana em $x$ e $y$. Isso pode ser feito com facilidade multiplicando as duas soluções e obtendo $xy = c_1 c_2$. Como $c_1$ e $c_2$ são constantes reais arbitrárias, essa família de curvas pode ser representada por $xy = c$, onde $c$ é uma constante real. Em resumo, mostramos que as partículas no fluxo bidimensional associado a $f(z) = \bar{z}$ se movem ao longo de curvas na família de hipérboles $xy = c$. Usamos *Mathematica* para gerar a Figura 2.7.6, que representa, para este fluxo, as linhas de fluxo correspondentes a $c = \pm 1, \pm 4$ e $\pm 9$. Estas linhas de fluxos são mostradas em preto superpostas à representação do campo vetorial normalizado de $f(z) = \bar{z}$. ❑

---

EXEMPLO 3 **Linhas de Fluxo**

Determinemos as linhas de fluxo do fluxo bidimensional associado a $f(z) = \bar{z}^2$.

**Solução** Procedemos como no Exemplo 2. Como a função $f$ pode ser expressa como $f(z) = \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$, identificamos $P(x, y) = x^2 - y^2$ e $Q(x, y) = -2xyi$. Assim, as linhas de fluxo deste fluxo satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2$$
$$\frac{dy}{dt} = -2xy. \tag{4}$$

A regra da cadeia do cálculo elementar estabelece que $(dy/dx) \cdot (dx/dt) = dy/dt$; resolvendo esta equação para $dy/dx$, obtemos

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Portanto, dividindo $dy/dt = -2xy$ por $dx/dt = x^2 - y^2$ concluímos que o sistema em (4) é equivalente à seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2} \quad \text{ou} \quad 2xy\,dx + \left(x^2 - y^2\right) dy = 0. \tag{5}$$

Vale recordar que uma equação diferencial da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é denominada exata se $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Dada uma equação diferencial exata, se conseguirmos determinar uma função $F(x, y)$ para a qual $\partial F/\partial x = M$ e $\partial F/\partial y = N$, $F(x, y) = c$ é uma solução implícita da equação diferencial. Identificando $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = x^2 - y^2$, notamos que a equação diferencial em (5) é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Para determinar uma função $F(x, y)$ para a qual $\partial F/\partial x = M$ e $\partial F/\partial y = N$, primeiro, integramos parcialmente a função $M(x, y) = 2xy$ em relação à variável $x$:

$$F(x, y) = \int 2xy\,dx = x^2 y + g(y).$$

**Solução** Como $f(z) = \bar{z} = x - iy$, identificamos $P(x, y) = x$ e $Q(x, y) = -y$. De (3), as linhas de fluxo de $f$ são a família de soluções do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

...2.7.6 Linhas de fluxo no ...bidimensional associado a ...$= \bar{z}$.

Essas equações diferenciais são independentes, de modo que podem ser resolvidas por separação de variáveis. Assim, obtemos as soluções gerais $x(t) = c_1e^t$ e $y(t) = c_2e^{-t}$, onde $c_1$ e $c_2$ são constantes reais. Para desenhar as curvas $z(t) = x(t) + iy(t)$ eliminamos o parâmetro $t$ e obtemos uma equação cartesiana em $x$ e $y$. Isso pode ser feito com facilidade multiplicando as duas soluções e obtendo $xy = c_1c_2$. Como $c_1$ e $c_2$ são constantes reais arbitrárias, essa família de curvas pode ser representada por $xy = c$, onde $c$ é uma constante real. Em resumo, mostramos que as partículas no fluxo bidimensional associado a $f(z) = \bar{z}$ se movem ao longo de curvas na família de hipérboles $xy = c$. Usamos *Mathematica* para gerar a Figura 2.7.6, que representa, para este fluxo, as linhas de fluxo correspondentes a $c = \pm 1, \pm 4$ e $\pm 9$. Estas linhas de fluxos são mostradas em preto superpostas à representação do campo vetorial normalizado de $f(z) = \bar{z}$. ❑

---

EXEMPLO 3 **Linhas de Fluxo**

Determinemos as linhas de fluxo do fluxo bidimensional associado a $f(z) = \bar{z}^2$.

**Solução** Procedemos como no Exemplo 2. Como a função $f$ pode ser expressa como $f(z) = \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$, identificamos $P(x, y) = x^2 - y^2$ e $Q(x, y) = -2xyi$. Assim, as linhas de fluxo deste fluxo satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2$$
$$\frac{dy}{dt} = -2xy. \tag{4}$$

A regra da cadeia do cálculo elementar estabelece que $(dy/dx)\cdot(dx/dt) = dy/dt$; resolvendo esta equação para $dy/dx$, obtemos

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)\Big/\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Portanto, dividindo $dy/dt = -2xy$ por $dx/dt = x^2 - y^2$ concluímos que o sistema em (4) é equivalente à seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2} \quad \text{ou} \quad 2xy\,dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0. \tag{5}$$

Vale recordar que uma equação diferencial da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é denominada exata se $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Dada uma equação diferencial exata, se conseguirmos determinar uma função $F(x, y)$ para a qual $\partial F/\partial x = M$ e $\partial F/\partial y = N$, $F(x, y) = c$ é uma solução implícita da equação diferencial. Identificando $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = x^2 - y^2$, notamos que a equação diferencial em (5) é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Para determinar uma função $F(x, y)$ para a qual $\partial F/\partial x = M$ e $\partial F/\partial y = N$, primeiro, integramos parcialmente a função $M(x, y) = 2xy$ em relação à variável $x$:

$$F(x, y) = \int 2xy\,dx = x^2y + g(y).$$

Figura 2.7.7 Linhas de fluxo no fluxo bidimensional associado a $f(z) = \bar{z}^2$

A função $g(y)$ é, então, determinada derivando $F$ parcialmente em relação à variáv
e igualando o resultado a $N(x, y) = x^2 - y^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - y^2.$$

Isso implica que $g'(y) = -y^2$, de modo que podemos tomar $g(y) = -\frac{1}{3}y^3$. Concluin
$F(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$ é uma solução implícita da equação diferencial em (5); ass
as linhas de fluxo do fluxo plano associado a $f(z) = \bar{z}^2$ são dadas por:

$$x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$$

onde $c$ é uma constante real. Usamos *Mathematica* para gerar a Figura 2.7.7, que r
presenta as linhas de fluxo correspondentes a $c = \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{16}{3}, \pm 18$. Essas linhas de flu
são mostradas em preto e superpostas à representação do campo vetorial normaliz
para esse fluxo. ☐

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.7 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do li*

Nos Problemas 1–8, (**a**) represente as imagens dos números complexos $z = 1, 1 + i, 1 - i$ e $i$ sob a dada função $f$ co
vetores de posição, (**b**) represente as imagens como vetores no campo vetorial associado a $f$.

**1.** $f(z) = 2z - i$

**2.** $f(z) = z^3$

**3.** $f(z) = \overline{1 - z^2}$

**4.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

**5.** $f(z) = z - \dfrac{1}{z}$

**6.** $f(z) = z^{1/2}$, função raiz quadrada principal, dada por (7) da Seção 2.4

**7.** $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$

**8.** $f(z) = \log_e |z| + i\mathrm{Arg}(z)$

Nos Problemas 9–12, (**a**) determine as linhas de fluxo do fluxo bidimensional associado à dada função $f$, e (**b**) de
nhe as linhas de fluxo.

**9.** $f(z) = 1 - 2i$

**10.** $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$

**11.** $f(z) = iz$

**12.** $f(z) = (1 + i)\bar{z}$

### Foco em Conceitos

**13.** Seja $f$ uma função complexa. Descreva a relação entre o campo vetorial associado a $f(z)$ e o campo vetorial as
ciado a $g(z) = f(z - 1)$. Ilustre-a graficamente usando uma única função para $f$.

**14.** Seja $f$ uma função complexa. Descreva a relação entre o campo vetorial associado a $f(z)$ e o campo vetorial as
ciado a $g(z) = if(z)$. Ilustre-a graficamente usando uma única função para $f$.

**15.** Considere o fluxo bidimensional associado a $f(z) = c$, onde $c$ é uma constante complexa.

(**a**) Determine as linhas de fluxo para este fluxo.

(**b**) Explique por que este fluxo é denominado **fluxo uniforme**.

**16.** Considere o fluxo bidimensional associado a $f(z) = 1 - 1/\bar{z}^2$.

(**a**) Use um SAC para representar graficamente o campo vetorial associado a $f$ na região $|z| > 1$.

(**b**) Comprove analiticamente que a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ é uma linha de fluxo para este flux

(**c**) Explique por que $f(z) = 1 - 1/\bar{z}^2$ é denominado **fluxo ao redor da circunferência unitária**.

### Tarefas para o Laboratório de Computação

Nos Problemas 17–22, use um SAC para representar graficamente o campo vetorial associado à dada função co
plexa.

**17.** $f(z) = 2z - i$

**18.** $f(z) = z^3$

**19.** $f(z) = 1 - z^2$

**20.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

**21.** $f(z) = 2 + i$

**22.** $f(z) = 1 - \dfrac{1}{z^2}$

## Questionário de Revisão do Capítulo 2

*(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–20, responda verdadeiro ou falso. Se a afirmação for falsa, justifique sua resposta explicando por que é falsa ou dê um contraexemplo; se a afirmação for verdadeira, justifique sua resposta provando a afirmação ou cite um resultado pertinente do capítulo.

**1.** Se $f(z)$ for uma função complexa, $f(x + 0i)$ deve ser um número real.

**2.** $\arg(z)$ é uma função complexa.

**3.** O domínio da função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + i}$ são todos os números complexos.

**4.** O domínio da função $f(z) = e^{z^2-(1+i)z+2}$ são todos os números complexos.

**5.** Se $f(z)$ for uma função complexa com $u(x, y) = 0$, a imagem de $f$ está no eixo imaginário.

**6.** Todo o plano complexo é mapeado no eixo real $v = 0$ por $w = z + \bar{z}$.

**7.** Todo o plano complexo é mapeado na circunferência unitária $|w| = 1$ por $w = \dfrac{z}{|z|}$.

**8.** A imagem da função $f(z) = \text{Arg}(z)$ são todos os números reais.

**9.** A imagem da circunferência $|z - z_0| = \rho$ sob uma transformação linear é uma circunferência com (possivelmente) um centro diferente, mas com o mesmo raio.

**10.** A transformação linear $w = (1 - \sqrt{3}i)\,z + 2$ aplica uma rotação de um ângulo $\pi/3$ no sentido trigonométrico, em torno da origem, uma dilatação por um fator 2 e, então, translação de 2.

**11.** Há mais de uma transformação linear que mapeia a circunferência $|z - 1| = 1$ na circunferência $|z + 1| = 1$.

**12.** As retas $x = 3$ e $x = -3$ são mapeadas na mesma parábola por $w = z^2$.

**13.** A equação $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z^3)$ não tem solução.

**14.** Se $f(z) = z^{1/4}$ for a função raiz quarta principal, então $f(-1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$.

**15.** O número complexo $i$ não está na imagem da função raiz cúbica principal.

**16.** Sob a transformação $w = 1/z$ no plano complexo estendido, o domínio $|z| > 3$ é mapeado no domínio $|w| < \frac{1}{3}$.

**17.** Se $f$ for uma função complexa para a qual $\lim_{z\to 2+i} \text{Re}(f(z)) = 4$ e $\lim_{z\to 2+i} \text{Im}(f(z)) = -1$, então $\lim_{z\to 2+i} f(z) = 4 - i$.

**18.** Se $f$ for uma função complexa para a qual $\lim_{x\to 0} f(x + 0i) = 0$ e $\lim_{y\to 0} f(0 + iy) = 0$, então $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$.

**19.** Se $f$ for uma função complexa contínua no ponto $z = 1 + i$, então a função $g(z) = 3[f(z)]^2 - (2+i)f(z) + i$ é contínua em $z = 1 + i$.

**20.** Se $f$ for uma função complexa contínua em todo o plano complexo, então a função $g(z) = \overline{f(z)}$ é contínua em todo o plano complexo.

Nos Problemas 21–40, tente preencher as lacunas sem consultar o texto.

**21.** Se $f(z) = z^2 + i\bar{z}$, as partes real e imaginária de $f$ são $u(x, y) =$ ______ e $v(x, y) =$ ______.

**22.** Se $f(z) = \dfrac{|z-1|}{z^2 + 2iz + 2}$, o domínio natural de $f$ é ______.

**23.** Se $f(z) = z - \bar{z}$, a imagem de $f$ está contida no eixo ______.

**24.** A função exponencial $e^z$ tem partes real e imaginária $u(x, y) =$ ______ e $v(x, y) =$ ______.

**25.** Uma parametrização do segmento de reta de $1 + i$ a $2i$ é $z(t) =$ ______.

**26.** Uma parametrização da circunferência com centro em $1 - i$ e raio 3 é $z(t) =$ ______.

**27.** Toda transformação linear complexa é uma composição de, no máximo, uma ______, uma ______ e uma ______.

**28.** A transformação complexa $w = iz + 2$ corresponde a uma rotação e uma ______, mas não a uma ______.

**29.** A função $z^2$ eleva ao quadrado o módulo de $z$ e ______ seu argumento.

**30.** A imagem do setor $0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$ sob a transformação $w = z^3$ é ______.

**31.** A imagem de retas horizontais e verticais sob a transformação $w = z^2$ é ______.

**32.** A função raiz $n$-ésima principal $z^{1/n}$ mapeia o plano complexo na região ______.

**33.** Se $f(z) = z^{1/6}$ for a função raiz sexta principal, então $f(-1) =$ _______.

**34.** A função recíproca complexa $1/z$ é uma composição de _______ na circunferência _______ e reflexão em relação ao eixo _______.

**35.** Segundo a definição formal de um limite complexo, $\lim_{z\to 2i}(z^2 - i) = -4 - i$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|_______| < \varepsilon$, sempre que $0 < |z - _______| < \delta$.

**36.** Se $f(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{z}$, então $\lim_{x\to 0} f(x + 0i) =$ _______ e $\lim_{y\to 0} f(0 + iy) =$ _______ . Portanto, $\lim_{z\to 0} f(z) =$ _______.

**37.** Uma função complexa $f$ é contínua em $z = z_0$ se $\lim_{z\to 0} f(z) =$ _______.

**38.** A função $f(z) =$ _______ é um exemplo de uma função que é contínua no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$.

**39.** A função complexa $f(z) = \dfrac{x}{y} + i \log_e x$ é contínua na região _______.

**40.** _______ e _______ são exemplos de funções multivalentes.

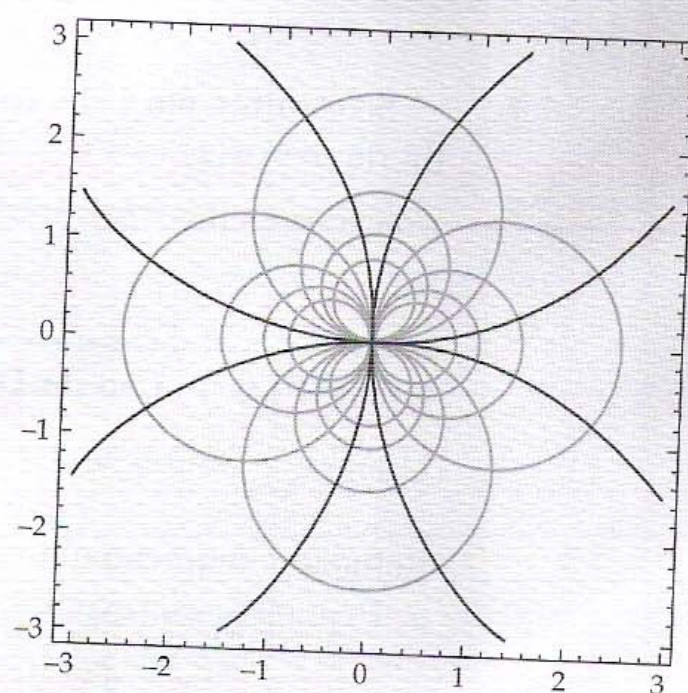
CAPÍTULO

# 3

# Funções Analíticas

## Índice do Capítulo



**Introdução** No capítulo anterior apresentamos o conceito de função complexa. Como no cálculo de funções reais, podemos desenvolver as noções de derivadas e integrais de funções complexas com base no conceito fundamental de limite. Neste capítulo o foco principal será voltado à definição e às propriedades de derivadas de uma função complexa.

Curvas de nível para $f(z) = 1/z$ (Problema 3 do Conjunto de Exercícios 3.4)

## 3.1 Diferenciabilidade e Analiticidade

O cálculo de funções complexas envolve os conceitos usuais de derivadas e integrais destas funções. Nesta seção definiremos a derivada de uma função complexa $f(z)$ com base na noção de limite. Embora muitos dos conceitos nesta seção pareçam familiares, como regras para diferenciação de produtos, quocientes e da cadeia, há importantes diferenças entre este material e o associado ao cálculo de funções reais $f(x)$. Capítulos posteriores deixam claro que, exceto pela familiaridade de nomes e definições, há pouca similaridade entre as interpretações de grandezas como $f'(x)$ e $f'(z)$.

**Derivada** Sejam $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$; uma mudança em $z_0$ é a diferença $\Delta z = z - z_0$ ou $\Delta z = x - x_0 + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$. Se uma função complexa $w = f(z)$ for definida em $z$ e em $z_0$, a correspondente mudança na função é a diferença $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. A **derivada** da função $f$ é definida em termos de um limite do quociente de diferenças $\Delta w/\Delta z$ à medida que $z \to z_0$.

**Definição 3.1.1 Derivada de uma Função Complexa**

Seja a função complexa $f$ definida em uma vizinhança de um ponto $z_0$. A **derivada** de $f$ em $z_0$, denotada por $f'(z_0)$, é

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1}$$

desde que este limite exista.

Se o limite em (1) existir, a função $f$ é **diferenciável** em $z_0$. Dois outros símbolos que denotam a derivada de $w = f(z)$ são $w'$ e $dw/dz$. Quando esta última notação é utilizada, o valor de uma derivada em um ponto específico $z_0$ é escrito como $\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$.

**EXEMPLO 1 Uso da Definição 3.1.1**

Usemos a Definição 3.1.1 para determinar a derivada de $f(z) = z^2 - 5z$.

**Solução** Como calcularemos a derivada de $f$ em um ponto genérico, substituiremos $z_0$ em (1) pelo símbolo $z$. Primeiro, escrevemos

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^2 - 5(z + \Delta z) = z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z.$$

A seguir,

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z - (z^2 - 5z) \\ &= 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z. \end{aligned}$$

Por fim, (1) temos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z + \Delta z - 5)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z - 5). \end{aligned}$$

O limite é $f'(z) = 2z - 5$.

**Regras de Diferenciação** As familiares regras de diferenciação no cálculo com variáveis reais se aplicam ao cálculo com variáveis complexas. Se $f$ e $g$ forem diferenciáveis em um ponto $z$ e $c$ for uma constante complexa, (1) pode ser usada para mostrar:

### *Regras de Diferenciação*

*Regras Envolvendo Constantes:* $\dfrac{d}{dz}c = 0$ e $\dfrac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$ (2)

*Regra para Soma:* $\dfrac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$ (3)

*Regra para o Produto:* $\dfrac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$ (4)

*Regra para o Quociente:* $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ (5)

*Regra da Cadeia:* $\dfrac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))\,g'(z).$ (6)

A **regra de potência** para a diferenciação de potências de $z$ também é válida:

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}, \quad n \text{ inteiro.} \tag{7}$$

A combinação de (7) e (6) resulta na **regra de potências para funções:**

$$\frac{d}{dz}[g(z)]^n = n[g(z)]^{n-1}g'(z), \quad n \text{ inteiro.} \tag{8}$$

---

EXEMPLO 2 **Uso das Regras de Diferenciação**

Diferenciemos:

(a) $f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z$ (b) $f(z) = \dfrac{z^2}{4z+1}$ (c) $f(z) = \left(iz^2 + 3z\right)^5$

**Solução**

(a) Usando a regra de potência (7) e a regra para soma em conjunto com (2), obtemos

$$f'(z) = 3 \cdot 4z^3 - 5 \cdot 3z^2 + 2 \cdot 1 = 12z^3 - 15z^2 + 2.$$

(b) Da regra para quocientes,

$$f'(z) = \frac{(4z+1) \cdot 2z - z^2 \cdot 4}{(4z+1)^2} = \frac{4z^2 + 2z}{(4z+1)^2}.$$

(c) Na regra de potência para funções (8), substituímos $n = 5$, $g(z) = iz^2 + 3z$ e $g'(z) = 2iz + 3$, e obtemos

$$f'(z) = 5(iz^2 + 3z)^4(2iz + 3).$$

❑

Para que uma função complexa $f$ seja diferenciável em um ponto $z_0$, sabemos, do capítulo anterior, que o limite $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ deve existir e ser igual a um único número complexo, qualquer que seja a direção em que $\Delta z$ se aproxima de 0. Isto significa que, na análise complexa, a exigência de diferencia-

bilidade de uma função $f(z)$ em um ponto $z_0$ é muito mais rígida que no cálculo de funções $f(x)$, em q
um número real $x_0$ pode ser alcançado de apenas duas direções. Se uma função complexa for montada
partir da especificação de suas partes real e imaginária $u$ e $v$, como $f(z) = x + 4iy$, é grande a probabili-
dade de que não seja diferenciável.

---

**EXEMPLO 3 Uma Função Não Diferenciável em Qualquer Ponto**

Mostremos que a função $f(z) = x + 4iy$ não é diferenciável, qualquer que seja o ponto $z$.

(a) $\Delta z \to 0$ ao longo de uma reta paralela ao eixo $x$

(b) $\Delta z \to 0$ ao longo de uma reta paralela ao eixo $y$

**Figura 3.1.1** Acercamento a $z$ ao longo de uma reta horizontal e ao longo de uma reta vertical

**Solução** Seja $z$ um ponto qualquer no plano complexo. Com $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (x + \Delta x) + 4i(y + \Delta y) - x - 4iy = \Delta x + 4i\Delta y$$

de modo que $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 4i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (9)$$

Agora, como indicado na Figura 3.1.1(a), se fizermos $\Delta z \to 0$ ao longo de uma reta paralela ao eixo $x$, $\Delta y = 0$ e $\Delta z = \Delta x$. Neste percurso, obtemos

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \quad (10)$$

Se, contudo, fizermos $\Delta z \to 0$ ao longo de uma reta paralela ao eixo $y$, como indicado na Figura 3.1.1(b), $\Delta x = 0$ e $\Delta z = i\Delta y$; dessa forma,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{4i\Delta y}{i\Delta y} = 4. \quad (11)$$

Como os valores em (10) e (11) são diferentes, concluímos que o limite em (9) não existe. Portanto, $f(z) = x + 4iy$ não é diferenciável em todo ponto; ou seja, $f$ não é diferenciável, qualquer que seja o ponto $z$.

---

A regra de potência básica (7) não se aplica a potências do conjugado de $z$, pois, como a função no Exemplo 3, a função $f(z) = \bar{z}$ não é diferenciável em qualquer ponto (Problema 21 do Conjunto de Exercícios 3.1).

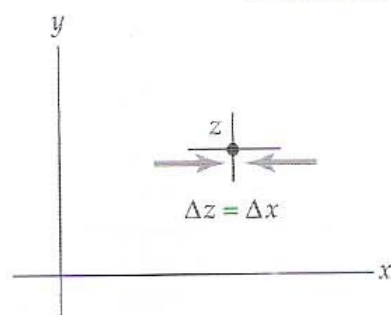
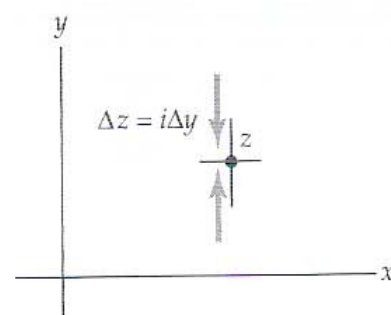
**Funções Analíticas** Embora a exigência de diferenciabilidade seja severa, há uma classe de funções de importância tão grande que seus membros devem satisfazer exigências ainda mais rígidas. Estas funções são denominadas **funções analíticas**.

**Definição 3.1.2 Analiticidade em um ponto**

Uma função complexa $w = f(z)$ é **analítica em um ponto** $z_0$ se $f$ for diferenciável em $z_0$ e em todo ponto em alguma vizinhança de $z_0$.

Uma função **$f$ é analítica em um domínio $D$** se for analítica em todo ponto em $D$. A frase "analítica *sobre* um domínio $D$" também é empregada. Uma função $f$ que é analítica em todo um domínio $D$ é denominada **holomórfica** ou **regular**; contudo, não usaremos esses termos no texto.

Muito importante ➡ Sugerimos que a Definição 3.1.2 seja relida com cuidado. Analiticidade em um ponto *não* é o mesmo que diferenciabilidade em um ponto. Analiticidade *em um ponto é uma propriedade de vizinhança*; em outras palavras, analiticidade é uma propriedade definida em um conjunto aberto. Deixamos como exercício mostrar que a função $f(z) = |z|^2$ é diferenciável em $z = 0$, mas não é diferenciável em qualquer outro ponto. Embora a função $f(z) = |z|^2$ seja diferenciável em $z = 0$, a função não é analítica neste ponto, pois não existe uma vizinhança de $z = 0$ *em toda a qual* $f$ é diferenciável; portanto, a função $f(z) = |z|^2$ não é analítica, qualquer que seja o ponto $z$ (Problema 19 do Conjunto de Exercícios 3.1).

Por sua vez, o simples polinômio $f(z) = z^2$ é diferenciável em todo ponto $z$ no plano complexo. Consequentemente, $f(z) = z^2$ é analítica em todo ponto $z$.

**Funções Inteiras** Uma função que é analítica em todo ponto $z$ no plano complexo é denominada **função inteira**. Tendo em mente as regras de diferenciação (2), (3), (7) e (5), concluímos que funções polinomiais são diferenciáveis em todo ponto $z$ no plano complexo e que funções racionais são analíticas em todo um domínio $D$ que não contenha pontos onde o denominador seja zero. O seguinte teorema resume esses resultados.

**Teorema 3.1.1 Funções Polinomiais e Racionais**

(*i*) Uma função polinomial complexa $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0$, sendo $n$ um inteiro não negativo, é uma função inteira.

(*ii*) Uma função racional complexa $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, sendo $p$ e $q$ funções polinomiais, é analítica em qualquer domínio $D$ que não contenha um ponto $z_0$ para o qual $q(z_0) = 0$.

**Pontos Singulares** Como a função racional $f(z) = 4z/(z^2 - 2z + 2)$ é indefinida em $1 + i$ e $1 - i$, $f$ não é analítica nestes pontos. Por conseguinte, de (*ii*) do Teorema 3.1.1, $f$ não é analítica em qualquer domínio que contenha um desses pontos ou os dois. Em geral, um ponto $z$ onde uma função $w = f(z)$ não é analítica é denominado **ponto singular** de $f$. Discutiremos pontos singulares em mais detalhes no Capítulo 6.

Outra consequência das regras de diferenciação em (2)–(6) é:

***Analiticidade de Soma, Produto e Quociente***

*Se as funções $f$ e $g$ forem analíticas em um domínio $D$, a soma $f(z) + g(z)$, a diferença $f(z) - g(z)$ e o produto $f(z)g(z)$ são analíticos em $D$. O quociente $f(z)/g(z)$ é analítico, desde que $g(z) \neq 0$ em $D$.*

**Definição Alternativa de $f'(z)$** Algumas vezes é conveniente definir a derivada de uma função $f$ usando uma forma alternativa para o quociente das diferenças $\Delta w/\Delta z$. Como $\Delta z = z - z_0$, $z = z_0 + \Delta z$, de modo que (1) pode ser reescrita como

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{12}$$

Em contraste com o feito no Exemplo 1, quando desejamos usar (12) para calcular $f'$ em um ponto genérico $z$, substituímos o símbolo $z$ por $z_0$ *depois* de calcular o limite (Problemas 7–10 do Conjunto de Exercícios 3.1).

Como na análise real, se uma função complexa for diferenciável em um ponto a função é necessariamente contínua no ponto. Empregaremos a forma da derivada dada em (12) para provar essa asserção.

**Teorema 3.1.2 Diferenciabilidade Implica Continuidade**

Se $f$ for diferenciável em um ponto $z_0$ em um domínio $D$, $f$ é contínua em $z_0$.

**Prova** Os limites $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ e $\displaystyle\lim_{z \to z_0} (z - z_0)$ existem e são iguais a $f'(z_0)$ e 0, respectivamente. Consequentemente, pelo Teorema 2.6.2(*iii*) da Seção 2.6 podemos escrever o seguinte limite de um produto como o produto de limites:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

De $\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$ concluímos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Segundo a Definição 2.6.2, $f$ é contínua em $z_0$. □

O recíproco do Teorema 3.1.2, no entanto, não é verdadeiro; a continuidade de uma função $f$ em um ponto não garante a diferenciabilidade de $f$ no ponto. Segundo o Teorema 2.6.3, a função simples $f(z) = x + 4iy$ é contínua em todo o plano complexo, pois as partes real e imaginária de $f$, $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = 4y$, são contínuas em todo ponto $(x, y)$. No entanto, vimos no Exemplo 3 que $f(z) = x + 4iy$ não é diferenciável em qualquer ponto $z$.

Como outra consequência de diferenciabilidade, a regra de L'Hôpital para o cálculo da forma indeterminada 0/0 também se aplica à análise complexa.

**Teorema 3.1.3 Regra de L'Hôpital**

Se $f$ e $g$ forem funções analíticas em um ponto $z_0$, e se $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{13}$$

A prova de (13) não é difícil nem longa. O Problema 33 do Conjunto de Exercícios 3.1 indica os passos de uma prova.

EXEMPLO 4 **Uso da Regra de L'Hôpital**

Calculemos $\lim_{z \to 2+i} \dfrac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}$.

**Solução** Com $f(z) = z^2 - 4z + 5$ e $g(z) = z^3 - z - 10i$, notamos que $f(2 + i) = 0$ e $g(2 + i) = 0$. O limite dado tem, portanto, a forma indeterminada 0/0. Contudo, como $f$ e $g$ são funções polinomiais, ambas são necessariamente analíticas em $z_0 = 2 + i$. Usando

$$f'(z) = 2z - 4, \quad g'(z) = 3z^2 - 1, \quad f'(2+i) = 2i, \quad g'(2+i) = 8 + 12i,$$

vemos que (13) fornece

$$\lim_{z \to 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \frac{f'(2+i)}{g'(2+i)} = \frac{2i}{8 + 12i} = \frac{3}{26} + \frac{1}{13}i.$$

□

Na parte (b) do Exemplo 4 da Seção 2.6 recorremos ao longo processo de fatoração e simplificação para calcular o limite

$$\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}. \tag{14}$$

Uma reanálise deste exemplo mostra que o limite (14) tem a forma indeterminada 0/0. Com $f(z) = z^2 - 2z + 4$, $g(z) = z - 1 - \sqrt{3}i$, $f'(z) = 2z - 2$ e $g'(z) = 1$. A regra de L'Hôpital (13) fornece imediatamente

$$\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i} = \frac{f'(1 + \sqrt{3}i)}{1} = 2\left(1 + \sqrt{3}i - 1\right) = 2\sqrt{3}i.$$

Observações

## *Comparação com Análise Real*

(*i*) No cálculo real a derivada de uma função $y = f(x)$ em um ponto $x$ tem várias interpretações. Por exemplo, $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x, f(x))$. Quando a inclinação é positiva, negativa ou nula, a função, por sua vez, está aumentando, diminuindo ou, possivelmente, tem um máximo ou mínimo. Além disso, $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de $f$ em $x$. Em um contexto físico, esta taxa de variação pode ser interpretada como velocidade de um objeto móvel. *Nenhuma dessas interpretações se aplica ao cálculo complexo.* Portanto, vale a pergunta: o que significa a derivada de uma função complexa $w = f(z)$? Aqui está a resposta: na análise complexa, o interesse principal *não* é o que a derivada de uma função *significa* ou *representa*, mas sim se a função $f$ realmente *tem* uma derivada. O fato de uma função complexa $f$ possuir uma derivada diz muito sobre a função. Como acabamos de ver, quando $f$ é diferenciável em $z$ e em todo ponto em uma vizinhança de $z$, $f$ é analítica no ponto $z$. A importância de funções analíticas será reforçada ao longo deste livro. Por exemplo, a derivada tem um papel importante na teoria de transformações por funções complexas. Grosseiramente, sob uma transformação definida por uma função analítica $f$, a amplitude e o sentido de um ângulo entre duas curvas que se cruzam em um ponto $z_0$ no plano complexo são preservados no plano $w$ em todos os pontos para os quais $f'(z) \neq 0$, como discutiremos no Capítulo 7.

(*ii*) Salientamos anteriormente que $f(z) = |z|^2$ era diferenciável apenas no único ponto $z = 0$. Em contraste, a função real $f(x) = |x|^2$ é diferenciável em qualquer ponto. A função real $f(x) = x$ é diferenciável em qualquer ponto, mas a função complexa $f(z) = x = \text{Re}(z)$ não é diferenciável em qualquer ponto.

(*iii*) As fórmulas de diferenciação (2)–(8) são importantes, mas não tão importantes como na análise real. Na análise complexa, lidamos com funções do tipo $f(z) = 4x^2 - iy$ ou $g(z) = xy + i(x + y)$, que, mesmo que possuam derivadas, não podem ser diferenciadas pelas fórmulas (2)–(8).

(*iv*) Nesta seção não mencionamos o conceito de derivadas de ordens superiores de funções complexas. Discutiremos este tema em detalhe na Seção 5.5. Não há qualquer surpresa na definição de derivadas de ordens superiores: são definidas exatamente da mesma forma que na análise real. Por exemplo, a derivada de segunda ordem (ou segunda derivada) é a derivada da primeira derivada. No caso de $f(z) = 4z^3$, temos $f'(z) = 12z^2$, de modo que a segunda derivada é $f''(x) = 24z$. Contudo, existe uma grande diferença entre as análises real e complexa no que diz respeito à existência de derivadas de ordens superiores. Na análise real, se uma função $f$ possuir, digamos, a primeira derivada, não há garantia de que possua quaisquer derivadas de ordens superiores. Por exemplo, no intervalo $(-1, 1)$, $f(x) = x^{3/2}$ é diferenciável em $x = 0$, mas $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$ não é diferenciável em $x = 0$. Na análise complexa, se uma função $f$ for *analítica* em um domínio $D$, por definição, $f$ possui uma derivada em cada ponto de $D$. Veremos, na Seção 5.5, que este fato garante que $f$ possui derivadas de ordens superiores em todos os pontos em $D$. Na verdade, na análise complexa uma função analítica $f$ é infinitamente diferenciável em $D$.

(*v*) Na análise real, a definição de "analítica em um ponto $a$" difere da definição usual deste conceito na análise complexa (Definição 3.1.2). Na análise real, analiticidade de uma função é definida em termos de série de potências: uma função $y = f(x)$ é analítica em um ponto $a$ se $f$ tiver uma série de Taylor em $a$ que a represente em alguma vizinhança do ponto. Tendo em mente a observação (*iv*), por que essas duas definições não são, de fato, tão diferentes?

(*vi*) Como ocorre no cálculo real, pode haver necessidade de aplicações sucessivas da regra de L'Hôpital para calcular um limite. Em outras palavras, mesmo que $f(z_0)$, $g(z_0)$, $f'(z_0)$ e $g'(z_0)$ sejam todas iguais a zero, é possível que o limite $\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z)$ exista. Em geral, se $f$, $g$ e suas primeiras $n$–1 derivadas forem nulas em $z_0$ e $g^{(n)}(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.1 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–6, use a Definição 3.1.1 para calcular $f'(z)$ para a função dada.

**1.** $f(z) = 9iz + 2 - 3i$

**2.** $f(z) = 15z^2 - 4z + 1 - 3i$

**3.** $f(z) = iz^3 - 7z^2$

**4.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

**5.** $f(z) = z - \dfrac{1}{z}$

**6.** $f(z) = -z^{-2}$

Nos Problemas 7–10, use a definição alternativa (12) para calcular $f'(z)$ para a função dada.

**7.** $f(z) = 5z^2 - 10z + 8$

**8.** $f(z) = z^3$

**9.** $f(z) = z^4 - z^2$

**10.** $f(z) = \dfrac{1}{2iz}$

Nos Problemas 11–18, use as regras de diferenciação para calcular $f'(z)$ para a função dada.

**11.** $f(z) = (2-i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6$

**12.** $f(z) = 5(iz)^3 - 10z^2 + 3 - 4i$

**13.** $f(z) = (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i)$

**14.** $f(z) = (z^2 + 2z - 7i)^2(z^4 - 4iz)^3$

**15.** $f(z) = \dfrac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}$

**16.** $f(z) = -5iz^2 + \dfrac{2+i}{z^2}$

**17.** $f(z) = (z^4 - 2iz^2 + z)^{10}$

**18.** $f(z) = \left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i}\right)^3$

**19.** A função $f(z) = |z|^2$ é contínua na origem.

(a) Mostre que $f$ *é* diferenciável na origem.

(b) Mostre que $f$ *não é* diferenciável em qualquer ponto $z \neq 0$.

**20.** Mostre que a função

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \end{cases}$$

não é diferenciável em $z = 0$; para isso, primeiro faça $\Delta z \to 0$ ao longo do eixo $x$ e, a seguir, ao longo do eixo $y$.

Nos Problemas 21 e 22, proceda como no Exemplo 3 e mostre que a função dada não é diferenciável em qualquer ponto.

**21.** $f(z) = \bar{z}$

**22.** $f(z) = |z|$

Nos Problemas 23–26, use a regra de L'Hôpital para calcular o limite desejado.

**23.** $\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{z^7 + i}{z^{14} + 1}$

**24.** $\displaystyle\lim_{z \to \sqrt{2} + \sqrt{2}i} \frac{z^4 + 16}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4}$

**25.** $\displaystyle\lim_{z \to 1+i} \frac{z^5 + 4z}{z^2 - 2z + 2}$

**26.** $\displaystyle\lim_{z \to \sqrt{2}i} z\frac{z^3 + 5z^2 + 2z + 10}{z^5 + 2z^3}$

Nos Problemas 27–30, determine os pontos em que a função dada não é analítica.

**27.** $f(z) = \dfrac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}$

**28.** $f(z) = -5iz^2 + \dfrac{2+i}{z^2}$

**29.** $f(z) = (z^4 - 2iz^2 + z)^{10}$

**30.** $f(z) = \left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i}\right)^3$

### Foco em Conceitos

**31.** Use a Definição 2.6.2 e o Teorema 2.6.2 e prove a regra para constante $\dfrac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$.

**32.** Use a Definição 2.6.2 e o Teorema 2.6.2 e prove a regra para soma $\dfrac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$.

**33.** Neste problema você é guiado no início da prova da proposição:

*Se as funções $f$ e $g$ forem analíticas em um ponto $z_0$* e $f(z_0) = 0$ e $g(z_0) = 0$, mas $g'(z_0) \neq 0$, *então* $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

**Prova** Iniciamos com a hipótese de que $f$ e $g$ sejam analíticas em um ponto $z_0$. Analiticidade em $z_0$ implica em $f$ e $g$ serem diferenciáveis em $z_0$. Portanto, de (12), os dois limites

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{e} \quad g'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

existem. Contudo, como $f(z_0) = 0$ e $g(z_0) = 0$, os limites são iguais a

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} \quad \text{e} \quad g'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{z - z_0}.$$

Agora, analise $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}$ e complete a prova.

**34.** Neste problema você é guiado no início da prova da regra para o produto.

**Prova** Iniciamos com a hipótese de que $f$ e $g$ sejam diferenciáveis em um ponto $z$; ou seja, cada um dos seguintes limites existe:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \text{e} \quad g'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z}$$

(a) Justifique a igualdade

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \left[\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} g(z+\Delta z) + f(z)\frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z}\right].$$

(b) Use a Definição 2.6.2 para justificar $\lim\limits_{\Delta z\to 0} g(z+\Delta z) = g(z)$.

(c) Use os Teoremas 2.6.2($ii$) e 2.6.2($iii$) para completar a prova.

**35.** Neste problema, usando a forma polar $\Delta z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, você deverá provar que $f(z) = \bar{z}$ não é diferenciável em todos os pontos.

(a) A que deve tender $r$ se $\Delta z \to 0$? deve tender a um valor específico?

(b) Se $f(z) = \bar{z}$, mostre que

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}.$$

(c) Explique sucintamente por que o resultado da parte (b) mostra que $f$ não é diferenciável em todos os pontos.

**36.** Neste problema, usando a definição alternativa (12) e as formas polares de $z$ e $z_0$, você deverá provar que $f(z) = |z|$ não é diferenciável em *todos os pontos*.

(a) Sejam $z_0 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $z = (r + \Delta r)(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Ao longo desse percurso, calcule $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

(b) Sejam $z_0 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $z = r[\cos(\theta + \Delta) + i \operatorname{sen}(\theta + \Delta)]$. Ao longo deste percurso, calcule $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

(c) Explique sucintamente por que os resultados das partes (a) e (b) mostram que $f$ não é diferenciável em todos os pontos.

**37.** Suponha que $f'(z)$ exista em um ponto $z$; $f'(z)$ é contínua em $z$?

**38.** (a) Seja $f(z) = z^2$. Escreva as partes real e imaginária de $f$ e de $f'$. O que você observa?

(b) Repita a parte (a) para $f(z) = 3iz + 2$.

(c) Desenvolva uma conjectura a respeito da relação entre as partes real e imaginária de $f$ e de $f'$.

## 3.2 Equações de Cauchy-Riemann

Na seção anterior vimos que uma função $f$ de uma variável complexa $z$ é *analítica em um ponto* $z$ quando for diferenciável em $z$ em todo ponto em alguma vizinhança de $z$. Esta exigência é mais severa do que a simples *diferenciabilidade em um ponto*, pois uma função complexa pode ser diferenciável em um ponto $z$ e não ser diferenciável em qualquer outro ponto. Uma função $f$ é *analítica em um domínio* $D$ se for diferenciável em todos os pontos em $D$. A seguir, desenvolveremos um teste da analiticidade de uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ com base nas derivadas parciais das partes real e imaginária $u$ e $v$.

**Uma Condição Necessária para Analiticidade** O próximo teorema mostra que se uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for diferenciável em um ponto $z$, as funções $u$ e $v$ devem satisfazer um par de equações que relacionam suas derivadas parciais de primeira ordem.

**Teorema 3.2.1 Equações de Cauchy-Riemann**

Suponhamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja diferenciável em um ponto $z = x + iy$. Então, em $z$ as derivadas parciais de primeira ordem de $u$ e $v$ devem satisfazer as **Equações de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

**Prova** A derivada de $f$ em $z$ é dada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{2}$$

Escrevendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, (2) fica escrita como

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{3}$$

Como, por hipótese, o limite (2) existe, $\Delta z$ pode se aproximar de zero ao longo de qualquer direção conveniente. Em particular, se fizermos $\Delta z \to 0$ ao longo de uma reta horizontal, $\Delta y = 0$ e $\Delta z = \Delta x$. Podemos, então, escrever (3) como

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i\left[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}. \end{aligned} \tag{4}$$

A existência de $f'(z)$ implica que cada limite em (4) existe. Esses limites são a definição das derivadas parciais de primeira ordem de $u$ e de $v$ em relação a $x$, respectivamente. Portanto, mostramos duas coisas: que $u/x$ e $v/x$ existem no ponto $z$ e que a derivada de $f$ é

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5}$$

Agora façamos $\Delta z \to 0$ ao longo de uma reta vertical. Com $\Delta x = 0$ e $\Delta z = i\Delta y$, (3) fica escrita como

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}. \tag{6}$$

Neste caso, (6) mostra que $u/y$ e $v/y$ existem em $z$ e que

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{7}$$

Igualando as partes real e imaginária de (5) e (7), obtemos o par de equações em (1).

Como o Teorema 3.2.1 afirma que as equações de Cauchy-Riemann (1) são válidas em $z$ como uma consequência *necessária* do fato de $f$ ser diferenciável em $z$, não podemos usar este teorema para determinar em que pontos $f$ é diferenciável. *Contudo*, é importante ressaltar que o Teorema 3.2.1 pode nos informar onde a função $f$ não possui uma derivada. Se as equações (1) *não* forem satisfeitas em um ponto $z$, $f$ não pode ser diferenciável em $z$. Já vimos, no Exemplo 3 da Seção 3.1, que $f(z) = x + 4iy$ não é diferenciável em qualquer ponto $z$. Se fizermos $u = x$ e $v = 4y$, então $\partial u/\partial x = 1$, $\partial v/\partial y = 4$, $\partial u/\partial y = 0$ e $\partial v/\partial x = 0$. Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 4$$

as duas equações em (1) não podem ser satisfeitas simultaneamente em qualquer ponto $z$. Consequentemente, segundo o Teorema 3.2.1, $f$ não é diferenciável em todo o plano complexo.

O Teorema 3.2.1 também implica que se uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for analítica em todo um domínio $D$, as funções reais $u$ e $v$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (1) em todo ponto em $D$.

---

**EXEMPLO 1 Comprovação do Teorema 3.2.1**

A função polinomial $f(z) = z^2 + z$ é analítica para todo $z$ e pode ser escrita como $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + y)$. Logo, $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ e $v(x, y) = 2xy + y$. Para qualquer ponto $(x, y)$ no plano complexo, vemos que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

□

A forma contrapositiva* da sentença que precede o Exemplo 1 é

### *Critério para Não Analiticidade*

*Se as equações de Cauchy-Riemann não forem satisfeitas em todo pondo $z$ em um domínio $D$, então a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ não pode ser analítica em $D$.*

---

**EXEMPLO 2 Uso das Equações de Cauchy-Riemann**

Mostremos que a função complexa $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ não é analítica em qualquer ponto.

**Solução** Façamos $u(x, y) = 2x^2 + y$ e $v(x, y) = y^2 - x$. De

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \tag{8}$$

vemos que $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, mas a igualdade $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ é satisfeita na reta $y = 2x$. No entanto, para qualquer ponto $z$ na reta não existe uma vizinhança ou disco aberto em torno de $z$ em que as equações de Cauchy-Riemann sejam satisfeitas. Concluímos que $f$ não é analítica em todos os pontos. □

**Uma Condição Suficiente para Analiticidade** As equações de Cauchy-Riemann apenas não asseguram analiticidade de uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ em um ponto $z = x + iy$. É possível que as

---

*A proposição "Se $P$, então $Q$" é logicamente equivalente à forma contrapositiva "Se não $Q$, então não $P$".

equações de Cauchy-Riemann sejam satisfeitas em $z$ e, ainda assim, $f(z)$ pode não ser diferenciável em $z$ ou $f(z)$ pode ser diferenciável em $z$ e não diferenciável em todos os outros pontos. Em qualquer dos casos, $f$ não é analítica em $z$ (Problema 36 do Conjunto de Exercícios 3.2). No entanto, quando acrescentamos a condição de continuidade a $u$ e $v$ e às quatro derivadas parciais $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ e $\partial v/\partial y$, pode-se mostrar que as equações de Cauchy-Riemann são não apenas necessárias, mas também suficientes para garantir a analiticidade de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ em $z$. A prova é longa e complicada, de modo que apresentaremos apenas o resultado.

**Teorema 3.2.2 Critério para Analiticidade**

Suponhamos que as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sejam contínuas e possuam derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio $D$. Se $u$ e $v$ satisfizerem as equações de Cauchy-Riemann (1) em todos os pontos em $D$, então a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em $D$.

---

EXEMPLO 3 **Uso do Teorema 3.2.2**

Para a função $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, as funções reais $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ e $v(x, y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ são contínuas, exceto nos pontos em que $x^2 + y^2 = 0$, ou seja, $z = 0$. Além disto, as quatro derivadas parciais de primeira ordem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

são contínuas, exceto em $z = 0$. Por fim, de

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

vemos que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, exceto em $z = 0$. Assim, concluímos, do Teorema 3.2.2, que $f$ é analítica em qualquer domínio que não contenha o ponto $z = 0$.

Os resultados em (5) e (7) foram obtidos sob a hipótese de que $f$ era diferenciável no ponto $z$. Em outras palavras, se $f$ for diferenciável, (5) e (7) fornecem uma fórmula para o cálculo da derivada $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Por exemplo, sabemos, da parte ($i$) do Teorema 3.1.1, que $f(z) = z^2$ é inteira e, portanto, diferenciável para todo $z$. Com $u(x, y) = x^2 - y^2$, $\partial u/\partial x = 2x$, $v(x, y) = 2xy$ e $\partial v/\partial y = 2y$, (9) fornece

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Recordemos que analiticidade implica diferenciabilidade, mas a recíproca não é verdadeira. O Teorema 3.2.2 tem um análogo que nos dá o seguinte critério para diferenciabilidade.

## *Condições Suficientes para Diferenciabilidade*

*Se as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em alguma vizinhança de um ponto $z$, e se $u$ e $v$ satisfizerem as equações de Cauchy-Riemann (1) em $z$, então a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é diferenciável em $z$ e $f'(z)$ é dada por (9).*

**EXEMPLO 4 Uma Função Diferenciável em uma Reta**

No Exemplo 2 vimos que a função complexa $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ não era analítica em qualquer ponto, mas as equações de Cauchy-Riemann eram satisfeitas na reta $y = 2x$. Como as funções $u(x, y) = 2x^2 + y$, $\partial u/\partial x = 4x$, $\partial u/\partial y = 1$, $v(x, y) = y^2 - x$, $\partial v/\partial x = -1$ e $\partial v/\partial y = 2y$ são contínuas em qualquer ponto, a função $f$ é diferenciável na reta $y = 2x$. Além disso, de (9), vemos que a derivada de $f$ em pontos nesta reta é dada por $f'(z) = 4x - i = 2y - i$. ❑

O teorema a seguir é uma consequência direta das equações de Cauchy-Riemann. A prova é deixada como exercício (Problemas 28 e 30 do Conjunto de Exercícios 3.2).

**Teorema 3.2.3 Funções Constantes**

Suponhamos que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em um domínio $D$.

(*i*) Se $|f(z)|$ for constante em $D$, $f(z)$ também é constante.

(*ii*) Se $f'(z) = 0$ em $D$, $f(z) = c$ em $D$, onde $c$ é uma constante complexa.

**Coordenadas Polares** Na Seção 2.1 vimos que uma função complexa pode ser expressa em termos de coordenadas polares. De fato, com frequência o uso da forma $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ é mais conveniente. Em coordenadas polares as equações de Cauchy-Riemann ficam escritas como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{10}$$

A versão polar de (9) em um ponto $z$, cujas coordenadas polares são $(r, \theta)$, é (Problemas 34 e 35 do Conjunto de Exercícios 3.2)

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right). \tag{11}$$

**Observações**

***Comparação com Análise Real***

No cálculo real, uma das propriedades importantes da função exponencial $f(x) = e^x$ é $f'(x) = e^x$. Em (3) da Seção 2.1 demos a definição da exponencial complexa $f(z) = e^z$. Agora, estamos aptos a mostrar que $f(z) = e^z$ é diferenciável em qualquer ponto e que esta função complexa tem a mesma propriedade de sua análoga real, ou seja, $f'(z) = e^z$ (Problema 23 do Conjunto de Exercícios 3.2).

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.2 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1 e 2 a função dada é analítica para todo $z$. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todos os pontos.

**1.** $f(z) = z^3$

**2.** $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$

Nos Problemas 3–8, mostre que a função dada não é analítica em qualquer ponto.

**3.** $f(z) = \text{Re}(z)$

**4.** $f(z) = y + ix$

**5.** $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$

**6.** $f(z) = \bar{z}^2$

**7.** $f(z) = x^2 + y^2$

**8.** $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

Nos Problemas 9–16 (**a**) use o Teorema 3.2.2 para mostrar que a função dada é analítica em um domínio apropriado, e (**b**) use (9) ou (11) para calcular a derivada da função no domínio.

**9.** $f(z) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\,\text{sen}\,y$

**10.** $f(z) = x + \operatorname{sen} x \cosh y + i(y + \cos x \operatorname{senh} y)$

**11.** $f(z) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy + ie^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy$

**12.** $f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1)$

**13.** $f(z) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - i\dfrac{y}{(x-1)^2 + y^2}$

**14.** $f(z) = \dfrac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$

**15.** $f(z) = \dfrac{\cos\theta}{r} - i\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r}$

**16.** $f(z) = 5r\cos\theta + r^4\cos 4\theta + i(5r\operatorname{sen}\theta + r^4 \operatorname{sen} 4\theta)$

Nos Problemas 17 e 18 determine constantes reais $a$, $b$, $c$ e $d$ de modo que a função dada seja inteira.

**17.** $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$

**18.** $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$

Nos Problemas 19–22 (**a**) mostre que a função dada não é analítica em qualquer ponto, mas é diferenciável ao lo da(s) curva(s) indicada(s), e (**b**) use (9) ou (11) para calcular a derivada da função na curva.

**19.** $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$; eixo $x$

**20.** $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2$; eixos coordenados

**21.** $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$; eixos coordenados

**22.** $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$; $y = x + 2$

**23.** Na Seção 2.1 definimos a função exponencial complexa $f(z) = e^z$ como $e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$.

(**a**) Mostre que $f(z) = e^z$ é uma função inteira.

(**b**) Mostre que $f'(z) = f(z)$.

**24.** Na Seção 2.6, definimos o ramo principal da raiz quadrada complexa como $z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $-\pi < \theta < \pi$.

(**a**) Use (10) para mostrar que $f_1(z) = z^{1/2}$ é analítica no domínio $- < \theta < \pi$.

(**b**) Use (10) para mostrar que $f_1'(z) = \frac{1}{2}z^{-1/2}$ neste domínio.

## Foco em Conceitos

**25.** Suponha que $f(z)$ seja analítica. Mostre que $|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$.

**26.** Suponha que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sejam as partes real e imaginária de uma função analítica $f$. A função $g(x, y) =$ $v(x, y) + iu(x, y)$ pode ser analítica? Justifique sua resposta matematicamente.

**27.** Suponha que $f(z)$ seja analítica. A função $g(z) = \overline{f(z)}$ pode ser analítica? Justifique sua resposta matemati mente.

**28.** Neste problema, você será guiado no início da prova da proposição:

*Se $f$ for analítica em um domínio $D$ e $|f(z)| = c$, onde $c$ é uma constante, então $f$ é uma constante em todos os pontos em $D$.*

**Prova** Iniciamos com a hipótese $|f(z)| = c$. Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então $|f(z)|^2 = c^2$ é o mesmo que $u^2 +$ $v^2 = c^2$. As derivadas parciais da última expressão em relação a $x$ e a $y$ são, respectivamente,

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \quad \text{e} \quad 2uu_y + 2vv_y = 0.$$

Complete a prova usando as equações de Cauchy-Riemann para substituir $v_x$ e $v_y$ no último par de equações. A seguir, resolva o resultado para $u_x$ e $u_y$ e tire uma conclusão. Use as equações de Cauchy-Riemann novamente e resolva para $v_x$ e $v_y$.

**29.** Se $f(z) = \bar{z}/z$, mostre que $|f(z)|$ é constante no domínio definido por $z \neq 0$. Explique por que isso não contradiz o Teorema 3.2.3($i$).

**30.** Neste problema, você será guiado no início da prova da proposição:

*Se $f$ for analítica em um domínio $D$ e $f'(z) = 0$, então $f$ é constante em todos os pontos em $D$.*

**Prova** Iniciamos com a hipótese de que $f$ é analítica em $D$ e, portanto, diferenciável em todos os pontos em $D$. De (9) desta seção e da hipótese $f'(z) = 0$ em $D$, temos $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Complete a prova.

**31.** Use as equações de Cauchy-Riemann para mostrar que se $f$ for analítica em um domínio $D$ e se $f'(z)$ for uma constante, então $f(z)$ deve ser uma função linear complexa em todos os pontos em $D$.

**32.** Use a proposição do Problema 30 para mostrar que, se $f$ e $g$ forem analíticas e $f'(z) = g'(z)$, então $f(z) = g(z) + c$, onde $c$ é uma constante. [*Sugestão:* forme $h(z) = f(z) - g(z)$.]

**33.** Se $f(z)$ e $\overline{f(z)}$ forem analíticas em um domínio $D$, o que pode ser dito a respeito de $f$ em todos os pontos em $D$?

**34.** Sejam $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\text{sen}\theta, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\,\text{sen}\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta \tag{12}$$

e
$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\text{sen}\theta, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x}r\,\text{sen}\theta + \frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta. \tag{13}$$

Agora, use (1) nas expressões anteriores para $v_r$ e $v$. Compare seus resultados com as expressões para $u_r$ e $u$ e deduza as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares, dadas em (10).

**35.** Suponha que a função $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ seja diferenciável em um ponto $z$, cujas coordenadas polares são $(r, )$. Resolva as duas equações em (12) para $u_x$ e, então, as duas equações em (13) para $v_x$. A seguir, mostre que a derivada de $f$ em $(r, )$ é

$$f'(z) = (\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

**36.** Considere a função

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \dfrac{z^5}{|z^4|}, & z \neq 0. \end{cases}$$

(a) Expresse $f$ na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

(b) Mostre que $f$ não é diferenciável na origem.

(c) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas na origem. [*Sugestão:* use as definições baseadas em limites das derivadas parciais $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ e $\partial v/\partial y$ em $(0, 0)$.]

## 3.3 Funções Harmônicas

Na Seção 5.5 veremos que quando uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em um ponto $z$, *todas* as derivadas de $f$: $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, ... também são analíticas em $z$. Como consequência deste fato notável, podemos concluir que *todas* as derivadas parciais das funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em $z$. Da continuidade das derivadas parciais, mostramos que as derivadas parciais mistas de segunda ordem são iguais. Este último fato, em conjunto com as equações de Cauchy-Riemann, será usado nesta seção para demonstrar que existe uma relação entre as partes real e imaginária de uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e a equação diferencial parcial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Esta equação, uma das mais importantes em matemática aplicada, é conhecida como **equação de Laplace** em duas variáveis. A soma $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ das duas derivadas parciais de segunda ordem em (1) é denotada $\nabla^2\phi$ e denominada **laplaciano** de $\phi$. A equação de Laplace (1) é, então, abreviada como $\nabla^2\phi = 0$.

**Funções Harmônicas** A solução $\phi(x, y)$ da equação de Laplace (1) em um domínio $D$ do plano complexo recebe um nome especial.

**Definição 3.3.1 Funções Harmônicas**

Uma função de valor real $\phi$ de duas variáveis reais $x$ e $y$ que possui derivadas parciais de primeir[illegible] segunda ordens contínuas em um domínio $D$ e satisfaz a equação de Laplace é **harmônica** em $D$.

Funções harmônicas são encontradas no estudo de temperaturas e potenciais. Essas aplicações [illegible] apresentadas na Seção 3.4. O próximo teorema mostra que as partes real e imaginária de uma f[illegible] analítica são harmônicas.

**Teorema 3.3.1 Funções Harmônicas**

Seja uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica em um domínio $D$. Então, as funç[illegible] $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são harmônicas em $D$.

**Prova** Assumamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em um domínio $D$ e que $u$ e $v$ têm deri[illegible] parciais de segunda ordem contínuas em $D$.* Como $f$ é analítica, as equações de Cauchy-Riemann s[illegible] tisfeitas em todo ponto $z$. Diferenciando os dois lados de $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ em relação a $x$ e diferencian[illegible] dois lados de $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ em relação a $y$, obtemos, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Com a hipótese de continuidade, as derivadas parciais mistas $\partial^2 v/\partial x y$ e $\partial^2 v/\partial y x$ são iguais. Portant[illegible] mando as duas equações em (2) temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 u = 0.$$

Isto mostra que $u(x, y)$ é harmônica.

Agora, diferenciando os dois lados de $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ em relação a $y$ e diferenciando os dois la[illegible] $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ em relação a $x$, obtemos, respectivamente, $\partial^2 u/\partial y \partial x = \partial^2 v/\partial y^2$ e $\partial^2 u/\partial x \partial y = -\partial^2$[illegible] Subtraindo as duas últimas equações, obtemos $\nabla^2 v = 0$.

**EXEMPLO 1 Funções Harmônicas**

A função $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ é inteira. Portanto, as funções $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) =$ [illegible] necessariamente harmônicas em qualquer domínio $D$ no plano complexo. Isso também pode ser veri[illegible] diretamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0.$$

**Funções Conjugadas Harmônicas** Acabamos de mostrar que se uma função $f(z) = u(x, y) +$ [illegible] $y)$ for analítica em um domínio $D$, suas partes real e imaginária $u$ e $v$ são necessariamente harm[illegible] em $D$. Agora, suponhamos que $u(x, y)$ seja uma dada função real que é harmônica em $D$. Se for po[illegible] encontrar outra função harmônica $v(x, y)$, de modo que $u$ e $v$ satisfaçam as equações de Cauchy-Ri[illegible] em todo o domínio $D$, a função $v(x, y)$ é denominada **conjugada harmônica** de $u(x, y)$. Combinan[illegible] funções na forma $u(x, y) + iv(x, y)$, obtemos uma função complexa que é analítica em $D$.

*A continuidade das derivadas parciais de segunda ordem de $u$ e $v$ não é parte da hipótese do teorema. Este fato será prov[illegible] Capítulo 5.

EXEMPLO 2 **Conjugada Harmônica**

(a) Comprovemos que a função $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ é harmônica em todo o plano complexo.
(b) Determinemos a função conjugada harmônica de $u$.

**Solução**

(a) Das derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

vemos que $u$ satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

(b) Como a função conjugada harmônica $v$ deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann $\partial v/\partial y = \partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y$, devemos ter

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 5. \tag{3}$$

A integração parcial da primeira equação em (3) em relação à variável $y$ fornece $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$. A derivada parcial em relação a $x$ desta última equação é

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x).$$

Quando este resultado é substituído na segunda equação em (3), obtemos $h'(x) = 5$, de modo que $h(x) = 5x + C$, onde $C$ é uma constante real. Portanto, a conjugada harmônica de $u$ é $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$.

❑

No Exemplo 2, a combinação de $u$ com sua conjugada harmônica $v$ na forma $u(x, y) + iv(x, y)$ resulta na função complexa

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 - 5y + i(3x^2 - y^3 + 5x + C)$$

que é uma função analítica em todo o domínio $D$ que, neste caso, consiste em todo o plano complexo. No Exemplo 1, como $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ é inteira, a função real $v(x, y) = 2xy$ é a conjugada harmônica de $u(x, y) = x^2 - y^2$ (Problema 20 do Conjunto de Exercícios 3.3).

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

Nesta seção vimos que se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for uma função analítica em um domínio $D$, as duas funções $u$ e $v$ satisfazem $\nabla^2\phi = 0$ em $D$. Existe uma outra importante relação entre funções analíticas e a equação de Laplace. Em matemática aplicada é comum a situação de desejarmos resolver a equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ em um domínio $D$ no plano $xy$ e, por razões fundamentalmente associadas à forma de $D$, não ser possível determinar $\phi$. *Contudo*, pode ser possível identificar uma transformação analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ou

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{4}$$

do plano $xy$ ao plano $uv$, de modo que $D'$, a imagem de $D$ sob (4), não apenas tenha uma forma mais conveniente, mas a função $\phi(x, y)$ – que satisfaz a equação de Laplace em $D$ – também satisfaça a equação de Laplace em $D'$. Assim, resolvemos a equação de Laplace em $D'$ (a solução $\phi$ será uma função de $u$ e $v$) e, a seguir, retornamos ao plano $xy$ e a $\phi(x, y)$ por meio de (4). Esta *invariância* da equação de Laplace sob transformações será explorada nos Capítulos 4 e 7. A Figura 3.3.1 ilustra o conceito.

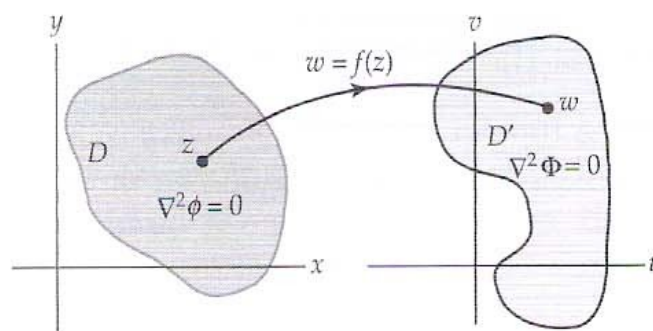



**Figura 3.3.1** Uma solução da equação de Laplace em $D$ é calculada resolvendo-a em $D'$.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.3 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do li...*

Nos Problemas 1–10 (**a**) comprove que a função dada $u$ é harmônica em um domínio apropriado $D$, (**b**) determine $v(x, y)$, a conjugada harmônica de $u$, e (**c**) forme a correspondente função analítica $f(z) = u + iv$.

**1.** $u(x, y) = x$

**2.** $u(x, y) = 2x - 2xy$

**3.** $u(x, y) = x^2 - y^2$

**4.** $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

**5.** $u(x, y) = \log_e(x^2 + y^2)$

**6.** $u(x, y) = \cos x \cosh y$

**7.** $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y)$

**8.** $u(x, y) = -e^{-x} \operatorname{sen} y$

**9.** $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

**10.** $u(x, y) = \arctan(-y/x)$

Nos Problemas 11 e 12 comprove que a função dada $u$ é harmônica em um domínio apropriado $D$. Determine sua conjugada harmônica $v$ e uma função analítica $f(z) = u + iv$ que satisfaça a condição indicada.

**11.** $u(x, y) = xy + x + 2y - 5$; $f(2i) = -1 + 5i$

**12.** $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$; $f(1 + i) = 5 + 4i$

**13.** (**a**) Mostre que $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ é harmônica em um domínio $D$ que não contém a origem.

(**b**) Determine uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que seja analítica no domínio $D$.

(**c**) Expresse a função $f$ da parte (b) em termos do símbolo $z$.

**14.** Seja $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ uma função analítica em um domínio $D$ que não contém a origem. Use as equações de Cauchy Riemann (10) da Seção 3.2 na forma $ru_r = v_\theta$ e $rv_r = -u_\theta$ e mostre que $u(r, \theta)$ satisfaz a equação de Laplace em coordenadas polares:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Nos Problemas 15 e 16 use (5) para comprovar que a dada função $u$ é harmônica em um domínio $D$ que não contém a origem.

**15.** $u(r, \theta) = r^3 \cos 3\theta$

**16.** $u(r, \theta) = \dfrac{10r^2 - \operatorname{sen} 2\theta}{r^2}$

### Foco em Conceitos

**17.** (**a**) Comprove que $u(x, y) = e^{x^2 - y^2}\cos 2xy$ é harmônica em um domínio $D$ apropriado.

(**b**) Determine sua conjugada harmônica $v$ e uma função analítica $f(z) = u + iv$ que satisfaça $f(0) = 1$. [*Sugestão:* ao integrar, inverta a regra para o produto.]

**18.** Expresse a função $f$ obtida no Problema 11 em termos do símbolo $z$.

**19.** (**a**) Mostre que $\phi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ é harmônica, ou seja, satisfaz a equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ em um domínio $D$ do espaço que não contém a origem.

(**b**) A função bidimensional análoga à função na parte (a), ou seja, $\phi(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, é harmônica em um domínio $D$ do plano que não contém a origem?

**20.** Construa um exemplo, acompanhado de uma breve justificativa, que ilustre o seguinte fato:

*Se $v$ for uma conjugada harmônica de $u$ em algum domínio $D$, então $u$ não é, em geral, uma conjugada harmônica de $v$.*

**21.** Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for uma função analítica em um domínio $D$ e $f(z) \neq 0$ para todo $z$ em $D$, mostre que $\phi(x, y) = \log_e|f(z)|$ é harmônica em $D$.

**22.** Neste problema você é guiado no início da prova da proposição:

*Se $u(x, y)$ for uma função harmônica e $v(x, y)$, sua conjugada harmônica, então a função $\phi(x, y) = u(x, y)$ $v(x, y)$é harmônica.*

**Prova** Suponhamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em um domínio $D$. Vimos, na Seção 3.1, que o produto de duas funções analíticas é uma função analítica. Portanto, $|f(z)|^2$ é analítica. Agora, examine $|f(z)|^2$ e complete a prova.

## 3.4 Aplicações

Na Seção 3.3 vimos que, se a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for analítica em um domínio $D$, as partes real e imaginária de $f$ são harmônicas; ou seja, $u$ e $v$ têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e satisfazem a equação de Laplace em $D$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Reciprocamente, se mostrarmos que uma função $u(x, y)$ é harmônica em $D$ podemos determinar uma única (a menos de uma constante aditiva) conjugada harmônica $v(x, y)$ e construir uma função $f(z)$ que seja analítica em $D$.

Nas ciências físicas e na engenharia a equação diferencial parcial de Laplace aparece, com frequência, como um modelo matemático de alguns fenômenos invariantes no tempo e, neste contexto, nosso problema consiste em *resolver* a equação sujeita a certas exigências físicas denominadas condições de contorno ou condições de fronteira (Problemas 11–14 do Conjunto de Exercícios 3.4). Devido à relação exposta em (1), funções analíticas são fontes de um número ilimitado de soluções da equação de Laplace, e devemos ser capazes de identificar uma que atenda o problema em questão (Seções 4.5 e 7.5). Esta é apenas uma razão por que a teoria de variáveis complexas é tão essencial no estudo de matemática aplicada.

Iniciamos esta seção mostrando que as curvas de nível das partes real e imaginária de uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ formam duas **famílias ortogonais** de curvas.

**Famílias Ortogonais** Suponhamos que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em algum domínio $D$. Então, as partes real e imaginária de $f$ podem ser usadas para definir duas famílias de curvas em $D$. As equações

$$u(x, y) = c_1 \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = c_2, \tag{2}$$

onde $c_1$ e $c_2$ são constantes reais arbitrárias, são denominadas **curvas de nível** de $u$ e $v$, respectivamente. As curvas de nível (2) são **famílias ortogonais**. Isto significa que cada curva em uma família é ortogonal a cada curva na outra família. Mais precisamente, em um ponto de interseção $z_0 = x_0 + iy_0$, onde assumiremos $f'(z_0) \neq 0$, a reta tangente $L_1$ à curva de nível $u(x, y) = u_0$ e a reta tangente $L_2$ à curva de nível $v(x, y) = v_0$ são perpendiculares (Figura 3.4.1). Os números $u_0$ e $v_0$ são definidos pelo cálculo dos valores de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ em $z_0$, ou seja, $c_1 = u(x_0, y_0) = u_0$ e $c_2 = v(x_0, y_0) = v_0$. Para provar que $L_1$ e $L_2$ são perpendiculares em $z_0$ demonstramos que a inclinação de uma tangente é o recíproco negativo da inclinação da outra; para isso, mostramos que o produto das duas inclinações é $-1$. Primeiro, usamos a regra da cadeia de diferenciação parcial para diferenciar $u(x, y) = u_0$ e $v(x, y) = v_0$ em relação a $x$:

$u(x, y) = u_0$

$(x_0, y_0)$

$v(x, y) = v_0$

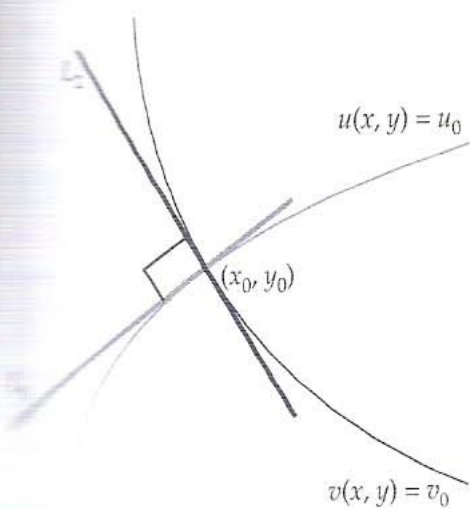



Figura 3.4.1 As tangentes $L_1$ e $L_2$ no ponto de interseção $z_0$ são perpendiculares.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

A seguir, resolvemos cada uma das equações anteriores para $dy/dx$:

$$\overbrace{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}}^{\text{inclinação de uma tangente à curva } u(x,\, y) = u_0}, \qquad \overbrace{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}}^{\text{inclinação de uma tangente à curva } v(x,\, y) = v_0},$$

Em $(x_0, y_0)$, de (3), identificamos as equações de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$; de $f'(z_0) \neq 0$, vemos que o produto das duas funções de inclinação é

$$\left(-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right)\left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = \left(\frac{\partial v/\partial y}{\partial v/\partial x}\right)\left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = -1.$$

---

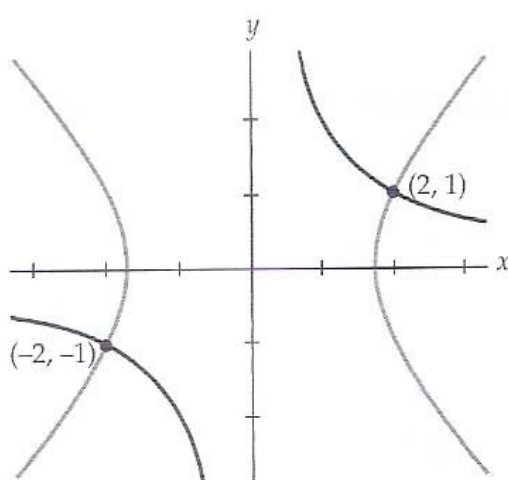
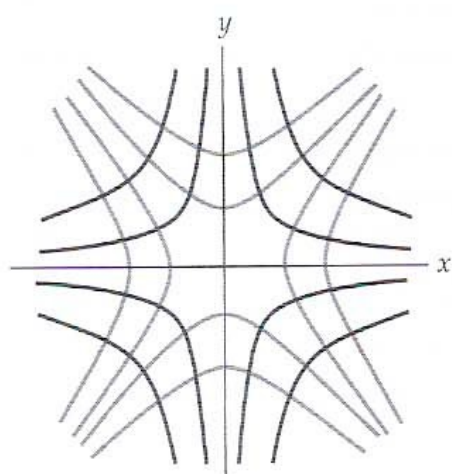
**EXEMPLO 1 Famílias Ortogonais**

(a) Curvas que são ortogonais nos pontos de interseção

(b) Famílias $x^2 - y^2 = c_1$ e $2xy = c_2$

**Figura 3.4.2** Famílias ortogonais

Com $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, identificamos $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xyi$. Para esta função as famílias de curvas de nível $x^2 - y^2 = c_1$ e $2xy = c_2$ são duas famílias de hipérboles. Como $f$ é analítica para todo $z$, estas famílias são ortogonais. Em um ponto específico, digamos, $z_0 = 2 + i$, obtemos $2^2 - 1^2 = 3 = c_1$ e $2(2)(1) = 4 = c_2$; com isso as duas curvas ortogonais são $x^2 - y^2 = 3$ e $xy = 2$. A Figura 3.4.2(a) mostra $x^2 - y^2 = 3$ em cinza e $xy = 2$ em preto; as curvas são ortogonais em $z_0 = 2 + i$(e em $-2 - i$ devido à simetria das curvas). Na Figura 3.4.2(b) as duas famílias são superpostas nos mesmos eixos coordenados; as curvas na família $x^2 - y^2 = c_1$ são desenhadas em cinza e as curvas na família $xy = c_2$, em preto.

**Vetor Gradiente** No cálculo vetorial, se $f(x, y)$ for uma função escalar diferenciável, o **gradiente** de $f$, denotado **grad** $f$ ou $\nabla f$ (o símbolo $\nabla$ é denominado *nabla* ou *del*), é definido como o vetor bidimensional

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Como mostrado em cinza na Figura 3.4.3, o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, em um ponto $(x_0, y_0)$, é perpendicular à curva de nível de $f(x, y)$ que passa pelo ponto, ou seja, à curva de nível de $f(x, y) = c_0$, onde $c_0 = f(x_0, y_0)$. Para comprovar isso, suponhamos que $x = g(t)$, $y = h(t)$, onde $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = h(t_0)$ são equações paramétricas para a curva $f(x_0, y_0) = c_0$. A derivada de $f(x(t), y(t)) = c_0$ em relação a $t$ é

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0.$$

**Figura 3.4.3** Gradiente é perpendicular à curva de nível em $(x_0, y_0)$

Este último resultado é o produto interno (ou escalar) de (5) com o vetor tangente $r'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$. Especificamente, em $t = t_0$, (6) mostra que, se $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, $\nabla f(x_0, y_0) \cdot r'(t_0) = 0$. Isso significa que $\nabla f$ é perpendicular à curva de nível em $(x_0, y_0)$.

**Campos Gradientes** Como discutido na Seção 2.7, na análise complexa, campos vetoriais bidimensionais $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, definidos em algum domínio $D$ do plano, são de interesse, pois $\mathbf{F}$ pode ser representado como uma função complexa $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Em ciências são de particular importância os campos vetoriais que podem ser escritos como o gradiente de alguma função escalar $\phi$ que tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Em outras palavras, campos vetoriais para os quais $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ é o mesmo que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j},$$

de modo que $P(x, y) = \partial\phi/x$ e $Q(x, y) = \partial\phi/\partial y$. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ deste tipo é denominado **campo gradiente**, e a função $\phi$, **função potencial** ou, simplesmente, **potencial**

para **F**. Campos gradientes ocorrem naturalmente no estudo de eletricidade e magnetismo, fluxos fluidos, gravitação e temperaturas no estado estacionário. Em um campo de força gradiente, como o campo gravitacional, o trabalho feito pela força sobre uma partícula que se move da posição $A$ para a posição $B$ é o mesmo em todos os percursos entre esses dois pontos. Além disso, o trabalho feito pela força ao longo de um percurso fechado é zero; em outras palavras, a lei de conservação de energia mecânica se aplica: *energia cinética* + *energia potencial* = *constante*. Por esse motivo, campos gradientes são também denominados **campos conservativos**.

No estudo de eletrostática a intensidade do campo elétrico **F** devido a uma coleção de cargas estacionárias em uma região do plano é dada por $\mathbf{F}(x, y) = -\nabla\phi$, onde a função de valor real $\phi(x, y)$ é denominada **potencial eletrostático**. A lei de Gauss diz que a divergência do campo **F**, ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y$, é proporcional à densidade de carga $\rho$, onde $\rho$ é uma função escalar. Se a região do plano for livre de cargas, a divergência de **F** é zero.* Como $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, se $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, então

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j}\right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0,$$

ou $\nabla^2\phi = 0$. Em outras palavras, a função potencial satisfaz a equação de Laplace e, portanto, é uma função harmônica em algum domínio $D$.

**Potencial Complexo** Em geral, se uma função potencial $\phi(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace em algum domínio $D$, é harmônica; da Seção 3.3, sabemos que existe uma função conjugada harmônica $\psi(x, y)$ definida em $D$, de modo que a função complexa

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{8}$$

Figura 3.4.4 Campo elétrico

seja analítica em $D$. A função $\Omega(z)$ em (8) é denominada **potencial complexo** correspondente ao potencial real $\phi$. Como vimos na discussão inicial desta seção, as curvas de nível de $\phi$ e $\psi$ são famílias ortogonais. As curvas de nível de $\phi$, $\phi(x, y) = c_1$ são denominadas **curvas equipotenciais**, ou seja, curvas ao longo das quais o potencial é constante. No caso em que $\phi$ representa o potencial eletrostático, a intensidade de campo elétrico **F** deve estar direcionada ao longo da família de curvas ortogonais às curvas equipotenciais, pois a força do campo é o gradiente do potencial $\phi$, $\mathbf{F} = -\nabla\phi$; como demonstrado em (6), o vetor gradiente em um ponto $(x_0, y_0)$ é perpendicular a uma curva de nível de $\phi$ em $(x_0, y_0)$. Por esse motivo, as curvas de nível $(x, y) = c_2$, curvas que são ortogonais à família $\phi(x, y) = c_1$, são denominadas **linhas de força** e representam os percursos ao longo dos quais uma partícula carregada se moverá no campo eletrostático (Figura 3.4.4).

**Fluido Ideal** Em mecânica, um fluxo é denominado **fluxo bidimensional** se o fluido (que pode ser água ou, até mesmo, o ar que se desloca em baixa velocidade) se desloca em planos paralelos ao plano $xy$ e as características físicas e de movimento do fluido em cada plano forem precisamente as mesmas que no plano $xy$. Suponhamos que $\mathbf{F}(x, y)$ seja o campo de velocidade bidimensional de um fluido viscoso que é **incompressível**, ou seja, um fluido para o qual div $\mathbf{F} = 0$ ou $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. O fluxo é **irrotacional** se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0}$.** Um fluxo fluido cujo fluxo bidimensional seja irrotacional é denominado **fluido ideal**. O campo de velocidade **F** de um fluido ideal é um campo gradiente e pode ser representado por (7), onde $\phi$ é uma função de valor real denominada **potencial de velocidade**. As curvas de nível $\phi(x, y) = c_1$ são denominadas **curvas equipotenciais** ou, simplesmente, **equipotenciais**. Além disso, $\phi$ satisfaz a equação de Laplace, pois div $\mathbf{F} = 0$ é equivalente a $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$ ou $\nabla^2\phi = 0$, de modo que $\phi$ é harmônica. A conjugada harmônica $\psi(x, y)$ é denominada **função de fluxo** e suas curvas de nível $\psi(x, y) = c_2$, **linhas de fluxo**, as quais representam percursos ao longo dos quais partículas se movem no fluido. A função $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ é denominada **potencial de velocidade complexo** do fluxo (Figura 3.4.5).

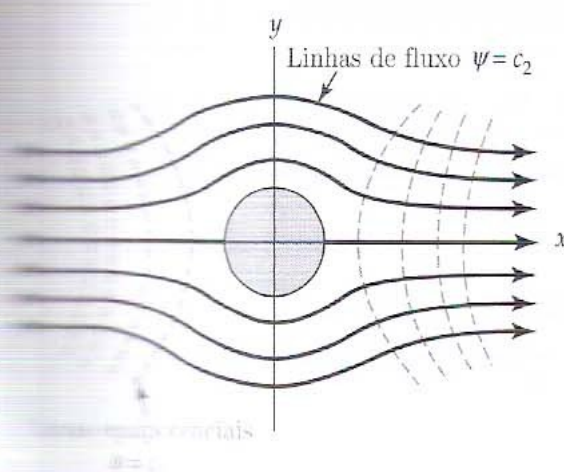



Figura 3.4.5 Fluxo fluido

*O potencial eletrostático, neste caso, é devido a cargas que estão fora da região livre de cargas ou na fronteira da região.

**Discutiremos fluxo fluido em mais detalhe na Seção 5.6.

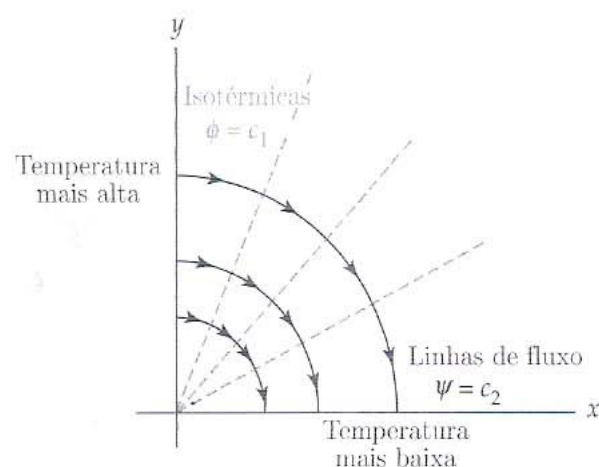



Figura 3.4.6 Fluxo de calor

**Fluxo de Calor** Por fim, se $\phi(x, y)$ representar temperatura invariante no tempo ou em estado estacionário que satisfaz a equação de Laplace, as curvas de nível $\phi(x, y) = c_1$ são as curvas ao longo das quais a temperatura é constante, sendo denominadas **isotérmicas**. As curvas de nível $\psi(x, y) = c_2$ da função conjugada harmônica de $\phi$ são as curvas ao longo das quais o calor flui, e são denominadas **linhas de fluxo** (Figura 3.4.6).

A Tabela 3.4.1 resume algumas das aplicações da função potencial complexo $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ e os nomes dados às curvas de nível

$$\phi(x, y) = c_1 \quad \text{e} \quad \psi(x, y) = c_2.$$

| Aplicação | Curvas de nível $\phi(x, y) = c_1$ | Curvas de nível $\psi(x, y) = c_2$ |
|---|---|---|
| eletrostática | curvas equipotenciais | linhas de força |
| fluxo fluido | curvas equipotenciais | linhas de fluxo |
| gravitação | curvas equipotenciais | linhas de força |
| fluxo de calor | isotérmicas | linhas de fluxo de calor |

**Tabela 3.4.1** Função potencial complexo $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$

**Problemas de Dirichlet** Um clássico e importante problema em matemática aplicada que envolve a solução da equação de Laplace é ilustrado na Figura 3.4.7 e enunciado da seguinte forma:

***Problema de Dirichlet***

*Suponhamos que $D$ seja um domínio no plano e que $g$ seja uma função definida na fronteira de $D$. O problema de determinar uma função $\phi(x, y)$ que satisfaça a equação de Laplace em $D$ e que seja igual a $g$ na fronteira $C$ de $D$ é denominado* ***problema de Dirichlet.***

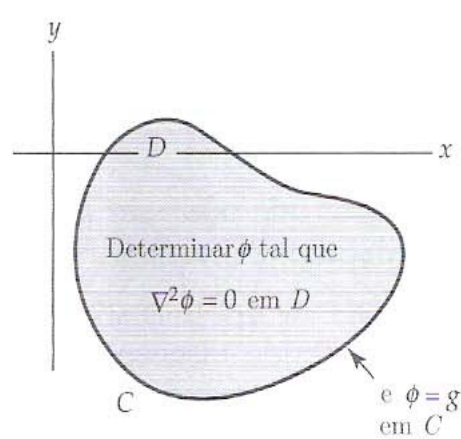



Figura 3.4.7 Problema de Dirichlet

Tais problemas ocorrem com frequência na modelagem bidimensional de eletrostática, fluxo fluido, gravitação e fluxo de calor.

No exemplo a seguir resolveremos um problema de Dirichlet. Embora o problema seja muito simples, sua solução nos ajudará na solução de problemas mais complicados na Seção 4.5.

**EXEMPLO 2 Problema de Dirichlet Simples**

Resolvamos o problema de Dirichlet ilustrado na Figura 3.4.8. O domínio $D$ é uma fita vertical infinita definida por $-1 < x < 1$, $-\infty < y < \infty$; as fronteiras de $D$ são as retas verticais $x = -1$ e $x = 1$.

Figura 3.4.8 Figura para o Exemplo 2

**Solução** O problema de Dirichlet na Figura 3.4.8 é

$$\textit{Resolver}: \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \qquad -1 < x < 1, \qquad -\infty < y < \infty.$$

$$\textit{Sujeito a}: \phi(-1, y) = k_0, \qquad \phi(1, y) = k_1, \qquad -\infty < y < \infty,$$

onde $k_0$ e $k_1$ são constantes.

A forma de $D$ e o fato de as duas condições de contorno serem constantes sugerem que a função $\phi$ independa de $y$; ou seja, é razoável buscar uma solução de (9) da forma $\phi(x)$. Com esta hipótese, a equação diferencial parcial de Laplace

se torna a equação diferencial ordinária $d^2\phi\ /dx^2 = 0$. Integrando duas vezes, obtemos a solução $\phi(x) = ax + b$. As condições de contorno nos permitem determinar os coeficientes $a$ e $b$. Em particular, de $\phi(-1) = k_0$ e $\phi(1) = k_1$, devemos ter $a(-1) + b = k_0$ e $a(1) + b = k_1$, respectivamente. A soma das duas equações simultâneas fornece $2b = k_0 + k_1$; a subtração da primeira equação da segunda resulta em $2a = k_1 - k_0$. Com isso, calculamos $a$ e $b$ como

$$b = \frac{k_1 + k_0}{2} \quad \text{e} \quad a = \frac{k_1 - k_0}{2}.$$

Assim, obtemos a seguinte solução para o dado problema de Dirichlet:

$$\phi(x) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2}. \tag{11}$$

□

O problema no Exemplo 2 pode ser interpretado como a determinação do potencial eletrostático $\phi$ entre dois planos condutores infinitos e paralelos que são mantidos em potenciais constantes. Por satisfazer a equação de Laplace em $D$, $\phi$ é uma função harmônica. Portanto, uma conjugada harmônica $\psi$ pode ser determinada da seguinte forma: como $\phi$ e $\psi$ devem satisfazer a equação de Laplace, temos

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{k_1 - k_0}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

Figura 3.4.9 Curvas equipotenciais e linhas de força para o Exemplo 2

A segunda equação indica que $\psi$ é uma função de $y$ apenas; integrando a primeira equação em relação a $y$, obtemos

$$\psi(y) = \frac{k_1 - k_0}{2}y,$$

onde, por conveniência, tomamos a constante de integração como igual a 0. Portanto, de (8), uma função potencial complexo para o problema de Dirichlet no Exemplo 2 é $\Omega(z) = \phi(x) + i\psi(y)$ ou

$$\Omega(z) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2} + i\frac{k_1 - k_0}{2}y = \frac{k_1 - k_0}{2}z + \frac{k_1 + k_0}{2}.$$

As curvas de nível de $\phi$ ou curvas equipotenciais* são as retas verticais $x = c_1$ mostradas em cinza na Figura 3.4.9; as curvas de nível de $\psi$ ou linhas de força são os segmentos de reta horizontais $y = c_2$ mostrados em preto. A figura mostra claramente que as duas famílias de curvas de nível são ortogonais.

## Observações

Na Seção 4.5 e no Capítulo 7 apresentaremos um método que nos permitirá resolver problemas de Dirichlet com o uso de transformações analíticas.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 3.4 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–4, identifique as duas famílias de curvas de nível definidas pela dada função analítica $f$. Esboce, manualmente, duas curvas de cada família nos mesmos eixos coordenados.

1. $f(z) = 2iz - 3 + i$
2. $f(z) = (z - 1)^2$
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$
4. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

Nos Problemas 5–8, a dada função analítica $f(z) = u + iv$ define duas famílias de curvas de nível $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$. Primeiro, use diferenciação implícita para calcular $dy/dx$ para cada família e, a seguir, comprove que as famílias são ortogonais.

*As curvas de nível de $\phi$ são $\phi(x) = C_1$ ou $\frac{1}{2}(k_1 - k_0)x + \frac{1}{2}(k_1 + k_0) = C_1$. Resolvendo para $x$, obtemos $x = (C_1 - \frac{1}{2}k_1 - k_0)/[\frac{1}{2}(k_1 - k_0)]$. A constante no lado direito desta última equação é tomada como igual a $c_1$.

5. $f(z) = x - 2x^2 + 2y^2 + i(y - 4xy)$

6. $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

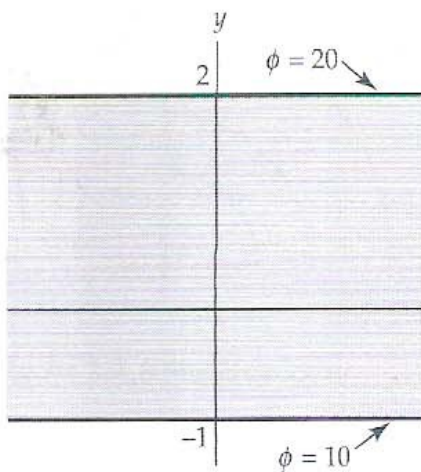
7. $f(z) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\operatorname{sen} y$

8. $f(z) = x + \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

**Figura 3.4.10** Figura para o Problema 12

Nos Problemas 9 e 10, a dada função de valor real $\phi$ é o potencial de velocidade para o fluxo bi-mensional de um fluido incompressível e irrotacional. Determine o campo de velocidade **F** do fluxo. Assuma um apropriado domínio $D$ do plano.

9. $\phi(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

10. $\phi(x, y) = \frac{1}{2}A\log_e\left(x^2 + (y+1)^2\right)$, $A > 0$

11. (a) Determine o potencial $\phi$ quando o domínio $D$ na Figura 3.4.8 é substituído por $0 < x < 1$, $-\infty < y < \infty$, e os potenciais nas fronteiras são $\phi(0, y) = 50$, $\phi(1, y) = 0$.
(b) Determine o potencial complexo $\mathbf{\Omega}(z)$.

12. (a) Determine o potencial $\phi$ no domínio $D$ entre os dois planos condutores infinitos e paralelos ao eixo $x$ mostrados na Figura 3.4.10 quando os potenciais nas fronteiras são $\phi(x, -1) = 10$, $\phi(x, 2) = 20$.
(b) Determine o potencial complexo $\mathbf{\Omega}(z)$.
(c) Esboce as curvas equipotenciais e as linhas de força.

**Figura 3.4.11** Figura para o Problema 13

13. O potencial $\phi(\theta)$ entre os dois planos condutores infinitos que formam a cunha infinita mostrada na Figura 3.4.11 satisfaz a equação de Laplace em coordenadas polares na forma

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = 0.$$

(a) Resolva a equação diferencial sujeita às condições de contorno $\phi(\pi/4) = 30$ e $\phi(0) = 0$.
(b) Determine o potencial complexo $\mathbf{\Omega}(z)$.
(c) Esboce as curvas equipotenciais e as linhas de força.

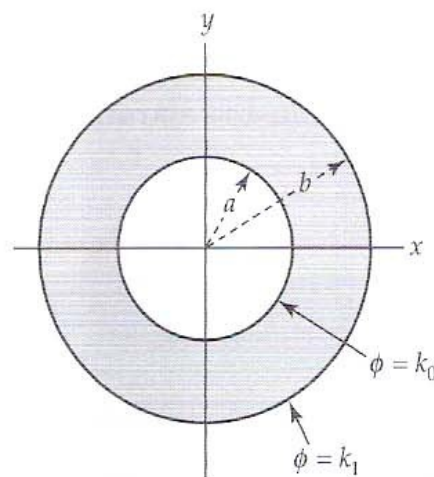



**Figura 3.4.12** Figura para o Problema 14

14. A temperatura de estado estacionário $\phi(r)$ entre os dois cilindros condutores concêntricos mostrados na Figura 3.4.12 satisfaz a equação de Laplace em coordenadas polares na forma

$$r^2\frac{d^2\phi}{dr^2} + r\frac{d\phi}{dr} = 0.$$

(a) Mostre que a solução da equação diferencial sujeita às condições de contorno $\phi(a) = k_0$, $\phi(b) = k_1$, onde $k_0$ e $k_1$ são potenciais constantes, é dada por $\phi(r) = A\log_e r + B$, onde

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\log_e(a/b)} \quad \text{e} \quad B = \frac{-k_0\log_e b + k_1\log_e a}{\log_e(a/b)}.$$

[*Sugestão*: a equação diferencial é conhecida como uma equação de Cauchy-Euler.]
(b) Determine o potencial complexo $\mathbf{\Omega}(z)$.
(c) Esboce as curvas isotérmicas e as linhas de fluxo de calor.

## Foco em Conceitos

15. Considere a função $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$. Descreva a curva de nível $v(x, y) = 0$.

16. As curvas de nível de $u(x, y) = x^2 - y^2$ e de $v(x, y) = 2xy$, discutidas no Exemplo 1, se cruzam em $z = 0$. Esboce as curvas de nível que se cruzam em $z = 0$. Explique por que essas curvas de nível *não* são ortogonais.

17. Releia a discussão anterior sobre famílias ortogonais que inclui a prova de que as retas tangentes $L_1$ e $L_2$ são ortogonais. Na prova que leva a (4), explique onde a hipótese $f'(z_0) \neq 0$ foi usada.

18. Suponha que as duas famílias de curvas $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$ sejam trajetórias ortogonais em um domínio $D$. A função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é necessariamente analítica em $D$?

## Tarefas para o Laboratório de Computação

Nos Problemas 19 e 20, use um SAC ou software para traçado de gráficos e desenhe algumas curvas de níveis que sejam representativas de cada uma das famílias ortogonais $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, definidas pela dada função analítica. Primeiro, faça os gráficos em eixos coordenados diferentes e, depois, nos mesmos eixos coordenados.

19. $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

20. $f(z) = \sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\right)$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$

21. A função $\Omega(z) = A\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $A > 0$, é um potencial complexo de um fluxo fluido bidimensional.
    (a) Assuma $A = 1$. Determine a função potencial $\phi(x, y)$ e a função de fluxo $\psi(x, y)$ do fluxo.
    (b) Expresse a função potencial $\phi$ e a função de fluxo $\psi$ em coordenadas polares.
    (c) Use um SAC ou software para traçado de gráficos e desenhe, nos mesmos eixos coordenados, curvas que sejam representativas de cada uma das famílias ortogonais $\phi(r, \theta y) = c_1$ e $\psi(r, \theta) = c_2$.

22. A função $\Omega(z) = \log_e\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| + i\text{Arg}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ é um potencial complexo de um campo eletrostático bidimensional.
    (a) Mostre que as curvas equipotenciais $\phi(x, y) = c_1$ e as linhas de força $\psi(x, y) = c_2$ são, respectivamente,

$$(x - \coth c_1)^2 + y^2 = \text{csch}^2\, c_1 \quad \text{e} \quad x^2 + (y + \cot c_2)^2 = \csc^2 c_2.$$

    Observe que tanto as curvas equipotenciais como as linhas de força são famílias de curvas.
    (b) Os centros das curvas equipotenciais na parte (a) são $(\coth c_1, 0)$. Aproximadamente onde estão localizados os centros quando $c_1 \to \infty$? Quando $c_1 \to -\infty$? Onde estão localizados os centros quando $c_1 \to 0^+$? Quando $c_1 \to 0^-$?
    (c) Comprove que cada linha de força circular passa por $z = 1$ e por $z = -1$.
    (d) Use um SAC ou software para traçado de gráficos e desenhe, nos mesmos eixos coordenados, curvas que sejam representativas de cada família.

## Questionário de Revisão do Capítulo 3

*(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–12, responda verdadeiro ou falso. Se a afirmação for falsa, justifique sua resposta explicando por que é falsa ou dê um contraexemplo; se a afirmação for verdadeira, justifique sua resposta provando a afirmação ou cite um resultado pertinente do capítulo.

1. Se uma função complexa $f$ for diferenciável em um ponto $z$, então $f$ é analítica em $z$.
2. A função $f(z) = \dfrac{y}{x^2+y^2} + i\dfrac{x}{x^2+y^2}$ é diferenciável para todo $z \neq 0$.
3. A função $f(z) = z^2 + \bar{z}$ não é analítica em qualquer ponto.
4. A função $f(z) = \cos y - i \,\text{sen}\, y$ não é diferenciável em qualquer ponto.
5. Não existe uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tal que $u(x, y) = y^3 + 5x$.
6. A função $u(x, y) = e^{4x}\cos 2y$ é a parte real de uma função analítica.
7. Se $f(z) = e^x \cos y + ie^x \,\text{sen}\, y$, entao $f'(z) = f(z)$.
8. Se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ forem funções harmônicas em um domínio $D$, então a função $f(z) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ é analítica em $D$.
9. Se $g$ for uma função inteira, então $f(z) = (iz^2 + z)\, g(z)$ é necessariamente uma função inteira.
10. As equações de Cauchy-Riemann são condições necessárias para a diferenciabilidade.
11. Mesmo que as equações de Cauchy-Riemann sejam satisfeitas em um ponto $z$, a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ pode não ser diferenciável em $z$.
12. Se a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for analítica em um ponto $z$, necessariamente a função $g(z) = v(x, y) - iu(x, y)$ é analítica em $z$.

Nos Problemas 13–22, tente preencher as lacunas sem consultar o texto.

13. Se $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5iz - 4}$, $=$ ______.

**14.** A função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5iz - 4}$ não é analítica em ______.

**15.** A função $f(z) = (2 - x)^3 + i(y - 1)^3$ é diferenciável em $z =$ ______.

**16.** Para $f(z) = 2x^3 + 3iy^2$, $f'(x + ix^2) =$ ______.

**17.** A função $f(z) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} - i\dfrac{y-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ é analítica em um domínio $D$ que não contém o ponto $z = 1 + i$. Em $D$, $f'(z) =$ ______.

**18.** Determine uma função analítica $f(z) = \log_e \sqrt{x^2 + y^2} + i$ ______ em um domínio $D$ que não contenha a origem.

**19.** A função $f(z)$ é analítica em um domínio $D$ e $f(z) = c + iv(x, y)$, onde $c$ é uma constante real. Então, $f$ é uma ______ em $D$.

**20.** $\displaystyle\lim_{z \to 2i} \frac{z^5 - 4iz^4 - 4z^3 + z^2 - 4iz + 4}{5z^4 - 20iz^3 - 21z^2 - 4iz + 4} =$ ______.

**21.** $u(x, y) = c_1$, sendo $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$, e $v(x, y) = c_2$, sendo $v(x, y) =$ ______, são famílias ortogonais.

**22.** A asserção "*Existe uma função f que é analítica para* $\operatorname{Re}(z) \geq 2$ *e é não analítica em todos os outros pontos*" é falsa porque ______.

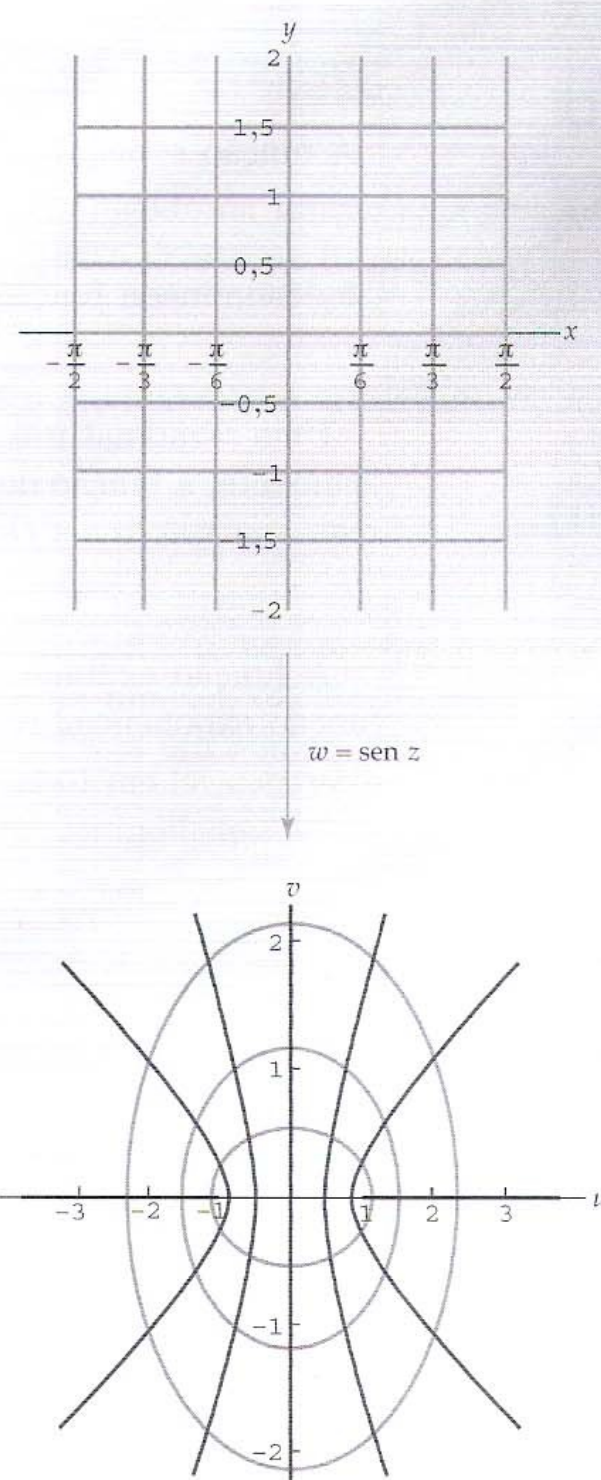
CAPÍTULO

# 4

# Funções Elementares

## Índice do Capítulo



**Introdução** No capítulo anterior, definimos a classe de funções de maior interesse na análise complexa: a das funções analíticas. Neste capítulo definiremos e estudaremos algumas funções analíticas complexas elementares. Em particular, investigaremos as funções exponencial, logarítmica, potência, trigonométricas, hiperbólicas, trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas complexas. Mostraremos que todas estas funções são analíticas em um domínio apropriado e que suas derivadas têm formas semelhantes às de suas análogas reais. Também examinaremos a atuação dessas funções como transformações do plano complexo. O conjunto de funções elementares será uma fértil fonte de exemplos a serem considerados no restante do texto.

Transformação $w = \text{sen } z$. Veja Exemplo 3, Figura 4.3.2.

# 4.1 Funções Exponencial e Logarítmica

As funções exponencial e logarítmica reais têm um importante papel no estudo da análise e equações diferenciais reais. Nesta seção, definiremos e estudaremos os análogos complexos destas funções. Na primeira parte da seção estudaremos a função exponencial complexa $e^z$, introduzida nas Seções 1.6 e 2.1. Um dos conceitos ainda não discutidos e que será abordado nesta seção é o da transformação exponencial $w = e^z$. Na segunda metade da seção apresentaremos o logaritmo complexo ln $z$ para resolver equações exponenciais da forma $e^w = z$. Se $x$ for um dado número *real* positivo, existe uma *única* solução para a equação $e^y = x$, cujo valor é $y = \log_e x$. No entanto, veremos que quando $z$ é um dado número *complexo* existem *infinitas* soluções para a equação $e^w = z$. Portanto, o logaritmo complexo ln $z$ é uma "função multivalente", segundo a interpretação dada na Seção 2.4 para este termo. O valor principal do logaritmo complexo será definido como uma função (unívoca) que associa a entrada complexa $z$ a um dos múltiplos valores de ln $z$. Mostraremos que a função valor principal é uma função inversa da função exponencial $e^z$ definida em um apropriado domínio restrito do plano complexo. Concluiremos a seção com uma discussão da analiticidade de ramos do logaritmo.

## 4.1.1 Função Exponencial Complexa

**Função Exponencial e suas Derivadas** Iniciamos com a repetição da definição da função exponencial complexa dada na Seção 2.1.

**Definição 4.1.1 Função Exponencial Complexa**

A função $e^z$ definida por

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y \tag{1}$$

é denominada **função exponencial complexa.**

Uma razão natural para chamar esta função de função *exponencial* foi ressaltada na Seção 2.1. Especificamente, a função definida por (1) reproduz a função exponencial real quando $z$ é real. Ou seja, se $z$ é real, $z = x + 0i$ e a Definição 4.1.1 fornece:

$$e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x(1 + i \cdot 0) = e^x.$$

A função exponencial complexa também compartilha importantes propriedades diferenciais com a função exponencial real. Vale recordar duas propriedades fundamentais da função exponencial real: é diferenciável em todos os pontos e $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ para todo $x$. A função exponencial complexa tem propriedades semelhantes.

**Teorema 4.1.1 Analiticidade de $e^z$**

A função exponencial $e^z$ é inteira e sua derivada é dada por:

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z. \tag{2}$$

**Prova** Para mostrar que $e^z$ é inteira, usamos o critério para analiticidade dado no Teorema 3.2.2. Primeiro, notamos que as partes real e imaginária, $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, de $e^z$ são funções contínuas e têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas para todo $(x, y)$. Além disso, a satisfação das equações de Cauchy-Riemann em $u$ e $v$ é comprovada com facilidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Consequentemente, a função exponencial $e^z$ é inteira, segundo o Teorema 3.2.2. De (9) da Seção 3.2, a derivada de $e^z$ é:

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z. \quad \square$$

Usando o fato de que as partes real e imaginária de uma função analítica são conjugadas harmônicas, também podemos mostrar que a *única* função inteira $f$ que reproduz a função exponencial $e^x$ para entrada real e que satisfaz a equação diferencial $f'(z) = f(z)$ é a função exponencial complexa $e^z$ definida por (1) (Problema 50 do Conjunto de Exercícios 4.1).

---

EXEMPLO 1 **Derivadas de Funções Exponenciais**

Determinemos a derivada de cada uma das seguintes funções:

(a) $iz^4\left(z^2 - e^z\right)$ e (b) $e^{z^2-(1+i)z+3}$.

**Solução** (a) Usando (3) e a regra para o produto (4) da Seção 3.1, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[iz^4\left(z^2 - e^z\right)\right] &= iz^4\left(2z - e^z\right) + 4iz^3\left(z^2 - e^z\right)\\ &= 6iz^5 - iz^4e^z - 4iz^3e^z.\end{aligned}$$

(b) Usando (3) e a regra da cadeia (6) da Seção 3.1, obtemos:

$$\frac{d}{dz}\left[e^{z^2-(1+i)z+3}\right] = e^{z^2-(1+i)z+3} \cdot (2z - 1 - i).$$

$\square$

**Módulo, Argumento e Conjugado** O módulo, o argumento e o conjugado da função exponencial são determinados de (1) com facilidade. Se expressarmos o número complexo $w = e^z$ na forma polar:

$$w = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = r\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right),$$

veremos que $r = e^x$ e $\theta = y + 2n\pi$, com $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Como $r$ é o módulo e $\theta$, o argumento de $w$, temos:

$$|e^z| = e^x \tag{4}$$

e

$$\arg(e^z) = y + 2n\pi,\ n = 0,\ \pm1, \pm2, \ldots. \tag{5}$$

Sabemos, do cálculo, que $e^x > 0$ para todo $x$ real; portanto, de (4), temos $|e^z| > 0$. Isto implica que $e^z \neq 0$ para todo $z$ complexo. Em outras palavras, o ponto $w = 0$ não está na imagem da função complexa $w = e^z$. A equação (4) , no entanto, não elimina a possibilidade de que $e^z$ seja um número real negativo. Na verdade, podemos comprovar que se, digamos, $z = \pi i$, $e^{\pi i}$ é real e $e^{\pi i} < 0$.

Uma fórmula para o conjugado da exponencial complexa $e^z$ é obtida usando as propriedades das funções reais cosseno e seno. Como a função cosseno real é par, temos $\cos y = \cos(-y)$, para todo $y$; como a função seno real é ímpar, temos $-\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(-y)$, para todo $y$. Logo:

$$\overline{e^z} = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y = e^x \cos(-y) + ie^x \operatorname{sen}(-y) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.$$

Com isso, mostramos que, para todo $z$ complexo,

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}. \tag{6}$$

**Propriedades Algébricas** No Teorema 4.1.1 provamos que a diferenciação da função exponencial complexa é, fundamentalmente, o mesmo que a diferenciação da função exponencial real. Estas duas funções também compartilham as seguintes propriedades algébricas:

**Teorema 4.1.2 Propriedades Algébricas de $e^z$**

Sejam $z_1$ e $z_2$ números complexos; então

$(i)$ $e^0 = 1$

$(ii)$ $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$(iii)$ $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

$(iv)$ $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

**Prova de $(i)$ e $(ii)$** $(i)$ A prova da propriedade $(i)$ resulta da observação que para entrada real, a fun[illegible] exponencial complexa reproduz a função exponencial real. Ou seja, de (2), temos $e^{0+0i} = e^0$, e sab[illegible] que, para a função exponencial real, $e^0 = 1$.

$(ii)$ Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Pela Definição 4.1.1, temos:

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= \left(e^{x_1}\cos y_1 + ie^{x_1}\operatorname{sen} y_1\right)\left(e^{x_2}\cos y_2 + ie^{x_2}\operatorname{sen} y_2\right) \\ &= e^{x_1+x_2}\left(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2\right) \\ &\quad + ie^{x_1+x_2}\left(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2\right). \end{aligned}$$

Usando as fórmulas de adição para as funções cosseno e seno reais dadas na Seção 1.3, podemos rees[illegible] ver a expressão anterior como:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}\cos(y_1 + y_2) + ie^{x_1+x_2}\operatorname{sen}(y_1 + y_2).$$

De (1), o lado direito de (7) é $e^{z_1+z_2}$. Portanto, mostramos que $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

As provas do Teorema 4.1.2$(iii)$ e 4.1.2$(iv)$ seguem procedimento análogo (Problemas 47 e 48 do C[illegible] junto de Exercícios 4.1).

**Periodicidade** A mais notável diferença entre as funções exponenciais real e complexa é a periodi[illegible] de de $e^z$. Dizemos que uma função complexa $f$ é **periódica** com período $T$ se $f(z + T) = f(z)$ para [illegible] complexo. A função exponencial real não é periódica, mas a função exponencial complexa é, pois é de[illegible] em termos das funções cosseno e seno reais, que são periódicas. Em particular, segundo (1) e o Teor[illegible] 4.1.2$(ii)$, temos $e^{z+2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$. Como $\cos 2\pi = 1$ e $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, isto implica:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Em resumo, mostramos que:

*A função exponencial complexa $e^z$ é periódica, com período puramente imaginário $2\pi i$.*

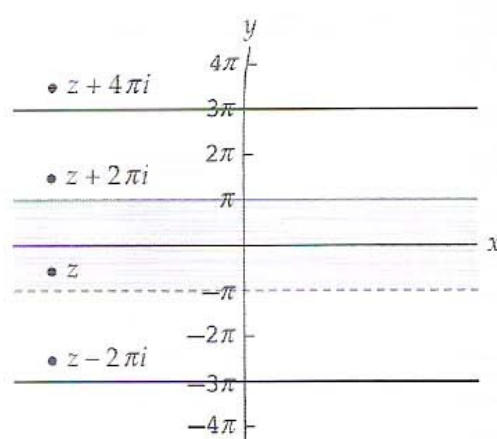



**Figura 4.1.1** Região fundamental para $e^z$

Como (8) se aplica a todos os valores de $z$, também temos $e^{(z+4\pi i)} = e^{(z+2\pi i)+2\pi i} =$ [illegible] Isto, em vista de (8), implica $e^{(z+4\pi i)} = e^z$. Repetindo este processo, concluímos [illegible] $e^{z+2n\pi i} = e^z$, para $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Portanto, a função exponencial complexa não é [illegible] nívoca e todos os valores de $e^z$ são assumidos em qualquer fita horizontal infinit[illegible] largura $2\pi$ no plano complexo. Por exemplo, todos os valores da função $e^z$ são assum[illegible] no conjunto $-\infty < x < \infty$, $y_0 < y \leq y_0 + 2\pi$, onde $y_0$ é uma constante real. Na Fi[illegible] 4.1.1, dividimos o plano complexo em fitas horizontais obtidas igualando $y_0$ a múlt[illegible] impares de $\pi$. Se o ponto $z$ estiver na fita horizontal infinita $-\infty < x < \infty$, $-\pi <$ [illegible] mostrada em cinza na Figura 4.1.1, os valores $f(z) = e^z$, $f(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i}$, $f(z - 2$[illegible] $e^{z-2\pi i}$, etc. são todos iguais. A fita horizontal infinita definida por

$$-\infty < x < \infty, \quad -\pi < y \leq \pi,$$

é denominada **região fundamental** da função exponencial complexa.

(a) Segmentos de retas verticais na região fundamental

(b) Imagens dos segmentos de retas em (a) são circunferências

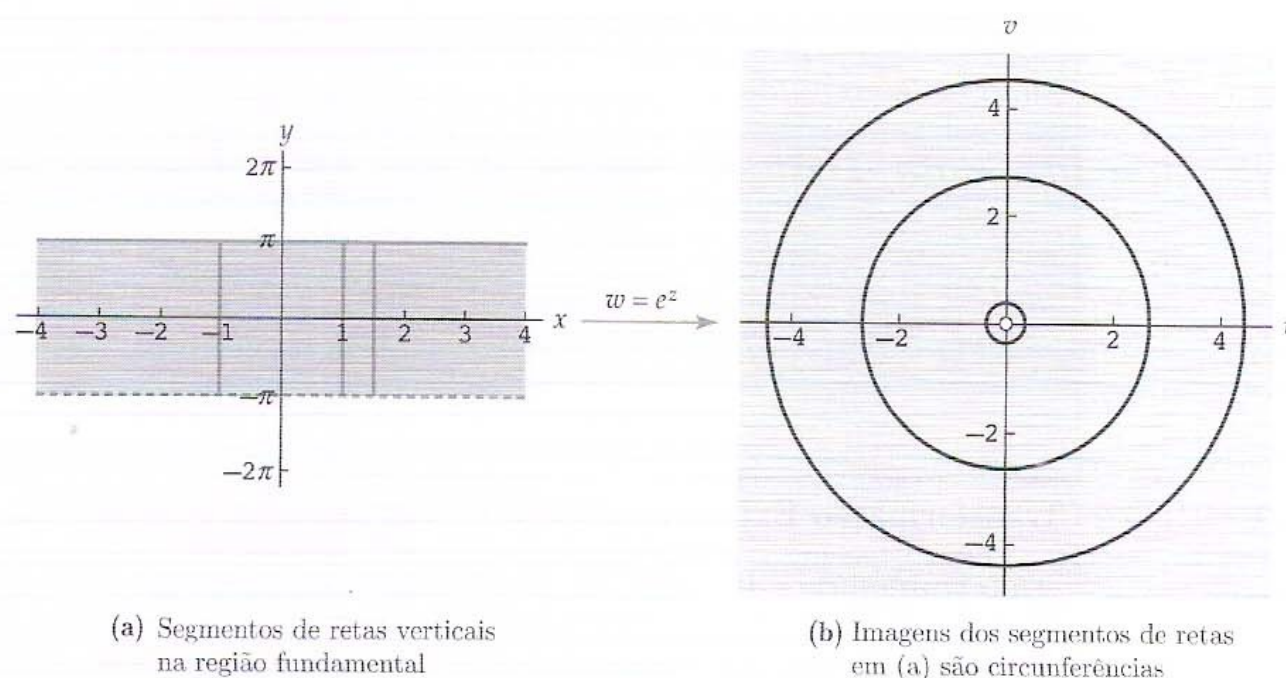



**Figura 4.1.2** Imagem da região fundamental sob $w = e^z$

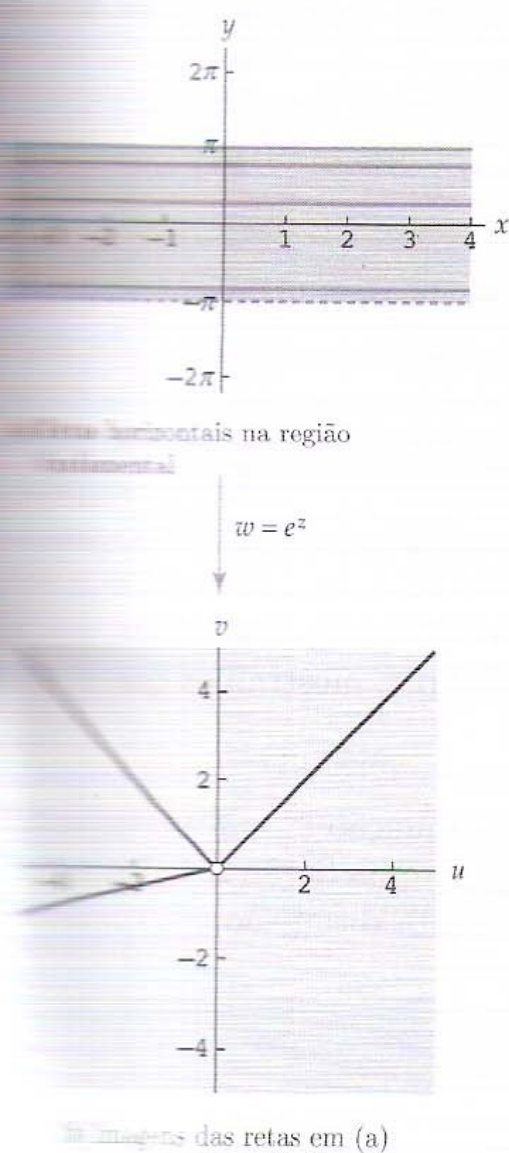
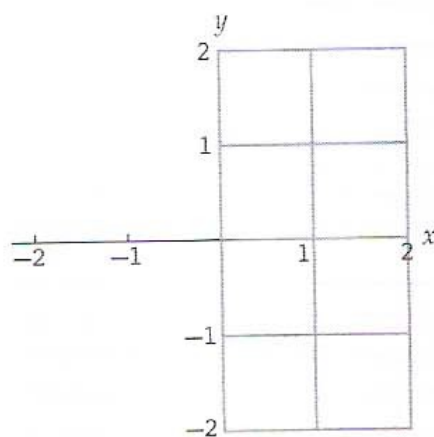
**Transformação Exponencial** Como todos os valores da função exponencial complexa $e^z$ são assumidos na região fundamental definida por (9), a imagem desta região sob a transformação $w = e^z$ é igual à imagem de todo o plano complexo. Para determinar a imagem da região fundamental sob $w = e^z$ primeiro notamos que esta região consiste na coleção de segmentos de reta $z(t) = a + it$, $-\pi < t \leq \pi$, onde $a$ é um número real qualquer. Por (11) da Seção 2.2, a imagem do segmento de reta $z(t) = a + it$, $-\pi < t \leq \pi$, sob a transformação exponencial é parametrizada por $w(t) = e^{z(t)} = e^{a+it} = e^a e^{it}$, $-\pi < t \leq \pi$, e, de (10) da Seção 2.2, vemos que $w(t)$ define uma circunferência com centro na origem e raio $e^a$. Como $a$ é um número real qualquer, a imagem desta região fundamental sob a transformação exponencial consiste na coleção de todas as circunferências com centro na origem e raio não nulo. Em outras palavras, a imagem da região fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, sob $w = e^z$ é o conjunto de todos os números complexos $w \neq 0$ ou, o que é equivalente, o conjunto $|w| > 0$.* Isto concorda com a observação feita anteriormente sobre o fato de o ponto $w = 0$ não estar na imagem da função exponencial complexa.

... horizontais na região fundamental

... das retas em (a)

... Transformação $w = e^z$

A transformação $w = e^z$ da região fundamental é mostrada na Figura 4.1.2. Cada segmento de reta vertical mostrado em cinza na Figura 4.1.2(a) é mapeado em uma circunferência mostrada em preto na Figura 4.1.2(b). À medida que o ponto em que o segmento de reta cruza o eixo $x$ se desloca para a direita, o raio de sua imagem aumenta. Assim, o segmento de reta mais à esquerda é mapeado na circunferência mais interna; o segmento de reta intermediário é mapeado na circunferência intermediária, e o segmento de reta mais à direita, na circunferência mais externa.

Nada há de especial no uso de segmentos de retas verticais para determinar a imagem da região fundamental sob $w = e^z$. Esta imagem também pode ser determinada com o uso, digamos, de retas horizontais na região fundamental. Para isso, consideremos a reta horizontal $z = b$. Esta reta pode ser parametrizada como $z(t) = t + ib$, $-\infty < t < \infty$; sua imagem sob $w = e^z$ é dada por $w(t) = e^{z(t)} = e^{t+ib} = e^t e^{ib}$, $-\infty < t < \infty$. Definindo um novo parâmetro $s = e^t$, notamos que $0 < s < \infty$, pois $-\infty < t < \infty$. Fazendo uso do parâmetro $s$, a imagem é dada por $W(s) = e^{ib}s$, $0 < s < \infty$; segundo (8) da Seção 2.2, este é o conjunto que consiste em todos os pontos $w \neq 0$ no raio que emana da origem e contém o ponto $e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b$. A imagem também pode ser descrita pela equação $\arg(w) = b$. Representamos esta propriedade da transformação complexa na Figura 4.1.3. Cada reta horizontal mostrada em cinza na Figura 4.1.3(a) é mapeada no raio mostrado em preto na Figura 4.1.3(b). À medida que o ponto em que uma reta hotizontal cruza o eixo $y$ se desloca para cima, o ângulo que o raio imagem faz com o eixo positivo $u$ aumenta. Portanto, a linha horizontal inferior é mapeada no raio no terceiro quadrante; a reta intermediária é mapeada no raio no primeiro quadrante e a reta superior, no raio no segundo quadrante.

*Este conjunto é, às vezes, denominado plano complexo perfurado.

A seguir, resumimos as propriedades da transformação exponencial.

***Propriedades da Transformação Exponencial***

*(i)* $w = e^z$ *mapeia a região fundamental* $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, *no conjunto* $|w| > 0$.
*(ii)* $w = e^z$ *mapeia o segmento de reta vertical* $x = a$, $-\pi < y \leq \pi$, *na circunferência* $|w| = e^a$.
*(iii)* $w = e^z$ *mapeia a reta horizontal* $y = b$, $-\infty < x < \infty$, *no raio* $\arg(w) = b$.

EXEMPLO 2 **Transformação Exponencial de uma Grade**

(a) Figura para o Exemplo 2

(b) Imagem da grade em (a)

**Figura 4.1.4** Transformação $w = e^z$

Determinemos a imagem da grade mostrada na Figura 4.1.4(a) sob $w = e^z$.

**Solução** A grade na Figura 4.1.4(a) consiste em segmentos de retas verticais $x = 0, 1$ e 2, $-2 \leq y \leq 2$, e nos segmentos de retas horizontais $y = -2, -1, 0, 1$ e $2$, $0 \leq x \leq 2$. Usando a propriedade (*ii*) da transformação exponencial, concluímos que a imagem do segmento de reta vertical $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$, é o arco circular $|w| = e^0 = 1$, $-2 \leq \arg(w) \leq 2$. De modo similar, os segmentos de reta $x = 1$ e $x = 2$, $-2 \leq y \leq 2$, são mapeados nos arcos circulares $|w| = e$ e $|w| = e^2$, $-2 \leq \arg(w) \leq 2$, respectivamente. Segundo a propriedade (*iii*) da transformação exponencial, o segmento de reta horizontal $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$, é mapeado na porção do raio que emana da origem definida por $\arg(w) = 0$, $1 \leq |w| \leq e^2$. Esta imagem é o segmento de reta de 1 a $e^2$ no eixo $u$. Os segmentos de retas horizontais restantes, $y = -2, -1, 1$ e $2$, são mapeados de forma semelhante, nos segmentos definidos por $\arg(w) = -2$, $\arg(w) = -1$, $\arg(w) = 1$ e $\arg(w) = 2$, $1 \leq |w| \leq e^2$, respectivamente. Portanto, os segmentos de retas mostrados em cinza na Figura 4.1.4(a) são mapeados nos arcos circulares mostrados em preto na Figura 4.1.4(b), com o segmento de reta $x = a$ sendo mapeado no arco com raio $e^a$. Além disso, os segmentos de retas horizontais mostrados em cinza na Figura 4.1.4(a) são mapeados nos segmentos de reta em preto na Figura 4.1.4(b), com o segmento de reta $y = b$ sendo mapeado no segmento de reta que faz um ângulo de $b$ radianos com o eixo $u$ positivo.

## 4.1.2 Função Logarítmica Complexa

Na análise real a função logaritmo natural $\ln x$ é, com frequência, definida como uma função inversa da função exponencial real $e^x$. De aqui em diante usaremos a notação alternativa $\log_e x$ para representar a função logarítmica real. Como a função exponencial real é biunívoca em seu domínio **R**, não há qualquer ambiguidade na definição desta função inversa. A situação é muito diferente na análise complexa, pois a função exponencial complexa não é biunívoca em seu domínio **C**. Na verdade, dado um número complexo não nulo $z$, a equação $e^w = z$ tem infinitas soluções. Para comprovar isto, escrevamos $w = u + iv$. Se $e^w = z$, então $|e^w| = |z|$ e $\arg(e^w) = \arg(z)$. De (4) e (5), temos $e^u = |z|$ e $v = \arg(z)$ ou, o que é equivalente, $u = \log_e |z|$ e $v = \arg(z)$. Consequentemente, dado um número complexo não nulo $z$, mostramos que

*Nota:* $\log_e x$ será usado para denotar o logaritmo real. ⇒

$$\text{Se } e^w = z, \text{ então } w = \log_e |z| + i \arg(z). \quad (10)$$

Como há infinitos argumentos de $z$, (10) fornece infinitas soluções $w$ para a equação $e^w = z$. O conjunto de valores dados por (10) define uma função multivalente $w = G(z)$, como descrito na Seção 2.4, denominada logaritmo complexo de $z$ e denotada por $\ln z$. A seguinte definição resume esta discussão:

**Definição 4.1.2 Logaritmo Complexo**

A função multivalente $\ln z$, definida por

$$\ln z = \log_e |z| + i \arg(z) \quad (11)$$

é denominada **logaritmo complexo**.

A seguir, resumimos as propriedades da transformação exponencial.

### *Propriedades da Transformação Exponencial*

(*i*) *$w = e^z$ mapeia a região fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, no conjunto $|w| > 0$.*
(*ii*) *$w = e^z$ mapeia o segmento de reta vertical $x = a$, $-\pi < y \leq \pi$, na circunferência $|w| = e^a$.*
(*iii*) *$w = e^z$ mapeia a reta horizontal $y = b$, $-\infty < x < \infty$, no raio $\arg(w) = b$.*

---

EXEMPLO 2 **Transformação Exponencial de uma Grade**

(a) Figura para o Exemplo 2

(b) Imagem da grade em (a)

**Figura 4.1.4** Transformação $w = e^z$

Determinemos a imagem da grade mostrada na Figura 4.1.4(a) sob $w = e^z$.

**Solução** A grade na Figura 4.1.4(a) consiste em segmentos de retas verticais $x = 0$, 1 e 2, $-2 \leq y \leq 2$, e nos segmentos de retas horizontais $y = -2, -1, 0, 1$ e 2, $0 \leq x \leq 2$. Usando a propriedade (*ii*) da transformação exponencial, concluímos que a imagem do segmento de reta vertical $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$, é o arco circular $|w| = e^0 = 1$, $-2 \leq \arg(w) \leq 2$. De modo similar, os segmentos de reta $x = 1$ e $x = 2$, $-2 \leq y \leq 2$, são mapeados nos arcos circulares $|w| = e$ e $|w| = e^2$, $-2 \leq \arg(w) \leq 2$, respectivamente. Segundo a propriedade (*iii*) da transformação exponencial, o segmento de reta horizontal $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$, é mapeado na porção do raio que emana da origem definida por $\arg(w) = 0$, $1 \leq |w| \leq e^2$. Esta imagem é o segmento de reta de 1 a $e^2$ no eixo $u$. Os segmentos de retas horizontais restantes, $y = -2, -1, 1$ e 2, são mapeados de forma semelhante, nos segmentos definidos por $\arg(w) = -2$, $\arg(w) = -1$, $\arg(w) = 1$ e $\arg(w) = 2$, $1 \leq |w| \leq e^2$, respectivamente. Portanto, os segmentos de retas mostrados em cinza na Figura 4.1.4(a) são mapeados nos arcos circulares mostrados em preto na Figura 4.1.4(b), com o segmento de reta $x = a$ sendo mapeado no arco com raio $e^a$. Além disso, os segmentos de retas horizontais mostrados em cinza na Figura 4.1.4(a) são mapeados nos segmentos de reta em preto na Figura 4.1.4(b), com o segmento de reta $y = b$ sendo mapeado no segmento de reta que faz um ângulo de $b$ radianos com o eixo $u$ positivo.

## 4.1.2 Função Logarítmica Complexa

Na análise real a função logaritmo natural $\ln x$ é, com frequência, definida como uma função inversa da função exponencial real $e^x$. De aqui em diante usaremos a notação alternativa $\log_e x$ para representar a função logarítmica real. Como a função exponencial real é biunívoca em seu domínio **R**, não há qualquer ambiguidade na definição desta função inversa. A situação é muito diferente na análise complexa, pois a função exponencial complexa não é biunívoca em seu domínio **C**. Na verdade, dado um número complexo não nulo $z$, a equação $e^w = z$ tem infinitas soluções. Para comprovar isto, escrevamos $w = u + iv$. Se $e^w = z$, então $|e^w| = |z|$ e $\arg(e^w) = \arg(z)$. De (4) e (5), temos $e^u = |z|$ e $v = \arg(z)$ ou, o que é equivalente, $u = \log_e |z|$ e $v = \arg(z)$. Consequentemente, dado um número complexo não nulo $z$, mostramos que

*Nota:* $\log_e x$ será usado para denotar o logaritmo real. ➡

$$\text{Se } e^w = z, \text{ então } w = \log_e |z| + i \arg(z).$$

Como há infinitos argumentos de $z$, (10) fornece infinitas soluções $w$ para a equação $e^w = z$. O conjunto de valores dados por (10) define uma função multivalente $w = G(z)$, como descrito na Seção 2.4, denominada logaritmo complexo de $z$ e denotada por $\ln z$. A seguinte definição resume esta discussão:

**Definição 4.1.2 Logaritmo Complexo**

A função multivalente $\ln z$, definida por

$$\ln z = \log_e |z| + i \arg(z) \qquad (11)$$

é denominada **logaritmo complexo**.

De aqui em diante, a notação ln $z$ será usada para denotar o logaritmo *complexo* multivalente. Usando a notação exponencial $z = re^{i\theta}$ em (11), obtemos a seguinte descrição alternativa para o logaritmo complexo:

$$\ln z = \log_e r + i(\theta + 2n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12}$$

De (10), vemos que o logaritmo complexo pode ser usado para determinar todas as soluções da equação exponencial $e^w = z$, quando $z$ for um número complexo não nulo.

---

EXEMPLO 3 **Solução de Equações Exponenciais**

Determinemos todas as soluções complexas de cada uma das seguintes equações:

(a) $e^w = i$ (b) $e^w = 1 + i$ (c) $e^w = -2$

**Solução** Para cada equação $e^w = z$, o conjunto de soluções é dado por $w = \ln z$, sendo ln $z$ determinado segundo a Definição 4.1.2.

(a) Para $z = i$, temos $|z| = 1$ e $\arg(z) = \pi/2 + 2n\pi$. Logo, obtemos de (11):

$$w = \ln i = \log_e 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

Como $\log_e 1 = 0$, temos:

$$w = \frac{(4n+1)\pi}{2} i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots .$$

Portanto, cada um dos valores

$$w = \ldots, -\frac{7\pi}{2} i, -\frac{3\pi}{2} i, \frac{\pi}{2} i, \frac{5\pi}{2} i, \ldots$$

satisfaz a equação $e^w = i$.

(b) Para $z = 1 + i$, temos $|z| = \sqrt{2}$ e $\arg(z) = \pi/4 + 2n\pi$. Com isto, obtemos de (11):

$$w = \ln(1 + i) = \log_e \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right).$$

Como $\log_e \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_e 2$, podemos reescrever este último resultado como:

$$w = \frac{1}{2} \log_e 2 + \frac{(8n+1)\pi}{4} i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Portanto, cada valor de $w$ satisfaz a equação $e^w = 1 + i$.

(c) Mais uma vez, usamos (11). Como $z = -2$, temos $|z| = 2$ e $\arg(z) = \pi + 2n\pi$, de modo que:

$$w = \ln(-2) = \log_e 2 + i(\pi + 2n\pi).$$

Ou seja,

$$w = \log_e 2 + (2n+1)\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Cada valor de $w$ satisfaz a equação $e^w = -2$.

❑

**Identidades Logarítmicas** A Definição 4.1.2 pode ser usada para provar que o logaritmo complexo satisfaz as seguintes identidades, análogas às identidades do logaritmo real:

**Teorema 4.1.3 Propriedades Algébricas de ln $z$**

Se $z_1$ e $z_2$ forem número complexos não nulos e $n$ for um inteiro, então:

$(i)$ $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$

$(ii)$ $\ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$

$(iii)$ $\ln z_1^n = n \ln z_1$.

**Prova de $(i)$** Segundo a Definição 4.1.2,

$$\begin{aligned}\ln z_1 + \ln z_2 &= \log_e|z_1| + i\arg(z_1) + \log_e|z_2| + i\arg(z_2)\\ &= \log_e|z_1| + \log_e|z_2| + i(\arg(z_1) + \arg(z_2)).\end{aligned} \quad (13)$$

Como o logaritmo real tem a propriedade $\log_e a + \log_e b = \log_e(ab)$, para $a > 0$ e $b > 0$, podemos escrever $\log_e|z_1 z_2| = \log_e|z_1| + \log_e|z_2|$. Além disso, de (8) da Seção 1.3, temos $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2)$. Consequentemente, (13) pode ser reescrita como:

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \log_e|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2) = \ln(z_1 z_2).$$

Provas dos Teoremas 4.1.3$(ii)$ e 4.1.3$(iii)$ são similares (Problemas 53 e 54 do Conjunto de Exercícios 4.1).

**Valor Principal de um Logaritmo Complexo** Vale notar que o logaritmo *complexo* de um número real positivo tem infinitos valores. Por exemplo, o logaritmo *complexo* ln 5 é o conjunto de valores $1{,}6094 + 2n\pi i$, onde $n$ é um inteiro qualquer; por sua vez, o logaritmo *real* $\log_e 5$ tem um único valor: $\log_e 5 \approx 1{,}6094$. O valor de ln 5 correspondente a $n = 0$ é igual ao valor do logaritmo real $\log_e 5$. Em geral, este valor do logaritmo complexo é denominado **valor principal do logaritmo complexo**, pois é determinado com o uso do argumento principal $\text{Arg}(z)$ em vez do argumento $\arg(z)$ em (11). Denotamos o valor principal do logaritmo pelo símbolo Ln $z$. Portanto, a expressão $f(z) = \text{Ln}\, z$ define uma função, enquanto $F(z) = \ln z$ define uma função multivalente. Resumimos esta discussão na seguinte definição:

Notação usada em todo o texto

**Definição 4.1.3 Valor Principal do Logaritmo Complexo**

A função complexa Ln $z$ definida por

$$\text{Ln}\, z = \log_e|z| + i\text{Arg}(z) \quad (14)$$

é denominada **valor principal do logaritmo complexo**.

Usaremos os termos *função logarítmica* e *logaritmo* para nos referirmos tanto à função multivalente ln $z$ como à função Ln $z$. O contexto deve deixar claro qual é a função em questão. De (14) vemos que o valor principal do logaritmo complexo também pode ser dado por:

$$\text{Ln}\, z = \log_e r + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi. \quad (15)$$

EXEMPLO 4 **Valor Principal do Logaritmo Complexo**

Calculemos o valor principal do logaritmo complexo Ln $z$ para

(a) $z = i$ (b) $z = 1 + i$ (c) $z = -2$

**Solução** Em cada parte aplicaremos (14) da Definição 4.1.3.

(a) Para $z = i$, temos $|z| = 1$ e $\text{Arg}(z) = \pi/2$, de modo que:

$$\text{Ln}\, i = \log_e 1 + \frac{\pi}{2}i.$$

No entanto, como $\log_e 1 = 0$, este resultado simplifica para:

$$\text{Ln}\, i = \frac{\pi}{2}i.$$

(b) Para $z = 1 + i$, temos $|z| = \sqrt{2}$ e $\text{Arg}(z) = \pi/4$; com isso:

$$\text{Ln}(1+i) = \log_e \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i.$$

Como $\log_e \sqrt{2} = \frac{1}{2}\log_e 2$, este resultado pode ser reescrito como:

$$\text{Ln}(1+i) = \frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{\pi}{4}i \approx 0{,}3466 + 0{,}7854i.$$

(c) Para $z = -2$, temos $|z| = 2$ e $\text{Arg}(z) = \pi$; logo:

$$\text{Ln}(-2) = \log_e 2 + \pi i \approx 0{,}6931 + 3{,}1416i.$$

Vale observar que cada valor determinado nas partes (a)–(c) também poderia ser calculado substituindo $n = 0$ nas expressões para $\ln z$ no Exemplo 3. ❑

É importante ressaltar que as identidades para o logaritmo complexo no Teorema 4.1.3 *não* são necessariamente satisfeitas pelo valor principal do logaritmo complexo. Por exemplo, *não* é verdade que $\text{Ln}(z_1z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2$ para todos os números complexos $z_1$ e $z_2$, embora possa ser verdade para *alguns* números complexos (Problema 55 do Conjunto de Exercícios 4.1).

**Ln $z$ como uma Função Inversa** Como $\text{Ln}\, z$ é *um* dos valores do logaritmo complexo $\ln z$, (10) implica

$$e^{\text{Ln}\, z} = z \text{ para todo } z \neq 0. \tag{16}$$

Isto sugere que a função logaritmo complexo $\text{Ln}\, z$ é uma função inversa da função exponencial $e^z$. Como a função exponencial complexa não é biunívoca em seu domínio, a afirmação anterior não é completamente verdadeira. Na verdade, a relação entre estas funções é similar à que existe entre a função quadrática $z^2$ e a função raiz quadrada principal $z^{1/2} = \sqrt{|z|}e^{i\text{Arg}(z)/2}$ definida por (7) da Seção 2.4. A função exponencial deve, primeiro, ser restringida a um domínio em que seja biunívoca para que tenha uma função inversa bem definida. O Problema 52 do Conjunto de Exercícios 4.1 explora a comprovação de que $e^z$ é uma função biunívoca na região fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, mostrada na Figura 4.1.1.

A seguir, mostraremos que se o domínio de $e^z$ for restrito à região fundamental, o valor principal do logaritmo complexo $\text{Ln}\, z$ é uma função inversa de $e^z$. Para justificar esta asserção, consideremos um ponto $z = x + iy$ na região fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$. De (4) e (5), temos que $|e^z| = e^x$ e $\arg(z) = y + 2n\pi$, sendo $n$ um inteiro. Desta forma, $y$ é um argumento de $e^z$. Como $z$ está na região fundamental, também temos $-\pi < y \leq \pi$; isto indica que $y$ é o argumento principal de $e^z$. Ou seja, $\text{Arg}(e^z) = y$. Além disso, para o logaritmo real, temos $\log_e e^x = x$ e, da Definição 4.1.3, obtemos:

$$\begin{aligned}\text{Ln}\, e^z &= \log_e |e^z| + i\text{Arg}\,(e^z)\\ &= \log_e e^x + iy\\ &= x + iy.\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que

$$\text{Ln}\, e^z = z \text{ se } -\infty < x < \infty \quad \text{e} \quad -\pi < y \leq \pi. \tag{17}$$

De (16) e (17) concluímos que $\text{Ln}\, z$ é a função inversa de $e^z$ definida na região fundamental. A relação entre estas duas funções é resumida da seguinte forma:

**Ln $z$ é uma Função Inversa de $e^z$**

*Se a função exponencial complexa $f(z) = e^z$ for definida na região fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, então $f$ é biunívoca e a função inversa de $f$ é o valor principal do logaritmo complexo $f^{-1}(z) = \text{Ln}\, z$.*

Devemos ter em mente que (16) é válida para todo número complexo não nulo $z$, mas (17) é vál… apenas se $z$ estiver na região fundamental. Por exemplo, para o ponto $z = 1 + \frac{3}{2}\pi i$, que não está na regi… fundamental, temos:

$$\text{Ln}\, e^{1+3\pi i/2} = 1 - \frac{1}{2}\pi i \neq 1 + \frac{3}{2}\pi i.$$

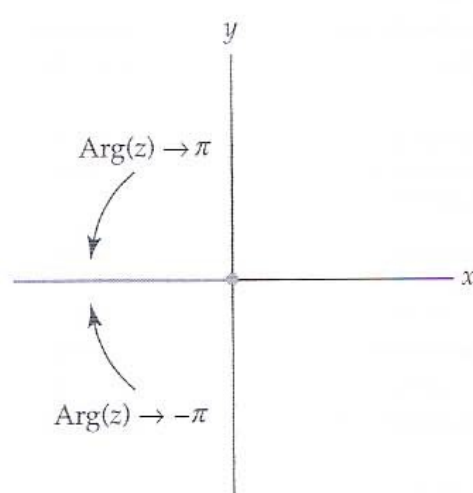



**Figura 4.1.4** Ln z é descontínua em z = 0 e no eixo real negativo

**Analiticidade** O valor principal do logaritmo complexo Ln $z$ é descontínuo no pon… $z = 0$, pois a função não é definida neste ponto. Esta função também é descontínua em todo ponto no eixo real negativo. Intuitivamente isto é claro, pois o valor de Ln $z$ em um ponto $z$ nas proximidades do eixo $x$ negativo no segundo quadrante tem parte imaginária próxima de $\pi$, enquanto o valor em um ponto vizinho e no terceiro quadrante tem parte imaginária próxima de $-\pi$ (Figura 4.1.4). Contudo, a função Ln $z$ é contínua no conjunto que consiste no plano complexo, excluído o eixo real não positivo. Para comprovar… recorramos ao Teorema 2.6.3, que afirma que uma função complexa $f(z) = u(x, y) + \dots$ $y)$ é contínua em um ponto $z = x + iy$ se e somente se $u$ e $v$ forem ambas funções… contínuas em $(x, y)$. De (14), as partes real e imaginária de Ln $z$ são $u(x, y) = \log_e$… $\log_e \sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = \text{Arg}(z)$, respectivamente. Do cálculo de múltiplas variáveis temos que a função $u(x, y) = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$ é contínua em todos os pontos no pl… exceto em $(0, 0)$; do Problema 55 do Conjunto de Exercícios 2.6, temos que a função… $y) = \text{Arg}(z)$ é contínua no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. Por conseguinte, pelo Teorema 2.6.3, Ln… é uma função contínua no domínio

$$|z| > 0, \quad -\pi < \arg(z) < \pi,$$

**Figura 4.1.5** Corte de ramo para $f_1$

mostrado em cinza na Figura 4.1.5. Dito de outra forma, a função $f_1$ definida por

$$f_1(z) = \log_e r + i\theta$$

é contínua no domínio em (18), onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$.

Como a função $f_1$ reproduz o valor principal do logaritmo complexo Ln $z$ nos pon… onde ambos são definidos, $f_1$ associa a entrada $z$ a um dos valores da função multivalente $F(z) = \ln z$. Usando a terminologia da Seção 2.6, mostramos que a função $f_1$ definida… (19) é um ramo da função multivalente $F(z) = \ln z$. (Vale lembrar que os ramos de uma função multivalente $F$ são denotados por $f_1$, $f_2$, e assim por diante.) Este ramo recebe… denominação **ramo principal do logaritmo complexo**. O eixo real não positivo, mostrado em cinza na Figura 4.1.5, é um **corte de ramo** para $f_1$ e o ponto $z = 0$ é um **ponto de ra…** Como demonstra o teorema a seguir, o ramo $f_1$ é uma função analítica em seu domínio…

**Teorema 4.1.4 Analiticidade do Ramo Principal de ln $z$**

O ramo principal $f_1$ do logaritmo complexo definido por (19) é uma função analítica e sua deriv… dada por:

$$f_1'(z) = \frac{1}{z}.$$

**Prova** Para provar que $f_1$ é analítica, usamos o análogo do Teorema 3.2.2 da Seção 3.2 em coorde… polares. Como $f_1$ é definida no domínio dado em (18), se $z$ for um ponto neste domínio podemos escr… $z = re^{i\theta}$, com $-\pi < \theta < \pi$. Como as partes real e imaginária de $f_1$ são $u(r, \theta) = \log_e r$ e $v(r, \theta) = \dots$ pectivamente, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Portanto, $u$ e $v$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares em (10) da Seção 3.2:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Como $u$, $v$ e as derivadas parciais de primeira ordem de $u$ e $v$ são contínuas em todos os pontos no domínio dado em (18), segundo o Teorema 3.2.2, $f_1$ é analítica neste domínio. Além disso, de (11) da Seção 3.2, a derivada de $f_1$ é dada por:

$$f_1'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}. \quad \square$$

Como $f_1(z) = \text{Ln}\, z$ para cada ponto $z$ no domínio dado em (18), segundo o Teorema 4.1.4, $\text{Ln}\, z$ é diferenciável neste domínio e sua derivada é dada por $f_1'$.Ou seja, se $|z| > 0$ e $-\pi < \arg(z) < \pi$, então

$$\frac{d}{dz}\text{Ln}\, z = \frac{1}{z}. \tag{21}$$

---

**EXEMPLO 5 Derivadas de Funções Logarítmicas**

Determinemos as derivadas das seguintes funções em um domínio apropriado:

(**a**) $z\text{Ln}\, z$ e (**b**) $\text{Ln}(z + 1)$.

**Solução** (**a**) Segundo as regras de diferenciação da Seção 3.1, a função $z\text{Ln}\, z$ é diferenciável em todos os pontos em que as duas funções $z$ e $\text{Ln}\, z$ são diferenciáveis. Como $z$ é inteira e $\text{Ln}\, z$ é diferenciável no domínio dado em (18), $z\text{Ln}\, z$ é diferenciável no domínio definido por $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. Neste domínio, a derivada é dada pela regra para o produto (4) da Seção 3.1 e por (21):

$$\frac{d}{dz}[z\text{Ln}\, z] = z \cdot \frac{1}{z} + 1 \cdot \text{Ln}\, z = 1 + \text{Ln}\, z.$$

Figura 4.1.6 $\text{Ln}(z + 1)$ não é diferenciável no raio mostrado em cinza-escuro

(**b**) A função $\text{Ln}(z + 1)$ é uma composição das funções $\text{Ln}\, z$ e $z + 1$. Como a função $z + 1$ é inteira, a regra da cadeia indica que $\text{Ln}(z + 1)$ é diferenciável em todos os pontos $w = z + 1$ tais que $|w| > 0$ e $-\pi < \arg(w) < \pi$. Em outras palavras, esta função é diferenciável no ponto $w$, sempre que $w$ não estiver no eixo real não positivo. Para determinar os correspondentes valores de $z$ para os quais $\text{Ln}(z + 1)$ não é diferenciável, primeiro, escrevemos $z$ em função de $w$: $z = w - 1$. A equação $z = w - 1$ define uma transformação linear do plano $w$ no plano $z$, dada pela translação de $-1$. Sob esta transformação, o eixo real não positivo é mapeado no raio que emana de $z = -1$ e contém o ponto $z = -2$, mostrado em cinza na Figura 4.1.6. Portanto, se o ponto $w = z + 1$ estiver no eixo real não positivo, o ponto $z$ está no raio mostrado na Figura 4.1.6. Isso implica que $\text{Ln}(z + 1)$ é diferenciável em todos os pontos $z$ que não estejam neste raio. Para esses pontos, a regra da cadeia fornece:

$$\frac{d}{dz}\text{Ln}(z + 1) = \frac{1}{z + 1} \cdot 1 = \frac{1}{z + 1}. \quad \square$$

**Transformação Logarítmica** A transformação complexa $w = \text{Ln}\, z$ pode ser entendida em termos da transformação exponencial $w = e^z$, pois estas duas funções são a inversa uma da outra. Por exemplo, como $w = e^z$ mapeia a região fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, no plano $z$, no conjunto $|w| > 0$, no plano $w$, a transformação inversa $w = \text{Ln}\, z$ mapeia o conjunto $|z| > 0$, no plano $z$, na região $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v \leq \pi$, no plano $w$. Outras propriedades da transformação exponencial também podem ser estendidas à transformação logarítmica. Estas propriedades são resumidas a seguir.

## *Propriedades da Transformação Logarítmica*

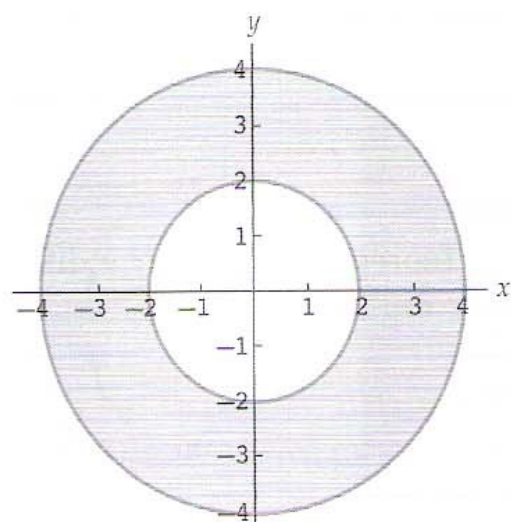
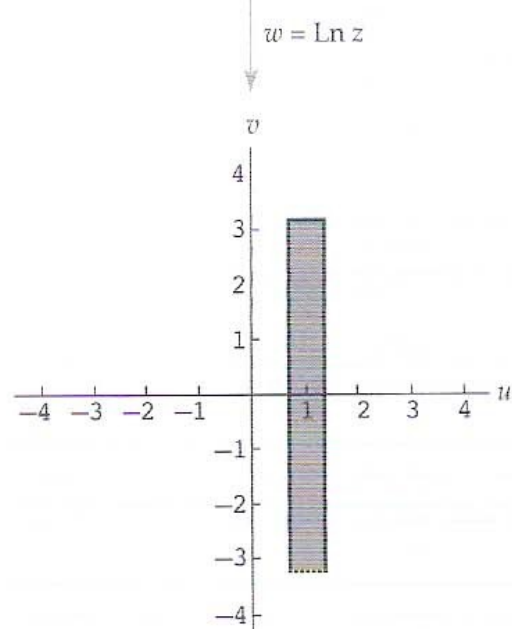
(*i*) *$w = \text{Ln}\, z$ mapeia o conjunto $|z| > 0$ na região $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v \leq \pi$.*
(*ii*) *$w = \text{Ln}\, z$ mapeia a circunferência $|z| = r$ no segmento de reta vertical $u = \log_e r$, $-\pi < v \leq \pi$*
(*iii*) *$w = \text{Ln}\, z$ mapeia o raio $\arg(z) = \theta$ no segmento de reta horizontal $v = \theta$, $-\infty < u < \infty$.*

(a) Anel $2 \leq |z| \leq 4$

(b) Imagem do anel em (a)

**Figura 4.1.7** Transformação $w = \text{Ln}\, z$

EXEMPLO 6 **Transformação Logarítmica**

Determinemos a imagem do anel $2 \leq |z| \leq 4$ sob a transformação logarítmica $w =$ Ln $z$.

**Solução** Da propriedade (*ii*) da transformação logarítmica, as fronteiras das circun- rências $|z| = 2$ e $|z| = 4$ do anel são mapeadas nos segmentos de retas verticais $u =$ $\log_e 2$ e $u = \log_e 4$, $-\pi < v \leq \pi$, respectivamente. De modo similar, cada circunferência $|z| = r$, $2 \leq r \leq 4$, é mapeada em um segmento de reta vertical $u = \log_e r$, $-\pi < v \leq$ $\pi$. Como a função logarítmica real aumenta em seu domínio, $u = \log_e r$ assume todos os valores no intervalo $\log_e 2 \leq u \leq \log_e 4$, quando $2 \leq r \leq 4$. Portanto, a imagem do anel $2 \leq |z| \leq 4$, mostrado em cinza na Figura 4.1.7(a), é a região retangular $\log_e 2 \leq$ $u \leq \log_e 4$, $-\pi < v \leq \pi$, mostrada em cinza na Figura 4.1.7(b).

**Outros Ramos de ln $z$** O ramo principal $f_1$ do logaritmo complexo definido em (1 é apenas um de muitos ramos possíveis da função multivalente $F(z) = \ln z$. Pode definir outros ramos de $F$ especificando outros intervalos de comprimento $2\pi$ para valores de $\theta$ em (18). Por exemplo,

$$f_2(z) = \log_e r + i\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

define um ramo de $F$ cujo corte de ramo é o eixo imaginário não positivo. Pode comprovar que para o ramo $f_2$ temos $f_2(1) = 0$, $f_2(2i) = \log_e 2 + \frac{1}{2}\pi i$ e $f_2(-1 - i) =$ $2 + \frac{5}{4}\pi i$.

Assim como provamos que o ramo principal $f_1$ do logaritmo complexo é uma fun analítica, podemos provar que qualquer ramo

$$f_k(z) = \log_e r + i\theta, \quad \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi,$$

de $F(z) = \ln z$ é uma função analítica e que sua derivada é dada por:

$$f_k'(z) = \frac{1}{z}.$$

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

(*i*) Embora as funções exponencial e logarítmica complexas guardem muitas semelhanças com as funções exponencial e logarítmica reais, é importante ressaltar as diferenças entre as mesmas.
- A função exponencial real é biunívoca, mas a função exponencial complexa não é.
- $\log_e x$ é uma função unívoca, enquanto $\ln z$ é multivalente.
- Muitas propriedades do logaritmo real se aplicam ao logaritmo complexo, como $\ln(z_1 z_2) =$ $\ln z_1 + \ln z_2$, mas estas propriedades nem sempre se aplicam ao valor principal Ln $z$.

(*ii*) Como a função exponencial complexa não é biunívoca, podemos usar uma superfície de Rie- mann, como descrito nas Observações no final da Seção 2.4, para auxiliar a visualização da transformação $w = e^z$. A superfície de Riemann que construirmos também nos ajudará a vi- sualizar a função multivalente $w = \ln z$. Consideremos a transformação $w = e^z$ no semiplano $x \leq 0$. Cada fita semi-infinita $S_n$ definida por $(2n - 1)\pi < y \leq (2n + 1)\pi$, $x \leq 0$, com $n = 0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$, é mapeada no disco unitário perfurado $0 < |w| \leq 1$ mostrado na Figura 4.1.8(b).

as semirretas horizontais mostradas em cinza na Figura 4.1.8(a) são mapeadas no segmento $-1 \leq u \leq 0$, mostrado em preto na Figura 4.1.8(b). Portanto, $w = e^z$ descreve uma cobertura de infinitas vezes do disco unitário perfurado. Para visualizar tal cobertura, imaginemos que exista um disco imagem diferente $B_n$ para cada fita semi-infinita $S_n$. Agora, cortemos cada disco imagem $B_n$ ao longo do segmento $-1 \leq u \leq 0$. Construímos uma superfície de Riemann para $w = e^z$ unindo, para cada $n$, o disco cortado $B_n$ ao disco cortado $B_{n+1}$ ao longo da borda que representa a imagem da reta semi-infinita $y = (2n + 1)\pi$. Posicionamos esta superfície no espaço $xyz$ de modo que, para cada $z$ no semiplano, as imagens ... $z_{-1}$, $z_0$, $z_1$, ... de $z$ em $B_{-1}$, $B_0$, $B_1$, ..., respectivamente, estejam posicionadas diretamente acima do ponto $w = e^z$ no plano $xy$, como ilustrado na Figura 4.1.9. Projetando os pontos da superfície de Riemann verticalmente sobre o plano $xy$, observamos a natureza periódica da transformação $w = e^z$. Reciprocamente, podemos visualizar a função multivalente $F(z) = \ln z$ considerando os pontos na superfície de Riemann que estejam diretamente acima de um ponto no plano $xy$. Estes infinitos pontos na superfície de Riemann correspondem aos infinitos valores de $F(z)$ no semiplano $u \leq 0$.

(a) Coleção de fitas semi-infinitas $S_n$

(b) A imagem de cada fita $S_n$ é o disco unitário perfurado

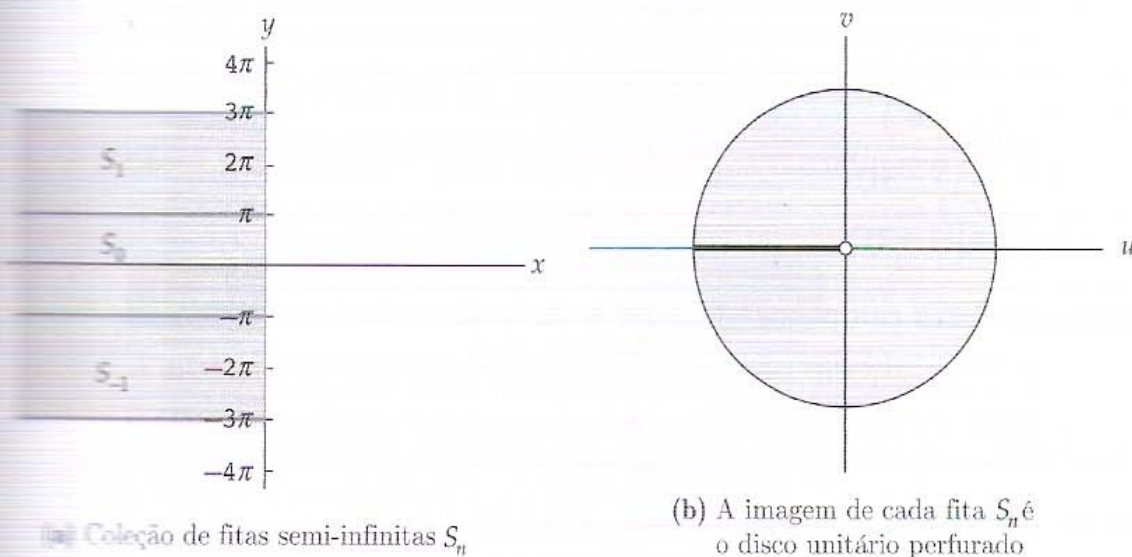



**Figura 4.1.8** Transformação $w = e^z$

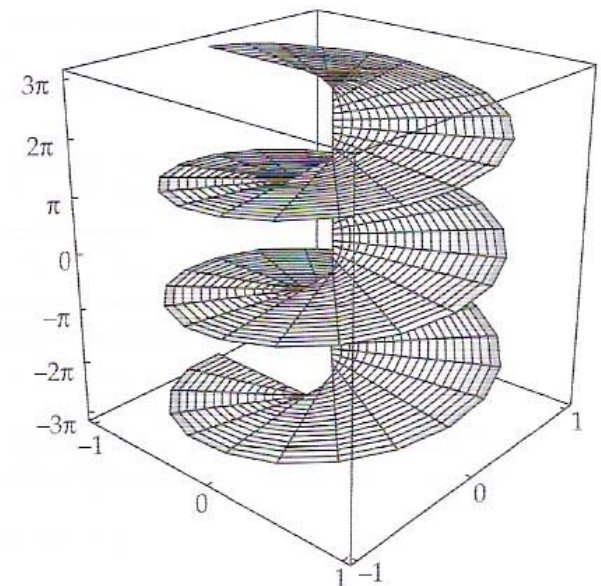



**Figura 4.1.9** Uma superfície de Riemann para $w = e^z$

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 4.1 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

### 4.1.1 Função Exponencial Complexa

Nos Problemas 1-4, determine a derivada $f'$ da função $f$ dada.

1. $f(z) = z^2 e^{z+i}$
2. $f(z) = \dfrac{3e^{2z} - ie^{-z}}{z^3 - 1 + i}$
3. $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$
4. $f(z) = ie^{1/z}$

Nos Problemas 5-8, escreva a expressão dada em termos de $x$ e $y$.

5. $\left|e^{z^2 - z}\right|$
6. $\arg\left(e^{z - i/z}\right)$
7. $\arg\left(e^{i(z+\bar{z})}\right)$
8. $\overline{ie^z + 1}$

Nos Problemas 9-12, expresse a função $f$ na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

9. $f(z) = e^{-iz}$
10. $f(z) = e^{2\bar{z}+i}$
11. $f(z) = e^{z^2}$
12. $f(z) = e^{1/z}$

13. Use as condições suficientes para diferenciabilidade da Seção 3.2 e determine em que pontos a função $f(z) = e^{2\bar{z}+i}$ é diferenciável.

14. Use as condições suficientes para diferenciabilidade da Seção 3.2 e determine em que pontos a função $f(z) = e^{\bar{z}^2}$ é diferenciável.

Nos Problemas 15-20, determine a imagem do dado conjunto sob a transformação exponencial.

**15.** Reta $y = -2$.

**16.** Reta $x = 3$.

**17.** Fita infinita $1 < x \leq 2$.

**18.** Quadrado com vértices em $0$, $1$, $1 + i$ e $i$.

**19.** Retângulo $0 \leq x \leq \log_e 2$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/2$.

**20.** Fita semi-infinita $-\infty < x \leq 0$, $0 \leq y \leq \pi$.

## 4.1.2 Função Logarítmica Complexa

Nos Problemas 21-26, determine todos os valores complexos do logaritmo dado.

**21.** $\ln(-5)$

**22.** $\ln(-ei)$

**23.** $\ln(-2 + 2i)$

**24.** $\ln(1 + i)$

**25.** $\ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}i\right)$

**26.** $\ln\left(-\sqrt{3} + i\right)$

Nos Problemas 27-32, escreva o valor principal do logaritmo na forma $a + ib$.

**27.** $\text{Ln}(6 - 6i)$

**28.** $\text{Ln}\left(-e^2\right)$

**29.** $\text{Ln}(-12 + 5i)$

**30.** $\text{Ln}(3 - 4i)$

**31.** $\text{Ln}\left[\left(1 + \sqrt{3}i\right)^5\right]$

**32.** $\text{Ln}\left[(1 + i)^4\right]$

Nos Problemas 33-36, determine todos os valores complexos de $z$ que satisfazem a equação dada.

**33.** $e^z = 4i$

**34.** $e^{1/z} = -1$

**35.** $e^{z-1} = -ie^3$

**36.** $e^{2z} + e^z + 1 = 0$

Nos Problemas 37-40, determine um domínio em que a função $f$ dada seja diferenciável.

**37.** $f(z) = 3z^2 - e^{2iz} + i\text{Ln}\, z$

**38.** $f(z) = (z + 1)\text{Ln}\, z$

**39.** $f(z) = \dfrac{\text{Ln}(2z - i)}{z^2 + 1}$

**40.** $f(z) = \text{Ln}(z^2 + 1)$

Nos Problemas 41-46, determine a imagem do dado conjunto sob a transformação $w = \text{Ln}\, z$.

**41.** Raio $\arg(z) = \pi/6$.

**42.** Eixo $y$ positivo.

**43.** Circunferência $|z| = 4$.

**44.** Região no primeiro quadrante limitada pelas circunferências $|z| = 1$ e $|z| = e$.

**45.** Anel $3 \leq |z| \leq 5$.

**46.** Região fora da circunferência unitária $|z| = 1$, entre os raios $\arg(z) = \pi/4$ e $\arg(z) = 3\pi/4$.

### Foco em Conceitos

**47.** Use (1) para provar que $e^{z_1} / e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$.

**48.** Use (1) e a fórmula de De Moivre para provar que $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}$, com $n$ inteiro.

**49.** Determine onde a função complexa $e^{\bar{z}}$ é analítica.

**50.** Este problema mostra que a função exponencial complexa definida por (1) é a única função inteira com[plexa] que reproduz a função exponencial real $e^x$ quando $z$ é real, e tem a propriedade $f'(z) = f(z)$, para todo $z$.

(a) Assuma que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja uma função inteira complexa, para a qual $f'(z) = f(z)$. Ex[plique] por que $u$ e $v$ satisfazem as equações diferenciais

$$u_x(x, y) = u(x, y) \quad \text{e} \quad v_x(x, y) = v(x, y).$$

(b) Mostre que $u(x, y) = a(y)e^x$ e $v(x, y) = b(y)e^x$ são soluções das equações diferenciais em (a).

(c) Explique por que a hipótese de que $f(z)$ reproduz a função exponencial real para $z$ real implica $a(0) = 1$ e $b(0) = 0$.

(d) Explique por que as funções $a(y)$ e $b(y)$ satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$a(y) - b'(y) = 0$$
$$a'(y) + b(y) = 0.$$

(e) Resolva o sistema de equações diferenciais em (d) sujeito às condições iniciais $a(0) = 1$ e $b(0) = 0$.

(f) Use as partes (a)-(e) e mostre que a função exponencial complexa definida por (1) é a única função inteira complexa $f(z)$ que reproduz a função exponencial real $e^x$ quando $z$ é real, e tem a propriedade $f'(z) = f(z)$ para todo $z$.

**51.** Descreva a imagem da reta $y = x$ sob a função exponencial. [*Sugestão*: determine uma expressão polar $r(\theta)$ da imagem.]

**52.** Prove que $e^z$ é uma função biunívoca na região fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$.

**53.** Prove que $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$, para todos os números complexos não nulos $z_1$ e $z_2$.

**54.** Prove que $\ln z_1^n = n \ln z_1$, para todo número complexo não nulo $z_1$ e todo inteiro $n$.

**55.** (a) Determine dois números complexos $z_1$ e $z_2$ tais que $\text{Ln}\,(z_1z_2) \neq \text{Ln}\,z_1 + \text{Ln}\,z_2$.
(b) Determine dois números complexos $z_1$ e $z_2$ tais que $\text{Ln}\,(z_1z_2) = \text{Ln}\,z_1 + \text{Ln}\,z_2$.
(c) O que pode ser dito a respeito de $z_1$ e $z_2$ se $\text{Ln}\,(z_1z_2) = \text{Ln}\,z_1 + \text{Ln}\,z_2$?

**56.** $\text{Ln}\,z_1^n = n\,\text{Ln}\,z_1$ para todos os inteiros $n$ e números complexos $z_1$? Justifique sua resposta com uma pequena prova ou com um contraexemplo.

### Tarefas para o Laboratório de Computação

A maioria dos SACs dispõe de uma função interna para calcular o valor de Ln $z$. Por exemplo, em *Mathematica* o comando **Log[a + b I]** determina o valor principal do logaritmo complexo de $a + bi$. O comando **N[Log[a + b I]]** calcula uma aproximação para este valor. Por exemplo, *Mathematica* indica que **N[Log[2 + 3 I]]** é aproximadamente $1{,}28247 + 0{,}982794i$.

Nos Problemas 57-62, use um SAC para calcular o valor de Ln $z$.

**57.** $z = -1 - i$

**58.** $z = 2 - 3i$

**59.** $z = 3 + \pi i$

**60.** $z = 13 + \sqrt{2}i$

**61.** $z = 4 + 10i$

**62.** $z = \dfrac{12 - i}{2 + 3i}$

Nos Problemas 63-66, use um SAC para determinar uma solução da equação dada.

**63.** $e^{5z-i} = 12i$

**64.** $e^{iz} = 2 - 5i$

**65.** $3e^{(2+i)z} = 5 - i$

**66.** $ie^{z-2} = \pi$

## 4.2 Potências Complexas

***Ao Professor***: Nesta seção estudaremos potências complexas $z^\alpha$, onde $\alpha$ é uma constante complexa. Esta seção pode ser omitida sem alterar de modo significativo o desenvolvimento de tópicos em capítulos subsequentes.

Na Seção 2.4 examinamos funções potências especiais da forma $z^n$ e $z^{1/n}$, para $n$ inteiro e $n \geq 2$. Estas funções representam generalizações das funções quadrática, cúbica, raiz quadrada, raiz cúbica, e assim por diante, do cálculo elementar. Nesta seção analisaremos o problema de elevar um número complexo a uma potência real ou complexa arbitrária. No caso de simples potências inteiras, este processo é facilmente entendido em termos de multiplicação complexa. Por exemplo, $(1 + i)^3 = (1 + i)\,(1 + i)\,(1 + i) = -2 + 2i$. No entanto, não existe uma descrição similar no caso de potências complexas, como $(1 + i)^i$. Para definir expressões como esta, usaremos as funções exponencial e logarítmica complexas da Seção 4.1.

**Potências Complexas** Potências complexas, como a potência $(1 + i)^i$ mencionada na introdução, são definidas em termos das funções exponencial e logarítmica complexas. Recordemos, de (10) da Seção 4.1 que $z = e^{\ln z}$ para todo número complexo não nulo $z$. Por conseguinte, quando $n$ é um inteiro o Teorema 4.1.2($iv$) indica que $z^n$ pode ser escrito como $z^n = (e^{\ln z})^n = e^{n \ln z}$. Esta fórmula, que é válida para expoentes inteiros $n$, sugere o uso da seguinte fórmula para a definição da potência complexa $z^\alpha$ para qualquer expoente complexo $\alpha$.

### Definição 4.2.1 Potências Complexas

Se $\alpha$ for um número complexo e $z \neq 0$, a **potência complexa** $z^\alpha$ é definida como:

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}. \tag{1}$$

Em geral (1) fornece um conjunto infinito de valores, pois a função logaritmo complexo $\ln z$ é multivalente. No entanto, quando $n$ é um inteiro a expressão em (1) tem valor único (de acordo com o fato de $z^n$ ser uma função quando $n$ é um inteiro). Para comprovar isso, usamos o Teorema 4.1.2($ii$) para obter:

$$z^n = e^{n \ln z} = e^{n[\log_e |z| + i \arg(z)]} = e^{n \log_e |z|} e^{n \arg(z) i}. \tag{2}$$

Se $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, então $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, com $k$ inteiro, de modo que

$$e^{n \arg(z) i} = e^{n(\theta + 2k\pi) i} = e^{n\theta i} e^{2nk\pi i}.$$

Da Definição 4.1.1, temos $e^{2nk\pi i} = \cos(2nk\pi) + i \operatorname{sen}(2nk\pi)$. Como $n$ e $k$ são inteiros, $2nk\pi$ é um múltiplo par de $\pi$, de modo que $\cos(2nk\pi) = 1$ e $\operatorname{sen}(2nk\pi) = 0$. Consequentemente, $e^{2nk\pi i} = 1$ e (2) pode ser reescrita como:

$$z^n = e^{n \log_e |z|} e^{n \operatorname{Arg}(z) i}, \tag{3}$$

que tem valor único.

Embora esta discussão mostre que (1) pode definir uma função de valor único, devemos ter em mente que, em geral,

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \tag{4}$$

define uma função multivalente. A função multivalente dada por (4) é denominada **função potência complexa**.

---

EXEMPLO 1 **Potências Complexas**

Determinemos os valores das seguintes potências complexas: (**a**) $i^{2i}$, (**b**) $(1 + i)^i$.

**Solução** Em cada parte, os valores de $z^\alpha$ são determinados com o uso de (1).

(**a**) Na parte (a) do Exemplo 3 da Seção 4.1 vimos que:

$$\ln i = \frac{(4n+1)\pi}{2} i.$$

*Nota*: todos os valores de $i^{2i}$ são reais. ➡

Então, identificando $z = i$ e $\alpha = 2i$ em (1), obtemos:

$$i^{2i} = e^{2i \ln i} = e^{2i[(4n+1)\pi i/2]} = e^{-(4n+1)\pi}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Os valores de $i^{2i}$ que correspondem a, digamos, $n = -1$, 0 e 1 são 12391, 0,0432 e $1{,}507 \times 10^{-7}$, respectivamente.

(**b**) Na parte (b) do Exemplo 3 da Seção 4.1, vimos que:

$$\ln(1 + i) = \frac{1}{2} \log_e 2 + \frac{(8n+1)\pi}{4} i$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Substituindo $z = 1 + i$ e $\alpha = i$ em (1), obtemos:

$$(1+i)^i = e^{i\ln(1+i)} = e^{i[(\log_e 2)/2+(8n+1)\pi i/4]},$$

ou $$(1+i)^i = e^{-(8n+1)\pi/4+i(\log_e 2)/2},$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ . □

Potências complexas definidas por (1) satisfazem as seguintes propriedades, análogas às propriedades de potências reais:

$$z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1+\alpha_2}, \quad \frac{z^{\alpha_1}}{z^{\alpha_2}} = z^{\alpha_1-\alpha_2},$$

e $$(z^{\alpha})^n = z^{n\alpha} \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{5}$$

Cada uma destas propriedades pode ser deduzida da Definição 4.2.1 e do Teorema 4.1.2. Por exemplo, pela Definição 4.2.1 temos $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = e^{\alpha_1 \ln z} e^{\alpha_2 \ln z}$. Usando o Teorema 4.1.2($ii$), isso pode ser reescrito como $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = e^{\alpha_1 \ln z + \alpha_2 \ln z} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)\ln z}$. Como, segundo (1), $e^{(\alpha_1+\alpha_2)\ln z} = z^{\alpha_1+\alpha_2}$, mostramos que $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1+\alpha_2}$.

Nem todas as propriedades de expoentes reais se traduzem em propriedades análogas para expoentes complexos. As Observações no final desta seção apresentam um exemplo disso.

**Valor Principal de uma Potência Complexa** Como ressaltado, a potência complexa $z^{\alpha}$ dada em (1) é, em geral, multivalente, pois é definida com base na função multivalente logaritmo complexo $\ln z$. Podemos associar um único valor a $z^{\alpha}$ se usarmos o valor principal do logaritmo complexo $\text{Ln } z$ no lugar de $\ln z$. Este valor particular da potência complexa é denominado **valor principal** de $z^{\alpha}$. Por exemplo, como $\text{Ln } i = \pi i/2$, o valor principal de $i^{2i}$ é o valor de $i^{2i}$ que corresponde a $n = 0$ na parte (a) do Exemplo 1. Ou seja, o valor principal de $i^{2i}$ é $e^{-\pi} \approx 0{,}0432$. Resumamos esta discussão na seguinte definição.

**Definição 4.2.2 Valor Principal de uma Potência Complexa**

Se $\alpha$ for um número complexo e $z \neq 0$, a função definida por

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \text{Ln} z} \tag{6}$$

é denominada **valor principal da potência complexa** $z^{\alpha}$.

A notação $z^{\alpha}$ será usada para denotar tanto a função potência multivalente $F(z) = z^{\alpha}$ de (4) como o **valor principal da função potência** dada em (6). O contexto deixará claro qual é a função em consideração.

---

EXEMPLO 2 **Valor Principal de uma Potência Complexa**

Determinemos o valor principal das seguintes potências complexas: **(a)** $(-3)^{i/\pi}$, **(b)** $(2i)^{1-i}$.

**Solução** Em cada parte usaremos (6) para determinar o valor principal de $z^{\alpha}$.

(a) Para $z = -3$, temos $|z| = 3$ e $\text{Arg}(-3) = \pi$, de modo que, de (14) da Seção 4.1, $\text{Ln}(-3) = \log_e 3 + i\pi$. Portanto, substituindo $z = -3$ e $\alpha = i/\pi$ em (6), obtemos:

$$(-3)^{i/\pi} = e^{(i/\pi)\text{Ln}(-3)} = e^{(i/\pi)(\log_e 3 + i\pi)},$$

ou $$(-3)^{i/\pi} = e^{-1+i(\log_e 3)/\pi}.$$

A Definição 4.1.1 da Seção 4.1 fornece

$$e^{-1+i(\log_e 3)/\pi} = e^{-1}\left(\cos\frac{\log_e 3}{\pi} + i\,\text{sen}\frac{\log_e 3}{\pi}\right),$$

de modo que $$(-3)^{i/\pi} \approx 0{,}3456 + 0{,}1260i.$$

(b) Para $z = 2i$, temos $|z| = 2$ e $\text{Arg}(2i) = \pi/2$, de modo que de (14) da Seção 4.1, $\text{Ln}\, 2i = \log_e 2 + i\pi/2$. Portanto, substituindo $z = 2i$ e $\alpha = 1 - i$ em (6), obtemos:

$$(2i)^{1-i} = e^{(1-i)\text{Ln}2i} = e^{(1-i)(\log_e 2 + i\pi/2)},$$

ou

$$(2i)^{1-i} = e^{\log_e 2 + \pi/2 - i(\log_e 2 - \pi/2)}.$$

Calculamos uma aproximação para este valor usando a Definição 4.1.1 da Seção 4.1:

$$(2i)^{1-i} = e^{\log_e 2 + \pi/2}\left[\cos\left(\log_e 2 - \frac{\pi}{2}\right) - i\,\text{sen}\left(\log_e 2 - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$\approx 6{,}1474 + 7{,}4008i.$$

**Analiticidade** Em geral, o valor principal de uma potência complexa $z^\alpha$ definido por (6) não é uma função contínua no plano complexo, pois a função $\text{Ln}\, z$ não é contínua no plano complexo. No entanto, como a função $e^{\alpha z}$ é contínua em todo o plano complexo e como a função $\text{Ln}\, z$ é contínua no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, $z^\alpha$ é contínua no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. Usando as coordenadas polares $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$, concluímos que a função definida por

*Lembrete*: ramos de uma função multivalente $F$ são denotados por $f_1$, $f_2$, e assim por diante. ➡

$$f_1(z) = e^{\alpha(\log_e r + i\theta)}, \quad -\pi < \theta < \pi$$

é um ramo da função multivalente $F(z) = z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Este ramo particular é denominado **ramo principal** da potência complexa $z^\alpha$; seu corte de ramo é o eixo real não positivo, e o ponto de ramo, $z = 0$.

No domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, o ramo $f_1$ definido por (7) reproduz o valor principal $z^\alpha$ definido por (6). Consequentemente, a derivada de $f_1$ pode ser calculada com uso da regra da cadeia (6) da Seção 3.1:

$$f_1'(z) = \frac{d}{dz}e^{\alpha \text{Ln} z} = e^{\alpha \text{Ln} z}\frac{d}{dz}[\alpha \text{Ln}\, z] = e^{\alpha \text{Ln} z}\frac{\alpha}{z}.$$

Usando o valor principal $z^\alpha = e^{\alpha\, \text{Ln}\, z}$, observamos que (8) pode ser simplificada para $f_1'(z) = \alpha z^\alpha / z = \alpha z^{\alpha-1}$. Ou seja, no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$ o valor principal da potência complexa $z^\alpha$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dz}z^\alpha = \alpha\, z^{\alpha - 1}.$$

Isso demonstra que a regra de potência (7) da Seção 3.1 se aplica ao valor principal de uma potência complexa no domínio especificado.

Outros ramos da função multivalente $F(z) = z^\alpha$ podem ser definidos com o uso da fórmula em (7), com $\theta$ assumindo valores em outros intervalos de comprimento $2\pi$. Por exemplo, $f_2(z) = e^{\alpha(\log_e r + i\theta)}$, $-\pi/4 < \theta < 7\pi/4$, define um ramo de $F$ cujo corte de ramo é o raio $\arg(z) = -\pi/4$, e o ponto de ramo é $z = 0$.

---

EXEMPLO 3 **Derivada de uma Função Potência**

Determinemos a derivada do valor principal $z^i$ no ponto $z = 1 + i$.

**Solução** Como o ponto $z = 1 + i$ está no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, de (9) temos:

$$\frac{d}{dz}z^i = i\, z^{i-1},$$

de modo que,

$$\left.\frac{d}{dz}z^i\right|_{z=1+i} = i\, z^{i-1}\big|_{z=1+i} = i\,(1+i)^{i-1}.$$

Podemos usar (5) para reescrever este valor como:

$$i\,(1+i)^{i-1} = i\,(1+i)^i\,(1+i)^{-1} = i\,(1+i)^i\,\frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{2}\,(1+i)^i.$$

Além disso, da parte (b) do Exemplo 1, com $n = 0$, o valor principal de $(1 + i)^i$ é:

$$(1+i)^i = e^{-\pi/4+i(\log_e 2)/2},$$

de modo que,
$$\left.\frac{d}{dz}z^i\right|_{z=1+i} = \frac{1+i}{2}e^{-\pi/4+i(\log_e 2)/2} \approx 0{,}1370 + 0{,}2919i.$$ ❑

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

(*i*) Como já mencionado, algumas propriedades de potências reais não são satisfeitas por potências complexas. Um exemplo disso é que para potências complexas $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2} \neq z^{\alpha_1\alpha_2}$, a menos que $\alpha_2$ seja um inteiro (Problema 14 do Conjunto de Exercícios 4.2).

(*ii*) Como no caso de logaritmos complexos, algumas propriedades de potências reais não se aplicam a valores principais de potências complexas. Por exemplo, usando a Definição 4.2.1 e o Teorema 4.1.2, podemos provar que $(z_1z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha$ para quaisquer números complexos $z_1$ e $z_2$. No entanto, esta propriedade não se aplica aos valores principais dessas potências complexas. Em particular, se $z_1 = -1$, $z_2 = i$ e $\alpha = i$, de (6) temos que o valor principal de $(-1 \cdot i)^i$ é $e^{i\,\mathrm{Ln}(-i)} = e^{\pi/2}$. Contudo, o produto dos valores principais de $(-1)^i$ e $i^i$ é $e^{i\,\mathrm{Ln}(-1)}\,e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{-\pi}e^{-\pi/2} = e^{-3\pi/2}$.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 4.2 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–6, determine todos os valores da potência complexa dada.

**1.** $(-1)^{3i}$  **2.** $3^{2i/\pi}$

**3.** $(1+i)^{1-i}$  **4.** $(1+\sqrt{3}i)^i$

**5.** $(-i)^i$  **6.** $(ei)^{\sqrt{2}}$

Nos Problemas 7–12, determine o valor principal da potência complexa dada.

**7.** $(-1)^{3i}$  **8.** $3^{2i/\pi}$

**9.** $2^{4i}$  **10.** $i^{i/\pi}$

**11.** $(1+\sqrt{3}i)^{3i}$  **12.** $(1+i)^{2-i}$

**13.** Comprove que $\dfrac{z^{\alpha_1}}{z^{\alpha_2}} = z^{\alpha_1-\alpha_2}$ para $z \neq 0$.

**14.** (a) Comprove que $(z^\alpha)^n = z^{n\alpha}$ para $z \neq 0$ e $n$ inteiro.
(b) Dê um exemplo que ilustre o fato de que, para $z \neq 0$, é possível que $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2} \neq z^{\alpha_1\alpha_2}$.

Nos Problemas 15–18, determine a derivada da função dada no ponto especificado. Admita que $z^\alpha$ representa o valor principal da potência complexa definida no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$.

**15.** $z^{3/2}$; $z = 1+i$  **16.** $z^{2i}$; $z = i$

**17.** $z^{1+i}$; $z = 1+\sqrt{3}i$  **18.** $z^{\sqrt{2}}$; $z = -i$

**Foco em Conceitos**

**19.** Para qualquer número complexo $z \neq 0$, calcule $z^0$.

**20.** Se $\alpha = x + iy$, com $x = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, o que pode ser dito sobre $1^\alpha$?

**21.** Mostre que, se $\alpha = 1/n$, onde $n$ é um inteiro positivo, o valor principal de $z^\alpha$ é igual à raiz enésima principal de $z$.

**22.** (a) Mostre que, se $\alpha$ for um número racional (ou seja, $\alpha = m/n$, onde $m$ e $n$ são inteiros sem fator comum), $z^\alpha$ tem um número finito de valores.
(b) Mostre que, se $\alpha$ for um número irracional (ou seja, não for um número racional), $z^\alpha$ tem um número infinito de valores.

**23.** Qual(is) da(s) identidade(s) listadas em (5) se aplica(m) ao valor principal de $z^\alpha$?

**24.** Uma propriedade útil de números reais é $x^a y^a = (xy)^a$.
(a) A propriedade $z^\alpha w^\alpha = (zw)^\alpha$ é válida para potências complexas?
(b) A propriedade $z^\alpha w^\alpha = (zw)^\alpha$ é válida para o valor principal de uma potência complexa?

**Tarefas para o Laboratório de Computação**

A maioria dos SACs dispõe de uma função interna para calcular o valor principal de uma potência complexa. Por exemplo, em *Mathematica* o comando **(a + b I)^(c + d I)** é usado para esse fim. O comando **N[(a + b I)^(c + d I)]** calcula uma aproximação para esse valor. Por exemplo, *Mathematica* indica que **N[(1 + 2 I)^(3 + 2 I)]** é aproximadamente $0{,}2647 - 1{,}1922i$.

Nos Problemas 25–30, use um SAC para calcular o valor principal da potência complexa dada.

**25.** $(1-5i)^{i}$

**26.** $5^{5-2i}$

**27.** $(2-i)^{3+2i}$

**28.** $(1-4i)^{1+3i}$

**29.** $(1+i)^{(1+i)^{1+i}}$

**30.** $(1-3i)^{1/4}$

## 4.3 Funções Trigonométricas e Hiperbólicas

Nesta seção definiremos funções trigonométricas e hiperbólicas complexas. Como no caso das funções complexas $e^z$ e $\text{Ln}\, z$ definidas em uma seção anterior, essas novas funções reproduzem as correspondentes funções reais para entrada real. Além disso, mostraremos que as funções trigonométricas e hiperbólicas complexas têm as mesmas derivadas e satisfazem muitas das identidades satisfeitas por funções trigonométricas e hiperbólicas reais.

### 4.3.1 Funções Trigonométricas Complexas

Se $x$ for uma variável real, da Definição 4.1.1 temos:

$$e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}x \quad \text{e} \quad e^{-ix} = \cos x - i\,\text{sen}x. \tag{1}$$

Somando estas duas equações e simplificando, obtemos uma equação que relaciona a função cosseno real à função exponencial complexa:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}. \tag{2}$$

De modo similar, se subtrairmos as duas equações em (1) obtemos uma expressa para a função seno real:

$$\text{sen}x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{3}$$

As fórmulas para as funções cosseno e seno *reais* dadas em (2) e (3) podem ser usadas para definir as funções cosseno e seno *complexos*. As funções trigonométricas complexas são definidas com a substituição da variável real $x$ pela variável complexa $z$ em (2) e (3).

**Definição 4.3.1 Funções Seno e Cosseno Complexos**

As funções **seno** e **cosseno** complexos são definidas como:

$$\text{sen}z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{4}$$

As equações (2) e (3) mostram que as funções seno e cosseno complexos definidas em (4) reproduzem as funções seno e cosseno reais, respectivamente, para entrada real. A seguir, definimos as funções tangente, cotangente, secante e cossecante complexas a partir do seno e cosseno complexos:

$$\tan z = \frac{\text{sen}\, z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\text{sen}\, z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \text{e} \quad \csc z = \frac{1}{\text{sen}\, z}. \tag{5}$$

Estas funções também reproduzem as correspondentes funções reais para entrada real.

EXEMPLO 1 **Valores de Funções trigonométricas Complexas**

Em cada parte, expressemos o valor da função trigonométrica dada na forma $a + ib$.

(a) $\cos i$ (b) $\operatorname{sen}(2+i)$ (c) $\tan(\pi - 2i)$

**Solução** Para cada expressão, aplicamos a fórmula pertinente de (4) ou (5) e simplificamos:

(a) De (4),

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1{,}5431.$$

(b) De (4),

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2+i) &= \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i}\\ &= \frac{e^{-1+2i} - e^{1-2i}}{2i}\\ &= \frac{e^{-1}(\cos 2 + i\operatorname{sen} 2) - e(\cos(-2) + i\operatorname{sen}(-2))}{2i}\\ &\approx \frac{0{,}9781 + 2{,}8062i}{2i}\\ &\approx 1{,}4031 - 0{,}4891i.\end{aligned}$$

(c) Da primeira fórmula em (5) e de (4), temos:

$$\begin{aligned}\tan(\pi - 2i) &= \frac{\left(e^{i(\pi-2i)} - e^{-i(\pi-2i)}\right)/2i}{\left(e^{i(\pi-2i)} + e^{-i(\pi-2i)}\right)/2} = \frac{e^{i(\pi-2i)} - e^{-i(\pi-2i)}}{\left(e^{i(\pi-2i)} + e^{-i(\pi-2i)}\right)i}\\ &= -\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}i \approx -0{,}9640i.\end{aligned}$$

❑

**Identidades** A maioria das familiares identidades satisfeitas por funções trigonométricas reais se aplica a funções trigonométricas complexas. Isso resulta da Definição 4.3.1 e de propriedades da função exponencial complexa. A seguir, listaremos algumas das identidades trigonométricas mais úteis. Cada resultado em (6)–(10) é idêntico a seu análogo real.

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \quad \cos(-z) = \cos z \tag{6}$$

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \tag{7}$$

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2 \tag{8}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \tag{9}$$

Vale notar que as fórmulas do arco duplo:

$$\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z \quad \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z \tag{10}$$

resultam diretamente de (8) e (9).

Comprovaremos apenas a identidade (7). A prova das restantes é feita de modo similar (Problemas 13 e 14 do Conjunto de Exercícios 4.3). Para comprovar (7), notamos que de (4) e de propriedades da função exponencial complexa especificadas no Teorema 4.1.2 temos

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4},$$

e

$$\operatorname{sen}^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4}.$$

Portanto,

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4} = 1.$$

*Nota* ➡ É importante ressaltar que algumas propriedades de funções trigonométricas reais *não* são satisfeitas pelas correspondentes funções complexas. Por exemplo, $|\text{sen } x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$ para todo $x$ real; contudo, do Exemplo 1 temos $|\cos i| > 1$ e $|\text{sen}(2 + i)| > 1$, pois $|\cos i| \approx 1{,}5431$ e $|\text{sen } (2 + i)| \approx 1{,}4859$. Port... as desigualdades, em geral, não são satisfeitas para entrada complexa.

**Periodicidade** Na Seção 4.1 vimos que a função exponencial complexa é periódica, com período puramente imaginário $2\pi i$. Ou seja, mostramos que $e^{z+2\pi i} = e^z$, para todo $z$ complexo. Substituindo $z$ por $iz$ nesta equação, obtemos $e^{iz+2\pi i} = e^{i(z+2\pi)} = e^{iz}$. Logo, $e^{iz}$ é periódica, com período real $2\pi$. De modo similar, podemos mostrar $e^{-i(z+2\pi)} = e^{-iz}$ também é uma função periódica, com período real $2\pi$. Portanto, da Definição 4.3.1, temos:

$$\text{sen}(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \text{sen}\, z.$$

Uma asserção semelhante é satisfeita pela função cosseno complexo. Em resumo,

$$\text{sen}\,(z + 2\pi) = \text{sen}\, z \qquad \text{e} \qquad \cos\,(z + 2\pi) = \cos z \qquad (11)$$

para todo $z$. Em outras palavras, (11) mostra que seno e cosseno complexos são funções periódicas, com período real $2\pi$. A periodicidade das funções secante e cossecante advém diretamente de (11) e (5). As identidades $\text{sen}(z + \pi) = -\text{sen } z$ e $\cos(z + \pi) = -\cos z$ podem ser usadas para mostrar que a tangente e a cotangente complexas são periódicas, com período real $\pi$ (Problemas 51 e 52 do Conjunto de Exe... cios 4.3).

**Equações Trigonométricas** A seguir, voltamos a atenção à solução de equações trigonométricas simples. Como as funções seno e cosseno complexos são periódicas, sempre há infinitas soluções para equações da forma $\text{sen } z = w$ ou $\cos z = w$. Uma abordagem para resolver equações como estas consiste em usar a Definição 4.3.1 em conjunto com a fórmula quadrática. Demonstraremos este método no exemplo seguinte.

---

EXEMPLO 2 **Solução de Equações Trigonométricas**

Determinemos todas as soluções da equação $\text{sen } z = 5$.

**Solução** Pela Definição 4.3.1, a equação $\text{sen } z = 5$ é equivalente à equação

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 5.$$

Multiplicando esta equação por $e^{iz}$ e simplificando, obtemos

$$e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = 0.$$

Esta é uma equação do segundo grau em $e^{iz}$, ou seja,

$$e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = \left(e^{iz}\right)^2 - 10i\left(e^{iz}\right) - 1 = 0.$$

Usando a fórmula quadrática (3) da Seção 1.6, a solução de $e^{2iz} - 10e^{iz} - 1 = 0$ é calculada como

$$e^{iz} = \frac{10i + (-96)^{1/2}}{2} = 5i \pm 2\sqrt{6}i = \left(5 \pm 2\sqrt{6}\right)i.$$

Para determinar os valores de $z$ que satisfazem (12), resolvemos as duas equações exponenciais em (12) fazendo uso do logaritmo complexo. Se $e^{iz} = (5 + 2\sqrt{6})i$, $iz = \ln\,(5i + 2\sqrt{6}i)$ ou $z = -i \ln\,[(5 + 2\sqrt{6})i]$. Como $(5 + 2\sqrt{6})i$ é um número imaginário puro e $5 + 2\sqrt{6} > 0$, $\arg[(5 + 2\sqrt{6})i] = \frac{1}{2}\pi + 2n\pi$. Logo,

$$z = -i \log\left[\left(5 + 2\sqrt{6}\right)i\right] = -i\left[\log_e\left(5 + 2\sqrt{6}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$$

ou

$$z = \frac{(4n+1)\pi}{2} - i \log_e\left(5 + 2\sqrt{6}\right)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ De modo similar, concluímos que, se $e^{iz} = (5 - 2\sqrt{6})i$, $z = -i \ln[(5 - 2\sqrt{6})i]$. Como $(5 - 2\sqrt{6})i$ é um número imaginário puro e $5 - 2\sqrt{6} > 0$, $\arg[(5 - 2\sqrt{6})i] = \frac{1}{2}\pi + 2n\pi$, de modo que

$$z = -i \log\left[\left(5 - 2\sqrt{6}\right)i\right] = -i\left[\log_e\left(5 - 2\sqrt{6}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$$

ou

$$z = \frac{(4n+1)\pi}{2} - i \log_e\left(5 - 2\sqrt{6}\right) \tag{14}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Com isso, mostramos que se sen $z = 5$, $z$ é um dos valores dados em (13) ou (14). ☐

**Módulo** O módulo de uma função trigonométrica complexa também pode ser útil na solução de equações trigonométricas. Para deduzir fórmulas em termos de $x$ e $y$ para os módulos das funções seno e cosseno, primeiro expressamos estas funções em termos de suas partes real e imaginária. Substituindo o símbolo $z$ por $x + iy$ na expressão para sen $z$ em (4), obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2i} \\ &= \operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i \cos x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Como as funções seno e cosseno hiperbólicos reais são definidas, respectivamente, por senh $y = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$ e cosh $x = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$, podemos reescrever (15) como

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y. \tag{16}$$

Cálculo similar nos permite expressar a função cosseno complexo em termos de suas partes real e imaginária como:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \tag{17}$$

Agora podemos usar (16) e (17) para deduzir fórmulas para os módulos das funções seno e cosseno complexos. De (16), temos:

$$|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y}$$

Essa fórmula pode ser simplificada com uso das identidades $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ e $\cosh^2 y = 1 + \operatorname{senh}^2 y$ para as funções trigonométricas e hiperbólicas reais:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} z| &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 x\left(1 + \operatorname{senh}^2 y\right) + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{senh}^2 y}, \end{aligned}$$

ou

$$|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}. \tag{18}$$

Após cálculo semelhante, obtemos a seguinte expressão para o módulo da função cosseno complexo:

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}. \tag{19}$$

y

y = senh x

y = −e^{−x}/2

x

(a) y = senh x

y

y = cosh x

y = e^{−x}/2

x

(b) y = cosh x

Figura 4.3.1 Funções hiperbólicas reais

Vale recordar do cálculo que a função hiperbólica real senh $x$ é ilimitada na reta real (Figura 4.3.1(a)). Como resultado desse fato, os valores das expressões em (18) e (19) podem ser feitos arbitrariamente grandes com a escolha de um valor arbitrariamente grande para $y$. Portanto, as funções seno e cosseno complexos são ilimitadas no plano complexo. Ou seja, não existe uma constante real $M$ de modo que $|\operatorname{sen} z| < M$, para todo $z$ em $\mathbf{C}$, assim como não existe uma constante real $M$ de modo que $|\cos z| < M$, para todo $z$ em $\mathbf{C}$. Isto, é claro, é muito diferente do que ocorre com funções seno e cosseno reais, para as quais $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$ para todo $x$ real.

**Zeros** As fórmulas deduzidas para os módulos das funções seno e cosseno complexos são úteis na determinação de zeros dessas funções. Recordemos que os zeros da função seno real ocorrem em múltiplos inteiros de $\pi$, e que os zeros da função cos-

seno real ocorrem em múltiplos ímpares de $\pi/2$. Como as funções seno e cosseno complexos reproduzem as correspondentes funções reais para entrada real, os zeros das funções seno e cosseno *reais* também são zeros das funções seno e cosseno *complexos*. É natural questionar se as funções seno e cosseno complexos têm zeros adicionais no plano complexo. Uma forma de esclarecer esta questão consiste em resolver as equações sen $z = 0$ e cos $z = 0$, segundo o procedimento apresentado no Exemplo 2. Um método diferente se baseia no fato de que um número complexo é igual a 0 se e somente se seu módulo for 0. Assim, resolver a equação sen $z = 0$ é equivalente a resolver a equação $|\text{sen}\, z| = 0$. Usando (18), vemos que se $|\text{sen}\, z| = 0$, então $\sqrt{\text{sen}^2 x + \text{senh}^2 y} = 0$, que é equivalente a:

$$\text{sen}^2 x + \text{senh}^2 y = 0.$$

Como $\text{sen}^2 x$ e $\text{senh}^2 y$ são números reais não negativos, a última equação é satisfeita se e somente se sen $x = 0$ e senh $y = 0$. Como sabemos, sen $x = 0$ quando $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e uma inspeção da Figura 4.3.1(a) indica que senh $y = 0$ apenas quando $y = 0$. Portanto, as soluções da equação sen $z = 0$ no plano complexo são os números reais $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ou seja, os zeros da função seno complexo são iguais aos zeros da função seno real; não há zeros adicionais da função seno no plano complexo. Esta situação difere da de funções polinomiais, para as quais, com frequência, há zeros adicionais no plano complexo.

De modo similar, podemos mostrar que os únicos zeros da função cosseno complexo são os números reais $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (Problema 41 do Conjunto de Exercícios 4.3). Em resumo, temos:

Todos os zeros de sen $z$ e de cos $z$ são reais. ➡

$$\text{sen}\, z = 0 \text{ se e somente se } z = n\pi, \quad (20)$$

e

$$\cos z = 0 \text{ se e somente se } z = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (21)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

**Analiticidade** As derivadas das funções seno e cosseno complexos são determinadas com uso da regra da cadeia (6) da Seção 3.1. Para a função seno complexo, temos:

$$\frac{d}{dz}\text{sen} z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

ou

$$\frac{d}{dz}\text{sen}\, z = \cos z.$$

Como esta derivada é definida para todo $z$ complexo, sen $z$ é uma função inteira. De modo similar, temos:

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\text{sen}\, z.$$

As derivadas de sen $z$ e de cos $z$ podem ser usadas para mostrar que as derivadas de todas as funções trigonométricas complexas têm as mesmas expressões que as das correspondentes funções trigonométricas reais. As derivadas das seis funções trigonométricas complexas são listadas a seguir.

### *Derivadas de Funções Trigonométricas Complexas*

$$\frac{d}{dz}\text{sen}\, z = \cos z \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\text{sen}\, z$$

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z \qquad \frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z \qquad \frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$$

As funções seno e cosseno são inteiras, mas as funções tangente, cotangente, secante e cossecante são analíticas apenas nos pontos em que o denominador é não nulo. De (20) e (21), vemos que as funções

tangente e secante têm singularidades em $z = (2n + 1)\pi/2$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ enquanto as funções cotangente e cossecante têm singularidades em $z = n\pi$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

**Transformação Trigonométrica** A seguir, discutiremos a transformação complexa $w = \text{sen}\ z$ do plano $z$ no plano $w$. Como sen $z$ é periódica, com período real $2\pi$, esta função assume todos os valores em qualquer fita vertical $x_0 < x \leq x_0 + 2\pi$, $-\infty < y < \infty$. De forma semelhante à usada para estudar a transformação exponencial $w = e^z$, podemos estudar a transformação $w = \text{sen}\ z$ em todo o plano complexo analisando-a em qualquer uma dessas fitas. Consideramos, por exemplo, a fita $-\pi < x \leq \pi$, $-\infty < y < \infty$. Antes de examinarmos a transformação complexa $w = \text{sen}\ z$ nesta fita, observemos que sen $z$ não é biunívoca nesta região. Por exemplo, $z_1 = 0$ e $z_2 = \pi$ estão nesta região e sen $0$ = sen $\pi = 0$. Da identidade sen $(-z + \pi) = \text{sen}\ z$, vemos que a imagem da fita $-\pi < x \leq -\pi/2$, $-\infty < y < \infty$ é a mesma que a imagem da fita $\pi/2 < x \leq \pi$, $-\infty < y < \infty$, sob $w = \text{sen}\ z$. Por conseguinte, para entendermos a transformação $w = \text{sen}\ z$ em todo o plano $z$, basta considerá-la na região $-\pi/2 < x \leq \pi/2$, $-\infty < y < \infty$. O Problema 45 do Conjunto de Exercícios 4.3 pede que seja mostrado que a função seno complexo é biunívoca no domínio $-\pi/2 < x \leq \pi/2$, $-\infty < y < \infty$.

---

**EXEMPLO 3 Transformação $w = \text{sen}\ z$**

Descrevamos a imagem da região $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $-\infty < y < \infty$, sob a transformação complexa $w = \text{sen}\ z$.

**Solução** Como no caso da transformação exponencial, discutida na Seção 4.1, uma abordagem a este problema consiste em determinar a imagem de retas verticais $x = a$, com $-\pi/2 \leq a \leq \pi/2$, sob $w = \text{sen}\ z$. Assumamos, por ora, que $a \neq -\pi/2$, 0 ou $\pi/2$. De (16), a imagem da reta vertical $x = a$ sob $w = \text{sen}\ z$ é dada por:

$$u = \text{sen}\, a \cosh y, \quad v = \cos a\, \text{senh}\, y, \quad -\infty < y < \infty. \tag{22}$$

Eliminamos a variável $y$ em (22) e obtemos uma única equação cartesiana relacionando $u$ e $v$. Como $-\pi/2 < a < \pi/2$ e $a \neq 0$, sen $a \neq 0$ e cos $a \neq 0$; de (22), temos $\cosh y = \dfrac{u}{\text{sen}\, a}$ e $\text{senh}\ y = \dfrac{v}{\cos a}$. A identidade $\cosh^2 y - \text{senh}^2\, y = 1$ para funções hiperbólicas reais leva à seguinte equação:

$$\left(\frac{u}{\text{sen}\, a}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos a}\right)^2 = 1. \tag{23}$$

A equação cartesiana em (23) é uma hipérbole com vértices em $(\pm\ \text{sen}\ a, 0)$ e assíntotas oblíquas $v = \pm\left(\dfrac{\cos a}{\text{sen}\, a}\right) u$. Como o ponto $(a, 0)$ está na reta $x = a$, o ponto (sen $a$, 0) deve estar na imagem da reta. Portanto, a imagem da reta vertical $x = a$, com $-\pi/2 < a < \pi/2$ e $a \neq 0$, sob $w = \text{sen}\ z$ é o ramo* da hipérbole (23) que contém o ponto (sen $a$, 0). Como sen $(-z) = -\text{sen}\ z$ para todo $z$, a imagem da reta $x = -a$ é o ramo da hipérbole (23) que contém o ponto ($-$sen $a$, 0). Ilustramos esta propriedade de transformação de $w = \text{sen}\ z$ na Figura 4.3.2, onde as retas verticais mostradas em cinza na Figura 4.3.2(a) são mapeadas nas hipérboles mostradas em preto na Figura 4.3.2(b). A reta $x = \pi/3$ é mapeada no ramo de hipérbole que contém o ponto $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0\right)$; a reta $x = \pi/6$ é mapeada no ramo de hipérbole que contém o ponto $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$. De modo similar, a reta $x = -\pi/3$ é mapeada no ramo de hipérbole que contém o ponto $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\ 0\right)$, e a reta $x = -\pi/6$ é mapeada no ramo de hipérbole que contém o ponto $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$.

As imagens das retas $x = -\pi/2$, $x = \pi/2$ e $x = 0$ não podem ser determinadas de (23). Contudo, de (22) vemos que a imagem da reta $x = -\pi/2$ é o conjunto de pontos $u \leq -1$ no eixo real negativo, que a imagem da reta $x = \pi/2$ é o conjunto de pontos $u \geq 1$ no eixo real positivo e que a imagem da reta $x = 0$ é o eixo imaginário $u = 0$ (Figura 4.3.2). Em resumo, mostramos que a imagem da fita vertical infinita $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $-\infty < y < \infty$, sob $w = \text{sen}\ z$ é todo o plano $w$. ❑

---

*Não devemos confundir este termo com o "ramo de uma função multivalente".

(a) Região $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ (b) Imagem da região em (a)

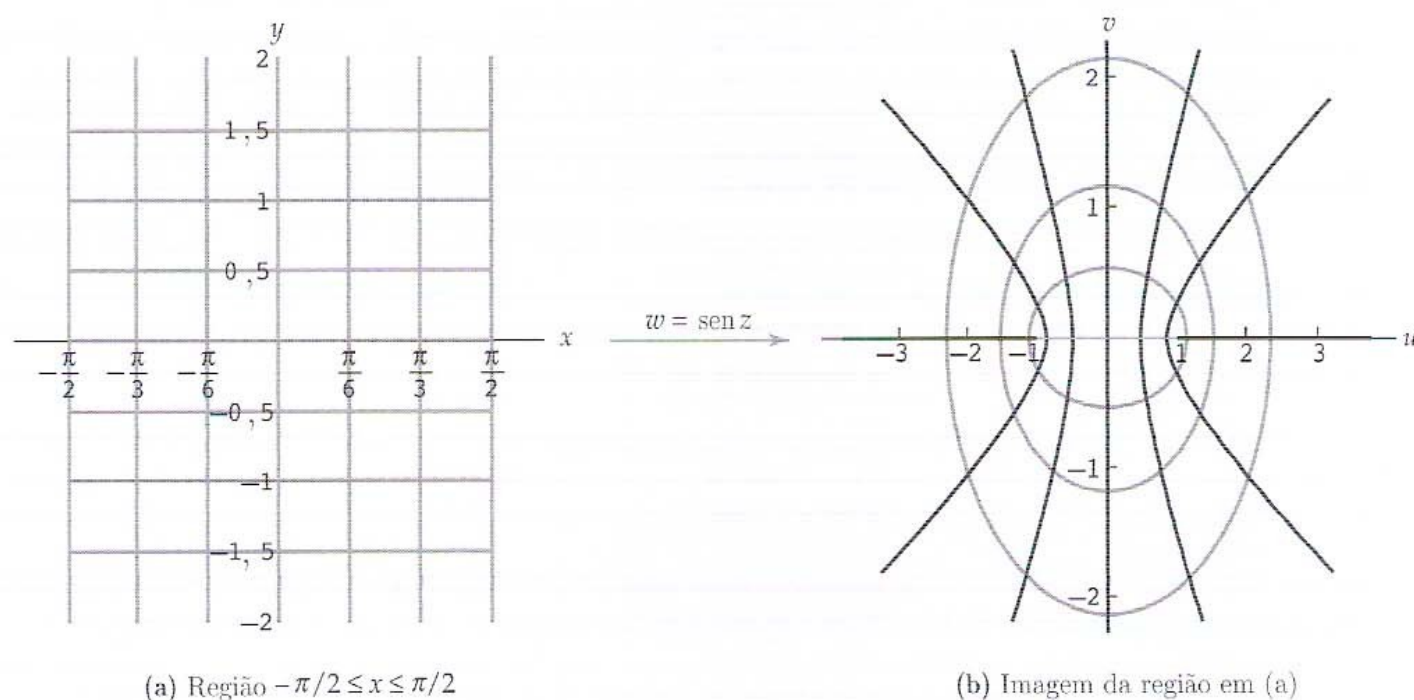



**Figura 4.3.2** Transformação $w$ = sen $z$

No Exemplo 3 a imagem também poderia ser determinada usando segmentos de retas horizontais $y =$ $b$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ no lugar de retas verticais. Neste caso, as imagens são dadas por:

$$u = \operatorname{sen} x \cosh b, \quad v = \cos x \operatorname{senh} b, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Quando $b \neq 0$, este conjunto também é dado pela equação cartesiana:

$$\left(\frac{u}{\cosh b}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{senh} b}\right)^2 = 1,$$

que descreve uma elipse que cruza o eixo $u$ em $(\pm\cosh\, b, 0)$ e o eixo $v$ em $(0, \pm\text{sen}\ b)$. Se $b > 0$, a imagem do segmento de reta $y = b$ é a metade superior da elipse definida por (24), e a imagem do segmento de reta $y = -b$ é a metade inferior desta elipse. Portanto, os segmentos de retas horizontais mostrados em cinza na Figura 4.3.2(a) são mapeados nas elipses mostradas em cinza na Figura 4.3.2(b). Os segmentos de retas horizontais mais internos são mapeados nas elipses mais internas, o par de segmentos de retas horizontais intermediários é mapeado nas elipses intermediárias e os segmentos de retas horizontais mais externos são mapeados nas elipses mais externas. Como observação final, notemos que se $b = 0$, a imagem do segmento de reta $y = 0$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, é o segmento de reta $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$, no eixo real.

A transformação $w = \cos z$ pode ser analisada de modo similar ou, como $\cos z = \operatorname{sen}(z + \pi/2)$, de fato podemos interpretar a transformação $w = \cos z$ como uma composição da translação $w = z + \pi/2$ com a transformação $w = \operatorname{sen} z$ (Problema 46 do Conjunto de Exercícios 4.3).

## 4.3.2 Funções Hiperbólicas Complexas

As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico *reais* são definidas com base na função exponencial real da seguinte forma:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico *complexos* são definidas de forma análoga, com base na função exponencial *complexa*.

**Definição 4.3.2 Seno e Cosseno Hiperbólicos Complexos**

As funções **seno hiperbólico** e **cosseno hiperbólico** complexos são definidas por:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{25}$$

Como a função exponencial complexa reproduz a função exponencial real para entrada real, (25) indica que as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico *complexos* com entrada real reproduzem as funções

seno hiperbólico e cosseno hiperbólico *reais*. No entanto, diferentemente das funções hiperbólicas reais, cujos gráficos são mostrados na Figura 4.3.1, as funções hiperbólicas complexas são periódicas e têm infinitos zeros (Problema 50 do Conjunto de Exercícios 4.3).

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas complexas são definidas em termos de senh $z$ e de cosh $z$:

$$\tanh z = \frac{\text{senh}\, z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\text{senh}\, z}, \quad \text{sech}\, z = \frac{1}{\cosh z} \quad \text{e} \quad \text{csch}\, z = \frac{1}{\text{senh}\, z}. \tag{26}$$

Vale observar que as funções seno e cosseno hiperbólicos são inteiras, pois as funções $e^z$ e $e^{-z}$ são inteiras. Além disso, usando a regra da cadeia (6) da Seção 3.1, temos:

$$\frac{d}{dz}\text{senh}\, z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

ou

$$\frac{d}{dz}\text{senh}\, z = \cosh z.$$

Cálculo similar para cosh $z$ leva a:

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \text{senh}\, z.$$

As derivadas das quatro funções hiperbólicas restantes podem ser calculadas usando (26) e a regra para o quociente (5) da Seção 3.1.

***Derivadas de Funções Hiperbólicas Complexas***

$$\frac{d}{dz}\text{senh}\, z = \cosh z \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \text{senh}\, z$$

$$\frac{d}{dz}\tanh z = \text{sech}^2 z \qquad \frac{d}{dz}\coth z = -\text{csch}^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\text{sech}\, z = -\text{sech}\, z \tanh z \qquad \frac{d}{dz}\text{csch} z = -\text{csch} z \coth z$$

**Relações com Seno e Cosseno** As funções trigonométricas reais e hiperbólicas reais têm muitas propriedades similares. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\, x = \cos x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\text{senh}\, x = \cosh x.$$

Apesar de notações parecidas e similaridades entre as respectivas séries de Taylor, não exista uma forma simples para relacionar funções trigonométricas reais e funções hiperbólicas reais. No entanto, no caso de funções trigonométricas complexas e funções hiperbólicas complexas há uma conexão bela e simples entre as mesmas. Para deduzir essa relação, substituímos $z$ por $iz$ na definição de senh $z$ e, então, comparamos o resultado com (4):

$$\text{senh}\,(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = i\ \text{sen}\, z,$$

ou

$$-i\,\text{senh}\,(iz) = \text{sen}\, z.$$

De modo semelhante, se substituirmos $z$ por $iz$ na expressão para sen $z$ e compararmos o resultado com (25), concluímos que senh $z = -i$ sen $(iz)$. Repetindo esse procedimento para cos $z$ e cosh $z$, obtemos as seguintes relações importantes entre funções trigonométricas e hiperbólicas complexas:

$$\text{sen}\, z = -i\text{senh}\,(iz) \quad \text{e} \quad \cos z = \cosh\,(iz) \tag{27}$$

$$\text{senh}\, z = -i\ \text{sen}(iz) \quad \text{e} \quad \cosh z = \cos\,(iz)\,. \tag{28}$$

Relações entre as outras funções trigonométricas e hiperbólicas complexas podem ser obtidas de (27) e de (28). Por exemplo,

$$\tan(iz) = \frac{\text{sen}(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i\,\text{senh}\, z}{\cosh z} = i \tanh z.$$

Podemos, ainda, usar (27) e (28) para deduzir identidades hiperbólicas a partir de identidades trigonométricas. Cada um dos resultados em (29)–(32) é idêntico ao correspondente real.

$$\text{senh}(-z) = -\text{senh}\, z \qquad \cosh(-z) = \cosh z \tag{29}$$

$$\cosh^2 z - \text{senh}^2 z = 1 \tag{30}$$

$$\text{senh}(z_1 \pm z_2) = \text{senh}\, z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \,\text{senh}\, z_2 \tag{31}$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \text{senh}\, z_1 \,\text{senh} z_2 \tag{32}$$

No próximo exemplo comprovaremos a fórmula de adição dada em (32). As outras identidades podem ser comprovadas de modo semelhante (Problemas 29 e 30 do conjunto de Exercícios 4.3).

---

EXEMPLO 4 **Uma Identidade Hiperbólica**

Comprovemos que $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \text{senh}\, z_1\, \text{senh}\, z_2$, para todos os complexos $z_1$ e $z_2$.

**Solução** De (28), $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(iz_1 + iz_2)$, de modo que a identidade trigonométrica (9) e as relações (28) e (29) levam a:

$$\begin{aligned}\cosh(z_1 + z_2) &= \cos(iz_1 + iz_2) \\ &= \cos iz_1 \cos iz_2 - \text{sen} iz_1 \,\text{sen} iz_2 \\ &= \cos iz_1 \cos iz_2 + (-i\,\text{sen}\, iz_1)(-i\,\text{sen} iz_2) \\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \text{senh}\, z_1 \,\text{senh}\, z_2.\end{aligned}$$

As relações entre funções trigonométricas e hiperbólicas complexas dadas em (27) e (28) também nos permitem determinar a ação de funções hiperbólicas como transformações complexas. Por exemplo, como $\text{senh}\ z = -i\text{sen}(iz)$, a transformação complexa $w = \text{senh}\ z$ pode ser considerada uma composição das transformações complexas: $w = iz$, $w = \text{sen}\ z$ e $w = -iz$ (Problema 47 do Conjunto de Exercícios 4.3).

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

(*i*) Na análise real, a função exponencial é apenas uma de várias funções elementares igualmente importantes. Na análise complexa, no entanto, a função exponencial complexa assume um papel muito mais significativo. Todas as funções elementares complexas podem ser definidas em termos apenas das funções exponencial e logarítmica complexas. Um tema recorrente no estudo de análise complexa é o emprego das funções exponencial e logarítmica para calcular valores de diferenciar, integrar e efetuar transformações com funções elementares.

(*ii*) As funções de uma variável real $x$ senh $x$ e cosh $x$ não são periódicas. Em contraste, as funções complexas senh $z$ e cosh $z$ são periódicas (Problema 49 do Conjunto de Exercícios 4.3). Além disso, cosh $x$ não tem zeros e senh $x$ tem apenas um zero em $x = 0$ (Figura 4.3.1). Cada uma das funções complexas senh $z$ e cosh $z$, por sua vez, tem infinitos zeros (Problema 50 do Conjunto de Exercícios 4.3).

(*iii*) Como a função seno complexo é periódica, a transformação $w = \text{sen}\ z$ não é biunívoca no plano complexo. A construção de uma superfície de Riemann para esta função, na forma descrita nas Observações ao final das Seções 2.4 e 4.1, nos ajudará a visualizar a transformação complexa $w = \text{sen}\ z$. Para construir uma superfície de Riemann, consideremos a transformação no quadrado $S_0$ definido por $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Do Exemplo 3, determinamos que a

quadrado $S_0$ mostrado na Figura 4.3.3(a) é mapeado na região elíptica $E$ mostrada na Figura 4.3.3(b). De modo similar, o quadrado adjacente $S_1$, definido por $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, também é mapeado em $E$.

A construção de uma superfície de Riemann se inicia com duas cópias de $E$, $E_0$ e $E_1$, para representar as imagens de $S_0$ e $S_1$, respectivamente. A seguir, cortamos $E_0$ e $E_1$ ao longo dos segmentos de retas no eixo real, de 1 a $\cosh(\pi/2)$ e de $-1$ a $-\cosh(\pi/2)$. Como mostrado na Figura 4.3.4, o segmento mostrado em cinza na fronteira de $S_0$ é mapeado no segmento mostrado em preto na fronteira de $E_0$; o segmento tracejado mostrado em cinza na fronteira de $S_0$ é mapeado no segmento tracejado mostrado em preto na fronteira de $E_0$. De modo análogo, os segmentos em cinza na fronteira de $S_1$ são mapeados nos segmentos pretos na fronteira de $E_1$. Parte da superfície de Riemann consiste nas duas regiões elípticas $E_0$ e $E_1$, com os segmentos contínuos pretos unidos um ao outro, assim como os segmentos tracejados pretos. Para completar a superfície de Riemann, para cada inteiro $n$ tomamos uma região elíptica $E_n$, que representa a imagem do quadrado $S_n$ definido por $(2n-1)\pi/2 \leq x \leq (2n+1)\pi/2$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Cada região $E_n$ é cortada na forma em que o foram $E_0$ e $E_1$; a seguir, $E_n$ é colada a $E_{n+1}$ ao longo das respectivas fronteiras, como feito com $E_0$ e $E_1$. Esta superfície de Riemann é posicionada no espaço $xys$, como ilustrado na Figura 4.3.5.

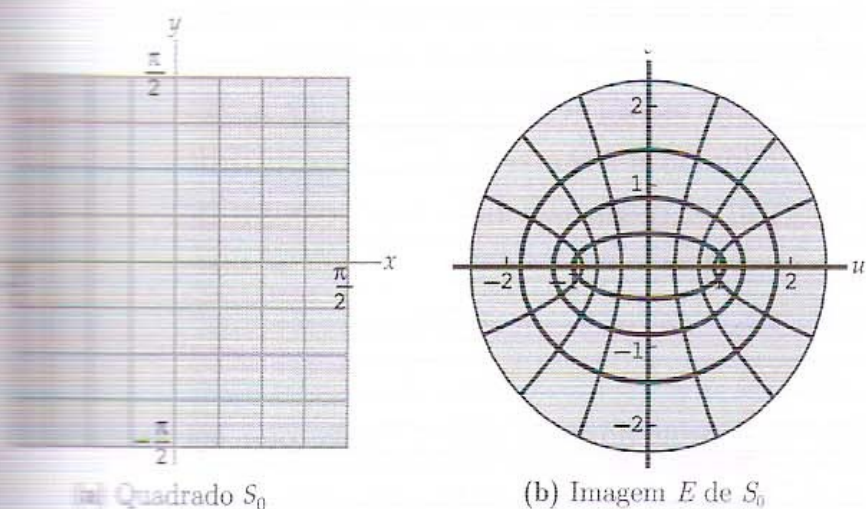



Figura 4.3.3 Transformação $w = \text{sen } z$

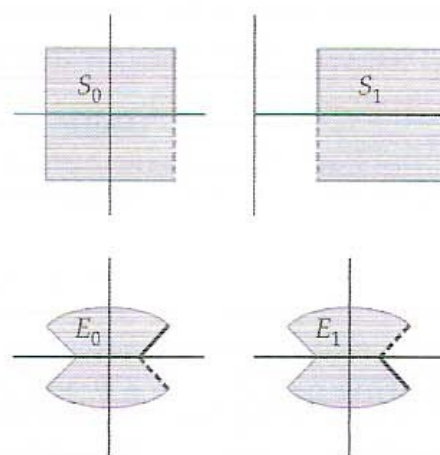



Figura 4.3.4 Regiões elípticas cortadas $E_0$ e $E_1$

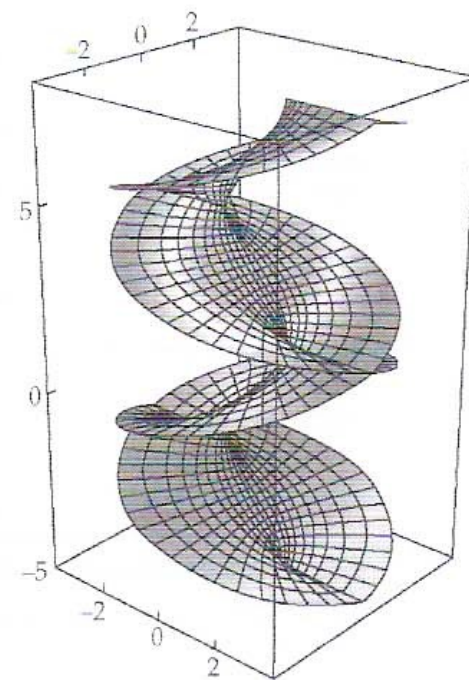



Figura 4.3.5 Superfície de Riemann para $w = \text{sen } z$

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 4.3 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

### 4.3.1 Funções Trigonométricas Complexas

Nos Problemas 1–8, expresse o valor da função trigonométrica dada na forma $a + ib$.

**1.** $\text{sen}(4i)$

**2.** $\cos(-3i)$

**3.** $\cos(2-4i)$

**4.** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$

**5.** $\tan(2i)$

**6.** $\cot(\pi+2i)$

**7.** $\sec\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$

**8.** $\csc(1+i)$

Nos Problemas 9–12, determine todos os valores complexos $z$ que satisfazem a equação dada.

**9.** $\text{sen } z = i$

**10.** $\cos z = 4$

**11.** $\text{sen } z = \cos z$

**12.** $\cos z = i \,\text{sen } z$

Nos Problemas 13–16, comprove a identidade trigonométrica dada.

**13.** $\text{sen}(-z) = -\text{sen } z$

**14.** $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \text{sen } z_1 \,\text{sen } z_2$

**15.** $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

**16.** $\text{sen}\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$

Nos Problemas 17–20, determine a derivada da função dada.

**17.** $\operatorname{sen}(z^2)$

**18.** $\cos(ie^z)$

**19.** $z \tan \dfrac{1}{z}$

**20.** $\sec\left(z^2 + (1-i)z + i\right)$

## 4.3.2 Funções Hiperbólicas Complexas

Nos Problemas 21–24, expresse o valor da função hiperbólica dada na forma $a + ib$.

**21.** $\cosh(\pi i)$

**22.** $\operatorname{senh}\left(\dfrac{\pi}{2}i\right)$

**23.** $\cosh\left(1 + \dfrac{\pi}{6}i\right)$

**24.** $\tanh(2 + 3i)$

Nos Problemas 25–28, determine todos os valores complexos $z$ que satisfazem a equação dada.

**25.** $\cosh z = i$

**26.** $\operatorname{senh} z = -1$

**27.** $\operatorname{senh} z = \cosh z$

**28.** $\operatorname{senh} z = e^z$

Nos Problemas 29–32, comprove a identidade hiperbólica dada.

**29.** $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

**30.** $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$

**31.** $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$

**32.** $\operatorname{Im}(\cosh z) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

Nos Problemas 33–36, determine a derivada da função dada.

**33.** $\operatorname{sen} z \ \operatorname{senh} z$

**34.** $\tanh z$

**35.** $\tanh(iz - 2)$

**36.** $\cosh(iz + e^{iz})$

### Foco em Conceitos

**37.** A fórmula de Euler afirma que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, para qualquer número real $\theta$. Prove que, na verdade, $e$ $\cos z + i \operatorname{sen} z$ para qualquer número complexo $z$.

**38.** Resolva a equação $\operatorname{sen} z = \cosh 2$ igualando as partes real e imaginária.

**39.** Se $\operatorname{sen} z = a$, com $-1 \le a \le 1$, o que pode ser dito a respeito de $z$? Justifique sua resposta.

**40.** Se $|\operatorname{sen} z| \le 1$, o que pode ser dito a respeito de $z$? Justifique sua resposta.

**41.** Mostre que todos os zeros de $\cos z$ são $z = (2n+1)\pi/2$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**42.** Determine todos os valores de $z$ tais que $|\tan z| = 1$.

**43.** Determine as partes real e imaginária da função $\operatorname{sen} \bar{z}$ e as use para mostrar que esta função não é analítica qualquer ponto.

**44.** Sem calcular derivadas parciais, explique por que $\operatorname{sen} x \cosh y$ e $\cos x \operatorname{senh} y$ são funções harmônicas em $\mathbf{C}$.

**45.** Prove que $\operatorname{sen} z$ é uma função biunívoca no domínio $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$.

**46.** Use a identidade $\cos z = \operatorname{sen}\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)$ para determinar a imagem da região $\pi \le x \le 0$ sob a transformação $\cos z$. Descreva as imagens de retas verticais e horizontais na região.

**47.** Use a identidade $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$ para determinar a imagem da região $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, $-\infty < x < \infty$, transformação $w = \operatorname{senh} z$. Descreva as imagens de retas verticais e horizontais na região. [*Sugestão*: a identidade implica que $w = \operatorname{senh} z$ é uma composição de transformações lineares e a transformação complexa $w = \operatorname{sen}$

**48.** Determine a imagem da região definida por $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $y \ge 0$, sob a transformação $w = (\operatorname{sen} z)^{1/4}$, onde representa a função raiz quarta principal.

**49.** Determine o período de cada uma das seguintes funções complexas:
(a) $\cosh z$ (b) $\operatorname{senh} z$ (c) $\tanh z$

**50.** Determine todos os zeros de cada uma das seguintes funções complexas:
(**a**) $\cosh z$ (**b**) $\operatorname{senh} z$

**51.** Comprove as seguintes identidades:
(**a**) $\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen} z$ (**b**) $\cos(z+\pi) = -\cos z$

**52.** Use as identidades do Problema 51 e mostre que $\tan z$ é uma função periódica, com período real $\pi$.

## 4.4 Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas

***Ao Professor***: nesta seção apresentaremos as funções trigonométricas e hiperbólicas complexas inversas. Este material pode ser omitido sem afetar o desenvolvimento de tópicos nos capítulos subsequentes.

A função logarítmica complexa $\ln z$ foi definida na Seção 4.1 para resolver equações da forma $e^w = z$. Como a função exponencial complexa é periódica, existem infinitas soluções para equações como esta e, em consequência, $\ln z$ é necessariamente uma função multivalente. Nesta seção repetiremos este procedimento para equações que envolvem funções trigonométricas e hiperbólicas complexas. Como funções trigonométricas e hiperbólicas complexas são periódicas, suas funções inversas são multivalentes. Além disso, como as funções trigonométricas e hiperbólicas complexas são definidas em termos da função exponencial complexa, suas inversas envolverão o logaritmo complexo.

**Seno Inverso** Em (11) da Seção 4.3 concluímos que a função seno complexo é periódica, com período $2\pi$. Também concluímos que a função seno mapeia o plano complexo no plano complexo, ou seja, $\text{Img}(\operatorname{sen} z) = \mathbf{C}$ (Figura 4.3.2). Estas duas propriedades implicam que para qualquer número complexo $z$ existem infinitas soluções $w$ para a equação $\operatorname{sen} w = z$. Uma fórmula explícita para $w$ é deduzida segundo o procedimento usado no Exemplo 2 da Seção 4.3. Iniciamos usando a Definição 4.3.1 para reescrever a equação $\operatorname{sen} w = z$ como:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \quad \text{ou} \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Como $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$ é uma equação do segundo grau em $e^{iw}$, podemos usar a fórmula quadrática (3) da Seção 1.6 para calcular $e^{iw}$:

$$e^{iw} = iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Já que usamos a fórmula quadrática, devemos ter em mente que a expressão $(1 - z^2)^{1/2}$ em (1) representa as *duas* raízes de $1 - z^2$. Por fim, resolvemos para $w$ usando o logaritmo complexo:

$$iw = \ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right] \quad \text{ou} \quad w = -i\ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right]. \tag{2}$$

Cada valor de $w$ obtido da segunda equação em (2) satisfaz a equação $\operatorname{sen} w = z$. Portanto, denominamos a função multivalente definida pela segunda equação em (2) **seno inverso**. Resumimos esta discussão na seguinte definição:

**Definição 4.4.1** Seno Inverso

A função multivalente $\operatorname{sen}^{-1} z$ definida por:

$$\operatorname{sen}^{-1} z = -i\ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right] \tag{3}$$

é denominada **seno inverso**.

Ocasionalmente também chamaremos o seno inverso de **arcsen** e denotaremos esta função por arcsen $z$. Fica claro de (3) que o seno inverso é multivalente, pois é definido em termos do logaritmo complexo $\ln z$. Vale a pena repetir que a expressão $(1 - z^2)^{1/2}$ em (3) representa as duas raízes quadradas de $1 - z^2$.

**EXEMPLO 1 Valores de Seno Inverso**

Determinemos todos os valores de $\text{sen}^{-1}\sqrt{5}$.

**Solução** Fazendo $z = \sqrt{5}$ em (3), obtemos:

$$\begin{aligned}\text{sen}^{-1}\sqrt{5} &= -i\ln\left[i\sqrt{5} + \left(1 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right)^{1/2}\right] \\ &= -i\ln\left[i\sqrt{5} + (-4)^{1/2}\right].\end{aligned}$$

Usando (4) da Seção 1.4, as duas raízes quadradas $(-4)^{1/2}$ de $-4$ são calculadas como $\pm 2i$, de modo que

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = -i\ln\left[i\sqrt{5} \pm 2i\right] = -i\ln\left[\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i\right].$$

Como $(\sqrt{5} \pm 2)\,i$ é um número imaginário puro com parte imaginária positiva (tanto $\sqrt{5} + 2$ como $\sqrt{5} - 2$ são positivos), temos $|(\sqrt{5} \pm 2)\,i| = \sqrt{5} \pm 2$ e $\arg\,[(\sqrt{5} \pm 2)\,i] = \pi/2$. Assim, de (11) da Seção 4.1, temos

$$\ln\left[\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i\right] = \log_e\left(\sqrt{5} \pm 2\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Esta expressão pode ser simplificada se observarmos que

$$\log_e\left(\sqrt{5} - 2\right) = \log_e\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \log_e 1 - \log_e\left(\sqrt{5}+2\right) = 0 - \log_e\left(\sqrt{5}+2\right),$$

de modo que $\log_e\left(\sqrt{5} \pm 2\right) = \pm\log_e\left(\sqrt{5}+2\right)$. Portanto,

$$\begin{aligned}-i\ln\left[\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i\right] &= -i\left[\log_e\left(\sqrt{5} \pm 2\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] \\ &= -i\left[\pm\log_e\left(\sqrt{5}+2\right) + i\frac{(4n+1)\pi}{2}\right],\end{aligned}$$

e

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = \frac{(4n+1)\pi}{2} \pm i\log_e\left(\sqrt{5}+2\right)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**Cosseno e Tangente Inversos** O procedimento usado para determinar o seno inverso pode ser facilmente modificado para resolver as equações $\cos w = z$ e $\tan w = z$. Isso leva à definição do cosseno inverso e da tangente inversa:

**Definição 4.4.2 Cosseno Inverso e Tangente Inversa**

A função multivalente $\cos^{-1}$ definida por:

$$\cos^{-1} z = -i\ln\left[z + i\left(1 - z^2\right)^{1/2}\right] \tag{4}$$

é denominada **cosseno inverso**. A função multivalente $\tan^{-1} z$ definida por:

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right) \tag{5}$$

é denominada **tangente inversa**.

As funções cosseno inverso e tangente inversa são multivalentes, pois são definidas em termos do logaritmo complexo $\ln z$. Como no caso do seno inverso, a expressão $(1 - z^2)^{1/2}$ em (4) representa as duas raízes quadradas do número complexo $1 - z^2$. Cada valor de $w = \cos^{-1} z$ satisfaz a equação $\cos w = z$ e, da mesma forma, cada valor de $w = \tan^{-1} z$ satisfaz a equação $\tan w = z$.

**Ramos e Analiticidade** Seno inverso e cosseno inverso são funções multivalentes que podem ser feitas unívocas com a especificação de um único valor da raiz quadrada usada na expressão $(1 - z^2)^{1/2}$ e de um

único valor do logaritmo complexo usado em (3) ou (4). A tangente inversa, por sua vez, pode ser feita unívoca com a especificação de um único valor para ln $z$. Por exemplo, podemos definir a função $f_1$ que dá um valor do seno inverso se usarmos a raiz quadrada principal e o valor principal do logaritmo complexo em (3). Se, digamos, $z = \sqrt{5}$, a raiz quadrada principal de $1 - (\sqrt{5})^2 = -4$ é $2i$, e

$$\text{Ln}\left(i\sqrt{5} + 2i\right) = \log_e\left(\sqrt{5} + 2\right) + \pi i/2.$$

Identificando estes valores em (3), obtemos:

$$f_1\left(\sqrt{5}\right) = \frac{\pi}{2} - i\log_e\left(\sqrt{5} + 2\right) \approx 1{,}5708 - 1{,}4436i.$$

Assim, vemos que o valor da função $f_1$ em $z = \sqrt{5}$ é o valor de $\text{sen}^{-1}\sqrt{5}$ associado a $n = 0$ e à raiz quadrada $2i$ no Exemplo 1.

Um ramo de uma função trigonométrica inversa multivalente pode ser obtido com a escolha de um ramo da função raiz quadrada e de um ramo do logaritmo complexo. A determinação do domínio de um ramo definido desta forma pode ser muito trabalhosa. Como este é um texto introdutório, não prosseguiremos na discussão desse tema. No entanto, as derivadas de ramos de funções trigonométricas inversas são calculadas com facilidade por meio de diferenciação implícita. Para entender isso, suponhamos que $f_1$ seja um ramo da função multivalente $F(z) = \text{sen}^{-1} z$. Se $w = f_1(z)$, sabemos que $z = \text{sen } w$. Diferenciando os dois lados desta última equação em relação a $z$ e aplicando a regra da cadeia (6) da Seção 3.1, obtemos:

$$1 = \cos w \cdot \frac{dw}{dz} \quad \text{ou} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\cos w}. \tag{6}$$

Agora, da identidade trigonométrica $\cos^2 w + \text{sen}^2 w = 1$ temos $\cos w = (1 - \text{sen}^2 w)^{1/2}$ e, como $z = \text{sen } w$, isso pode ser reescrito como $\cos w = (1 - z^2)^{1/2}$. Portanto, após substituir esta expressão para $\cos w$ em (6), obtemos o seguinte resultado:

$$f_1'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}.$$

Se o ramo $f_1$ for denotado como $\text{sen}^{-1} z$, esta fórmula pode ser posta de uma forma mais simples:

$$\frac{d}{dz}\,\text{sen}^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}.$$

Devemos, contudo, ter o cuidado de usar o mesmo ramo da função raiz quadrada que definiu $\text{sen}^{-1} z$ quando calcularmos valores de sua derivada.

De modo análogo, derivadas de ramos do cosseno inverso e da tangente inversa podem ser determinadas. Nas fórmulas a seguir, os símbolos $\text{sen}^{-1} z$, $\cos^{-1} z$ e $\tan^{-1} z$ representam ramos das correspondentes funções multivalentes. Essas fórmulas para as derivadas se aplicam apenas nos domínios destes ramos.

### *Derivadas de Ramos de $\text{sen}^{-1}z$, $\cos^{-1} z$ e $\tan^{-1} z$*

$$\frac{d}{dz}\text{sen}^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}} \tag{7}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2} \tag{9}$$

Ao calcular o valor de uma derivada usando (7) ou (8), devemos usar a mesma raiz quadrada usada para definir o ramo. Essas fórmulas são similares àquelas para as derivadas das correspondentes funções trigonométricas inversas reais. A diferença entre as fórmulas reais e complexas reside na necessária escolha específica de um ramo da função raiz quadrada para (7) e (8).

**EXEMPLO 2 Derivada de um Ramo do Seno Inverso**

Seja $\text{sen}^{-1} z$ a representação do ramo do seno inverso obtido com o emprego dos ramos principais da raiz quadrada e do logaritmo complexo, definidos em (7) da Seção 4.2 e (19) da Seção 4.1, respectivamente. Determinemos a derivada desse ramo em $z = i$.

**Solução** Notemos que este ramo é diferenciável em $z = i$, pois $1 - i^2 = 2$ não está no corte de ramo do ramo principal da função raiz quadrada, e $i(i) + (1 - i^2)^{1/2} = -1 + \sqrt{2}$ não está no corte de ramo do ramo principal do logaritmo complexo. Assim, de (7), temos:

$$\frac{d}{dz}\,\text{sen}^{-1} z\bigg|_{z=i} = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{(1-i^2)^{1/2}} = \frac{1}{2^{1/2}}.$$

Usando o ramo principal da raiz quadrada, obtemos $2^{1/2} = \sqrt{2}$. Logo, o valor da derivada é $1/\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Vale observar que o ramo do seno inverso usado no Exemplo 2 não é definido em, digamos, $z = \sqrt{5}$, pois o ponto $1 - (\sqrt{5})^2 = -4$ está no corte de ramo do ramo principal da raiz quadrada. Podemos especificar um ramo diferente da raiz quadrada que seja definido neste ponto. Por exemplo, consideremos o ramo da função raiz quadrada $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $0 < \theta < 2\pi$. Como $-4 = 4e^{i\pi}$, temos $f_2(-4) = 2i$. Se definirmos $\text{sen}^{-1} z$ como o ramo do seno inverso obtido com o uso do ramo $f_2$ da raiz quadrada e do ramo principal do logaritmo complexo, então:

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\pi - i\log_e\left(\sqrt{5}+2\right) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz}\,\text{sen}^{-1} z\bigg|_{z=\sqrt{5}} = -\frac{i}{2}.$$

**Funções Hiperbólicas Inversas** A discussão anterior de funções trigonométricas inversas pode ser repetida para funções hiperbólicas. Isto leva à definição das funções hiperbólicas inversas listadas a seguir. Mais uma vez, essas inversas são definidas em termos da exponencial complexa.

**Definição 4.4.3 Seno, Cosseno e Tangente Hiperbólicos Inversos**

As funções multivalentes $\text{senh}^{-1}$, $\cosh^{-1}$ e $\tanh^{-1}$, definidas por

$$\text{senh}^{-1} z = \ln\left[z + \left(z^2+1\right)^{1/2}\right], \tag{10}$$

$$\cosh^{-1} z = \ln\left[z + \left(z^2-1\right)^{1/2}\right], \tag{11}$$

e

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{12}$$

são denominadas **seno hiperbólico inverso**, **cosseno hiperbólico inverso** e **tangente hiperbólica inversa**, respectivamente.

As expressões (10)–(12) na Definição 4.4.3 nos permitem resolver equações envolvendo funções hiperbólicas complexas. Em particular, se $w = \text{senh}^{-1} z$, $\text{senh}\, w = z$; se $w = \cosh^{-1} z$, $\cosh w = z$; e se $w = \tanh^{-1} z$, $\tanh w = z$.

Ramos de funções hiperbólicas inversas são definidos com a escolha de ramos da raiz quadrada e do logaritmo complexo ou, no caso da tangente hiperbólica inversa, apenas com a escolha de um ramo do logaritmo complexo. A derivada de um ramo pode ser determinada por meio de diferenciação implícita. O resultado a seguir dá fórmulas para derivadas de ramos de funções hiperbólicas inversas. Nessas fórmulas, os símbolos $\text{senh}^{-1} z$, $\cosh^{-1} z$ e $\tanh^{-1} z$ representam ramos das correspondentes funções hiperbólicas inversas multivalentes.

### *Derivadas de Ramos de senh$^{-1}$ z, cosh$^{-1}$ z e tanh$^{-1}$ z*

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh}^{-1} z = \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2} \tag{15}$$

Como no caso de funções trigonométricas inversas, no cálculo de derivadas devemos ter o cuidado de manter a consistência no uso de ramos. As fórmulas (13)–(15) para derivadas de ramos de funções hiperbólicas inversas *complexas* são análogas às fórmulas para derivadas de funções hiperbólicas inversas *reais*, exceto pela necessária escolha de ramos em (13) e (14).

---

EXEMPLO 3 **Cosseno Hiperbólico Inverso**

Seja $\cosh^{-1} z$ a representação do ramo do cosseno hiperbólico inverso obtido com o uso do ramo $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $0 < \theta < 2\pi$, da raiz quadrada e do ramo principal do logaritmo complexo. Determinemos os seguintes valores:

(a) $\cosh^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\left.\dfrac{d}{dz}\cosh^{-1} z\right|_{z=\sqrt{2}/2}$

**Solução** (a) Para calcular $\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, usemos (11) com $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e os ramos especificados da raiz quadrada e do logaritmo complexo. Quando com $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, temos $z^2 - 1 = -\frac{1}{2}$. Como $-\frac{1}{2}$ tem a forma exponencial $\frac{1}{2}e^{i\pi}$, a raiz quadrada dada pelo ramo $f_2$ é:

$$f_2\left(\frac{1}{2}e^{i\pi}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Portanto, o valor do ramo do cosseno inverso é dado por:

$$\cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\left[z + \left(z^2-1\right)^{1/2}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right],$$

onde devemos usar o valor do ramo principal do logaritmo complexo. Como $\left|\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right| = 1$ e $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right) = \frac{1}{4}\pi$, o ramo principal do logaritmo é $\log_e 1 + i(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{4}\pi i$. Desta forma,

$$\cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}i.$$

(b) De (14), temos

$$\left.\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z\right|_{z=\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\left[\left(\sqrt{2}/2\right)^2 - 1\right]^{1/2}} = \frac{1}{(-1/2)^{1/2}}.$$

Usando $f_2$ para determinar o valor da raiz quadrada nesta expressão, obtemos:

$$\left.\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z\right|_{z=\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}i/2} = -\sqrt{2}i.$$

❑

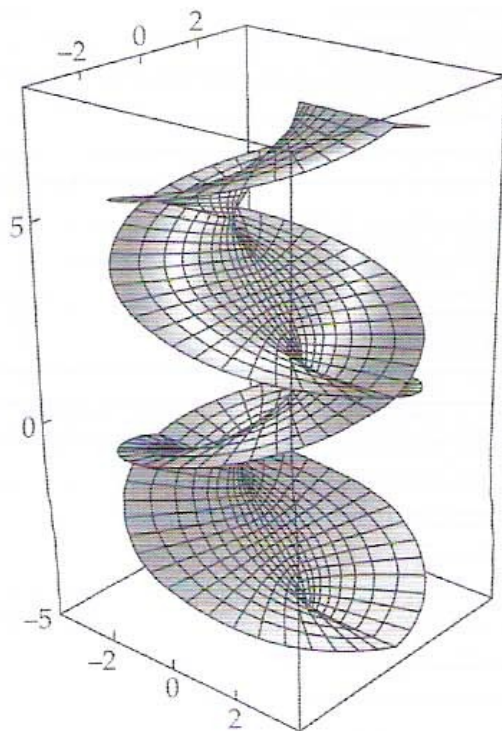



**Figura 4.4.1** Superfície de Riemann para $w = \text{sen}^{-1} z$

## Observações

A função multivalente $F(z) = \text{sen}^{-1} z$ pode ser visualizada com a superfície de Riemann construída para sen $z$ nas Observações da Seção 4.3 e mostrada na Figura 4.4.1. Para ver a imagem de um ponto $z_0$ sob a transformação multivalente $w = \text{sen}^{-1} z$, imaginemos que $z_0$ esteja no plano $xy$ na Figura 4.4.1. A seguir, consideremos todos os pontos na superfície de Riemann posicionados diretamente acima de $z_0$. Cada um desses pontos na superfície de Riemann corresponde a um único ponto em um dos quadrados $S_n$ descritos nas Observações da Seção 4.3. Assim, este conjunto infinito de pontos na superfície de Riemann representa as infinitas imagens de $z_0$ sob $w = \text{sen}^{-1} z$.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 4.4 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–10, determine todos os valores da grandeza especificada.

**1.** $\cos^{-1} i$

**2.** $\text{sen}^{-1} 1$

**3.** $\text{sen}^{-1} \sqrt{2}$

**4.** $\cos^{-1} \frac{5}{3}$

**5.** $\tan^{-1} 1$

**6.** $\tan^{-1} 2i$

**7.** $\text{senh}^{-1} i$

**8.** $\cosh^{-1} \frac{1}{2}$

**9.** $\tanh^{-1} (1 + 2i)$

**10.** $\tanh^{-1} (\sqrt{2}i)$

Nos Problemas 11–16, use o ramo especificado da função multivalente $z^{1/2}$ e o ramo principal do logaritmo complexo ln $z$ para (**a**) determinar o valor da função trigonométrica ou hiperbólica inversa no ponto dado e (**b**) calcular o valor da derivada da função no ponto dado.

**11.** $\text{sen}^{-1} z$, $z = \frac{1}{2}i$; use o ramo principal de $z^{1/2}$

**12.** $\cos^{-1} z$, $z = \frac{5}{3}$; use o ramo $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $0 < \theta < 2\pi$, de $z^{1/2}$

**13.** $\tan^{-1} z$, $z = 1 + i$

**14.** $\text{senh}^{-1} z$, $z = 0$; use o ramo principal de $z^{1/2}$

**15.** $\cosh^{-1} z$, $z = -i$; use o ramo $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $-2\pi < \theta < 0$ de $z^{1/2}$

**16.** $\tanh^{-1} z$, $z = 3i$

### Foco em Conceitos

**17.** Modifique o procedimento usado para obter uma fórmula para arcsen e deduza a fórmula (4) para $\cos^{-1} z$.

**18.** Modifique o procedimento usado para obter uma fórmula para arcsen e deduza a fórmula (10) para $\text{senh}^{-1} z$.

**19.** Use diferenciação implícita e deduza a fórmula (18) para a derivada de um ramo do cosseno inverso.

**20.** Use diferenciação implícita e deduza a fórmula (12) para a derivada de um ramo da tangente hiperbólica inversa.

**21.** (**a**) Prove que sen $z$ é biunívoca no domínio definido pelas desigualdades $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$.
(**b**) Que ramos da raiz quadrada e do logaritmo complexo devem ser usados para que a transformação $w = \text{sen}^{-1} z$ mapeie o semiplano $\text{Im}(z) > 0$ na região $-\pi/2 < u < \pi/2$, $v > 0$, ou seja, para que $w = \text{sen}^{-1} z$ seja a transformação inversa da transformação na parte (a)?

**22.** Prove as seguintes identidades:
(**a**) $\text{sen}^{-1} \left[(1 - z^2)^{1/2}\right] = \cos^{-1} (\pm z)$

(**b**) $\text{sen}^{-1} z + \cos^{-1} z = \frac{1}{2}(4n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

## 4.5 Aplicações

Na Seção 3.4 vimos o importante papel de funções harmônicas nas áreas de eletrostática, fluxo fluido, gravitação e fluxo de calor. É comum que para solucionar um problema aplicado em uma destas áreas precisemos determinar uma função $\phi(x, y)$ que seja harmônica em um domínio $D$ e que assuma valores específicos na fronteira de $D$. Nesta seção veremos que a transformação por funções analíticas pode, com frequência, ajudar a resolver este tipo de problema.

Figura 4.5.1 Problemas de Dirichlet

**Problemas de Dirichlet** Suponhamos que $D$ seja um domínio no plano complexo. Recordemos, da Seção 3.3, que uma função de valor real $\phi$ de duas variáveis reais $x$ e $y$ é denominada harmônica em $D$ se tiver derivadas parciais de primeira e de segunda ordens contínuas e satisfizer a equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$,

ou
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Na Seção 3.4 definimos um **problema de Dirichlet** como o problema de determinar uma função $\phi(x, y)$ que seja harmônica em $D$ e assuma valores específicos na fronteira de $D$ (Figura 4.5.1). Os valores especificados da função $\phi$ na fronteira de $D$ são chamados de **condições de contorno** ou **condições de fronteira**. Por exemplo, consideremos o problema

$$\textit{Resolver:}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad -1 < x < 1, -\infty < y < \infty$$

$$\textit{Sujeita a:}\ \phi(-1, y) = k_0, \quad \phi(1, y) = k_1, \quad -\infty < y < \infty,$$

Figura 4.5.2 Problema de Dirichlet do Exemplo 2 da Seção 3.4

onde $k_0$ e $k_1$ são constantes reais. Este é um problema de Dirichlet no domínio $D$ limitado pelas retas verticais $x = -1$ e $x = 1$ (Figura 4.5.2). No Exemplo 2 da Seção 3.4 usamos técnicas elementares de equações diferenciais para calcular a solução deste particular problema de Dirichlet. Sugerimos a releitura deste exemplo da Seção 3.4 para recordar como a solução foi calculada.

$$\phi(x, y) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2} \tag{2}$$

**Funções Harmônicas e Transformações Analíticas** Em parte, a solução do problema de Dirichlet representado na Figura 4.5.2 foi relativamente fácil devido à forma simples do domínio $D$. As técnicas usadas para resolver este tipo de problema de Dirichlet em geral não se aplicam a problemas de Dirichlet em domínios mais complicados. Uma função $f$ que seja analítica em $D$ e que mapeie $D$ em um domínio $D'$ é denominada **transformação analítica** de $D$ em $D'$. É comum que um problema de Dirichlet em um domínio complicado $D$ seja resolvido com a determinação de uma transformação analítica de $D$ em um domínio $D'$, no qual a solução do associado ou *transformado* problema de Dirichlet é mais fácil. Esta técnica, apresentada brevemente nesta seção, será discutida em detalhes no Capítulo 7. A chave para este método de solução de problemas de Dirichlet é o teorema enunciado a seguir, que mostra que a equação de Laplace é invariante sob uma transformação analítica.

**Teorema 4.5.1** ***Função Harmônica sob uma Transformação Analítica***

*Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma transformação analítica de um domínio $D$, no plano $z$, em um domínio $D'$, no plano $w$. Se a função $\Phi(u, v)$ for harmônica em $D'$, então a função $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ é harmônica em $D$.*

**Prova** Para provar que a função $\phi(x, y)$ é harmônica em $D$, devemos mostrar que $\phi(x, y)$ satisfaz a equa-ção de Laplace (1) em $D$. Iniciamos determinando as derivadas parciais de $\phi(x, y)$ em relação a $x$. Como

$$\phi(x,y) = \Phi(u(x,y), v(x,y)),$$

a regra da cadeia de diferenciação parcial fornece:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Uma segunda aplicação da regra da cadeia combinada com a regra para o produto nos fornece a derivada parcial de segunda ordem em relação a $x$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3}$$

De modo similar, determinamos a derivada parcial de segunda ordem em relação a $y$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{4}$$

Somando as equações (3) e (4), obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = {} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ & + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Como $f$ é uma função analítica em $D$, sabemos, do Teorema 3.2.1, que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas por $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Além disso, do Teorema 3.3.1 temos que $u$ e $v$ são conjugadas harmônicas em $D$, de modo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Com isso, (5) passa a:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \\ &= \nabla^2 \Phi \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Usando (9) da Seção 3.2, vemos que $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$, o que permite simplificar $\nabla^2 \phi$ como

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \Phi \cdot |f'(z)|^2 \tag{6}$$

Como $\Phi(u, v)$ é harmônica em $D'$, $\nabla^2 \Phi = 0$ e (6) passa a

$$\nabla^2 \phi = 0 \cdot |f'(z)|^2 = 0. \tag{7}$$

Por fim, de (7), concluímos que $\phi(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace em $D$. Portanto, esta função é harmônica em $D$.

**Um Método para Solução de Problemas de Dirichlet** A seguir, apresentaremos um método para solução de problemas de Dirichlet usando o Teorema 4.5.1. Seja $D$ um domínio cuja fronteira consiste nas curvas $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$. Suponhamos que desejemos determinar uma função $\phi(x, y)$ que seja harmônica em $D$ e assuma os valores $k_1$, $k_2$, .., $k_n$ nas curvas de fronteira $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$, respectivamente. O método de solução do problema é constituído dos seguintes quatro passos:

## *Passos para Solucionar um Problema de Dirichlet*

1. *Determinar uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que mapeie o domínio $D$, no plano $z$, em um domínio mais simples $D'$, no plano $w$, e que mapeie as curvas de fronteira $C_1, C_2, \ldots, C_n$ nas curvas $C', C_2', \ldots, C_n'$, respectivamente.*
2. *Transformar as condições de contorno em $C_1, C_2, \ldots, C_n$ em condições de contorno em $C', C_2', \ldots, C_n'$.*
3. *Resolver este novo (e mais simples) problema de Dirichlet em $D'$ e obter uma função harmônica $\Phi(u, v)$.*
4. *Substituir as variáveis $u$ e $v$ em $\Phi(u, v)$ pelas partes real e imaginária $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de $f$. Segundo o Teorema 4.5.1, a função $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ é uma solução do problema de Dirichlet em $D$.*

Ilustramos os princípios básicos desses passos na Figura 4.5.3.

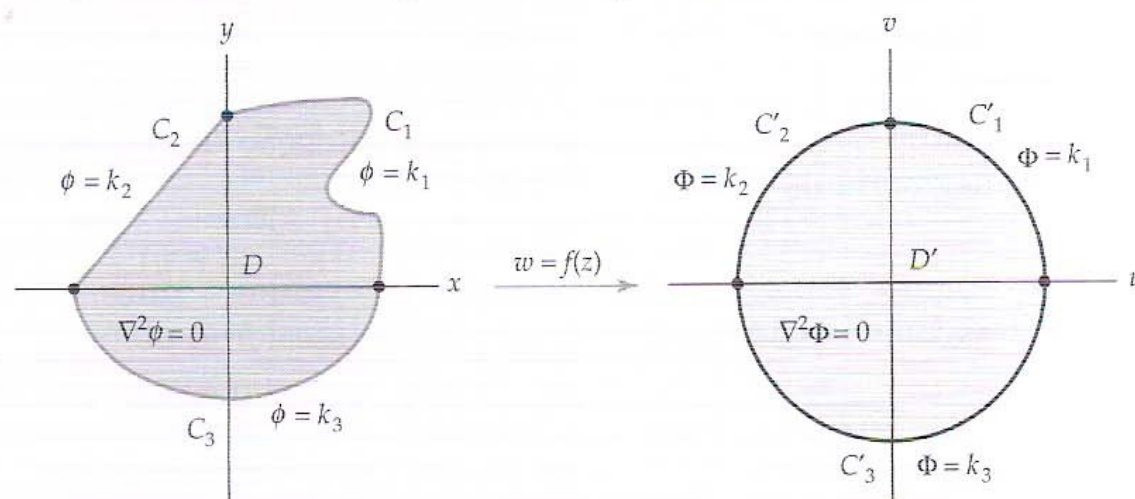



**Figura 4.5.3** Transformação de um problema de Dirichlet

---

### EXEMPLO 1 Uso de Transformações na Solução de um Problema de Dirichlet

Seja $D$ o domínio no plano $z$ limitado pelas retas $y = x$ e $y = x + 2$ e mostrado em cinza na Figura 4.5.4. Determinemos uma função $\phi(x, y)$ que seja harmônica em $D$ e satisfaça as condições de contorno $\phi(x, x + 2) = -2$ e $\phi(x, x) = 3$.

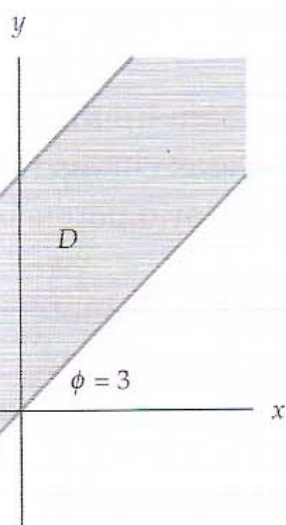



**Figura 4.5.4** Figura para o Exemplo 1

**Solução** Resolveremos este problema com os quatro passos listados anteriormente.

**Passo 1** Uma inspeção do domínio $D$ na Figura 4.5.4 sugere que tomemos $D'$ como sendo um domínio limitado pelas retas $u = -1$ e $u = 1$, no qual uma solução do associado problema de Dirichlet é dada em (2).

O primeiro passo consiste em determinar uma transformação analítica de $D$ em $D'$. Para isso, primeiro aplicamos uma rotação de $\pi/4$ radianos no sentido trigonométrico em torno da origem. Sob essa rotação, as retas de fronteira $y = x + 2$ e $y = x$ são mapeadas nas retas verticais $u = -\sqrt{2}$ e $u = 0$, respectivamente. Por fim, transladamos esta imagem de 1 e obtemos um domínio limitado pelas retas $u = 1$ e $u = -1$, como desejado. Recordemos, da Seção 2.3, que a rotação de $\pi/4$ radianos em torno da origem é dada pela transformação $R(z) = e^{i\pi/4}$; a dilatação de $\sqrt{2}$ é dada por $M(z) = \sqrt{2}z$; a translação de 1 é dada pela transformação $T(z) = z + 1$. Portanto, o domínio $D$ é mapeado no domínio $D'$ pela composição

$$f(z) = T(M(R(z))) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + 1 = (1 + i)z + 1.$$

Como a função $f$ é linear, é inteira; com isso, completamos o Passo 1.

**Passo 2** Transformamos as condições de contorno em $D$ em condições de contorno em $D'$. Para isso, devemos determinar as imagens sob $w = f(z)$ das retas de fronteira de $D$, $y = x$ e $y = x + 2$. Substituindo o símbolo $z$ por $x + iy$, expressamos a transformação $w = (1 + i)z + 1$ como:

$$w = (1 + i)(x + iy) + 1 = x - y + 1 + (x + y)i. \tag{8}$$

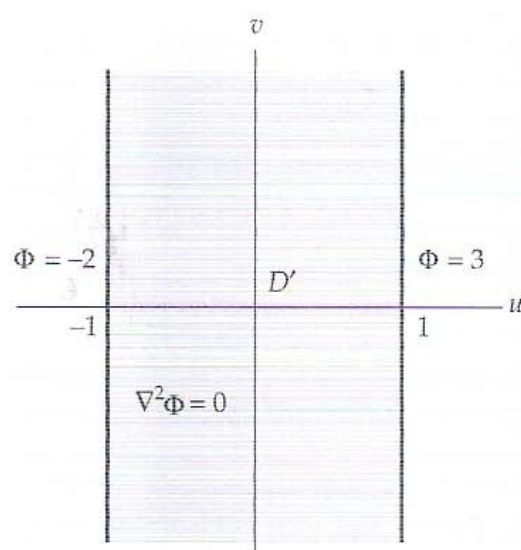



**Figura 4.5.5** Problema de Dirichlet transformado para o Exemplo 1

De (8) concluímos que a imagem da reta de fronteira $y = x + 2$ é o conjunto de pontos:

$$w = u + iv = x - (x+2) + 1 + (x + (x+2))\,i = -1 + 2(x+1)i$$

que é a reta $u = -1$. De modo similar, também concluímos que a imagem da reta de fronteira $y = x$ é o conjunto de pontos:

$$w = u + iv = x - (x) + 1 + (x + (x))\,i = 1 + 2xi$$

que é a reta $u = 1$. Portanto, a condição de contorno $\phi(x,\ x+2) = -2$ é transformada na condição de contorno $\Phi(-1,\ v) = -2$ e a condição de contorno $\phi(x,\ x) = 3$ é transformada na condição de contorno $\Phi(1,\ v) = 3$ (Figura 4.5.5).

**Passo 3** Uma solução do problema de Dirichlet em $D'$ é dada por (2), com $x$ e $y$ substituídos por $u$ e $v$, e com $k_0 = -2$ e $k_1 = 3$:

$$\Phi(u,v) = \frac{3-(-2)}{2}u + \frac{-2+3}{2} = \frac{5}{2}u + \frac{1}{2}.$$

**Passo 4** O último passo na solução do problema consiste em substituir as variáveis $u$ e $v$ em $\Phi$ pelas partes real e imaginária de $f$, respectivamente, para obtenção da desejada solução $\phi$. De (8), vemos que as partes real e imaginária de $f$ são:

$$u(x,y) = x - y + 1 \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = x + y,$$

respectivamente. Com isso, a função:

$$\phi(x,y) = \Phi(u(x,y), v(x,y)) = \frac{5}{2}(x - y + 1) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + 3 \qquad (9)$$

é a solução do problema de Dirichlet em $D$. Podemos comprovar, por cálculo direto, que a função $\phi$ dada em (9) satisfaz a equação de Laplace e as condições de contorno $\phi(x,\ x) = 3$ e $\phi(x,\ x+2) = -2$.

Na Seção 3.4 vimos que se $\phi$ for harmônica em um domínio $D$ e se $\psi$ for uma conjugada harmônica de $\phi$ em $D$, a **função potencial complexo $\boldsymbol{\Omega}(z)$**, dada por:

$$\boldsymbol{\Omega}(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

é uma função analítica em $D$. As curvas de nível de $\phi$ e $\psi$ formam uma família ortogonal de curvas, como definido na Seção 3.4, e o significado físico dessas curvas foi resumido na Tabela 3.4.1. Por exemplo, se a função $\phi$ do Exemplo 1 representar o potencial eletrostático entre duas placas condutoras infinitas, as curvas de nível $\phi(x,y) = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + 3 = c_1$ representam curvas equipotenciais. Na Figura 4.5.6 essas curvas equipotenciais, que são retas com inclinação 1, são mostradas em cinza.

**Figura 4.5.6** Curvas equipotenciais e linhas de força para o Exemplo 1

Um cálculo simples fornece uma conjugada harmônica $\Psi\ (u,\ v) = \frac{5}{2}v$ de $\Phi\ (u,\ v) = \frac{5}{2}u + \frac{1}{2}$ e permite formar a função potencial complexo $\boldsymbol{\Omega}(w) = \frac{5}{2}w + \frac{1}{2}$ para o problema de Dirichlet em $D'$ no Exemplo 1. Com isso, uma função potencial complexo para o problema de Dirichlet em $D$ é obtida com a substituição do símbolo $w$ pela transformação analítica $w = (1+i)z + 1$:

$$\boldsymbol{\Omega}(z) = \frac{5}{2}\left[(1+i)z + 1\right] + \frac{1}{2} = \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\right)z + 3.$$

Portanto, uma conjugada harmônica de $\phi$ é $\psi(x,y) = \text{Im}(\boldsymbol{\Omega}(z)) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y$. Caso $\phi$ seja o potencial eletrostático, as curvas de nível de $\psi(x,y) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y = c_2$ representam linhas de força. Na Figura 4.5.6 essas linhas de força, que são segmentos de reta com inclinação $-1$, são mostradas em preto.

O método usado no Exemplo 1 pode ser generalizado para solucionar um problema de Dirichlet em qualquer domínio $D$ limitado por duas retas paralelas. A chave para resolver problemas como este reside em encontrar uma função linear apropriada que mapeie as retas de fronteira de $D$ em retas de fronteira do domínio mostrado na Figura 4.5.2 (Problemas 1–4 do Conjunto de Exercícios 4.5).

**Problemas de Dirichlet em um Semiplano** Seja $D$ o semiplano superior $y > 0$, e sejam $x_1 <$ $x_2 < \ldots < x_n$ $n$ pontos distintos no eixo real (que é a fronteira de $D$). Em muitas aplicações é útil conhecer

Figura 4.5.7 Um problema de Dirichlet no semiplano $y > 0$

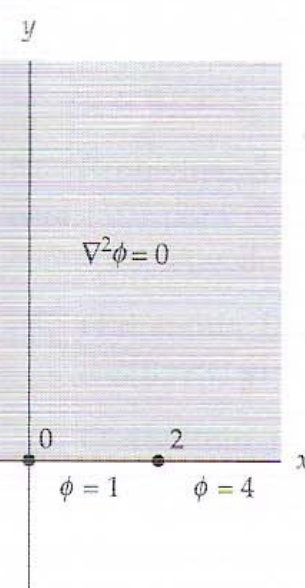



Figura 4.5.8 Um problema de Dirichlet no semiplano $y > 0$

uma solução $\phi$ do problema de Dirichlet em $D$ que satisfaça as condições de contorno $\phi(x, 0) = k_0$, para $x < x_1$, $\phi(x, 0) = k_1$, para $x_1 < x < x_2$, $\phi(x, 0) = k_2$, para $x_2 < x < x_3$, ..., $\phi(x, 0) = k_n$, para $x_n < x$ (Figura 4.5.7). Se $z = x + iy$, uma solução para este problema de Dirichlet é dada por:

$$\phi(x, y) = k_n + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1} - k_j)\,\mathrm{Arg}\,(z - x_j). \tag{10}$$

A dedução desta solução será discutida na Seção 7.4. Como uma aplicação de (10), consideremos o seguinte problema de Dirichlet (Figura 4.5.8):

$$\textit{Resolver: } \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \ -\infty < x < \infty, \ y > 0.$$

$$\textit{Sujeita a: } \phi(x, 0) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 4, & 2 < x < \infty. \end{cases}$$

Uma solução para este problema é dada por (10), com $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $k_0 = -1$ e $k_2 = 4$:

$$\phi(x, y) = 4 - \frac{2}{\pi}\mathrm{Arg}\,(z) - \frac{3}{\pi}\mathrm{Arg}\,(z - 2)\,. \tag{11}$$

A seguir, comprovaremos por cálculo direto que a função $\phi(x, y)$ em (11) é uma solução do problema de Dirichlet. Para comprovar que $\phi$ é harmônica no domínio $y > 0$, notamos que $\phi$ é a parte real da função

$$\Omega(z) = 4 + (2i/\pi)\mathrm{Ln}(z) + (3i/\pi)\mathrm{Ln}(z - 2).$$

Como $\Omega$ é analítica no domínio $y > 0$, $\phi$ é harmônica no domínio $y > 0$. A seguir, comprovaremos que $\phi$ satisfaz as condições de contorno mostradas na Figura 4.5.8. Se $-\infty < x < 0$ e $y = 0$, $z = x + iy$ está no eixo real negativo, de modo que $\mathrm{Arg}(z) = \pi$. Neste caso, $z - 2$ também está no eixo real negativo e, portanto, $\mathrm{Arg}(z - 2) = \pi$. Substituindo esses valores em (11), obtemos:

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi}\pi - \frac{3}{\pi}\pi = -1.$$

Se $0 < x < 2$ e $y = 0$, $z$ está no eixo real positivo e $z - 2$ no eixo real negativo. Assim $\mathrm{Arg}(z) = 0$ e $\mathrm{Arg}(z - 2) = \pi$. Substituindo estes valores em (11), obtemos:

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi}0 - \frac{3}{\pi}\pi = 1.$$

Por fim, se $2 < x < \infty$ e $y = 0$, $z$ e $z - 2$ estão no eixo real positivo, de modo que $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z - 2) = 0$. Logo:

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi}0 - \frac{3}{\pi}0 = 4.$$

Comprovamos, então, que a função $\phi$ em (11) é, de fato, uma solução do problema de Dirichlet mostrado na Figura 4.5.8.

---

EXEMPLO 2 **Uma Aplicação em Fluxo de Calor**

Determinemos a temperatura de estado estacionário $\phi(x, y)$ na fita vertical semi-infinita mostrada em cor na Figura 4.5.9. Para isso, devemos solucionar o problema de Dirichlet no domínio $D$ definido por $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$, com as seguintes condições de contorno:

$$\phi\,(-\pi/2, y) = 40, \quad \phi\,(\pi/2, y) = 10, \quad y > 0$$

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 20, & -\pi/2 < x < 0 \\ 50, & 0 < x < \pi/2\,. \end{cases}$$

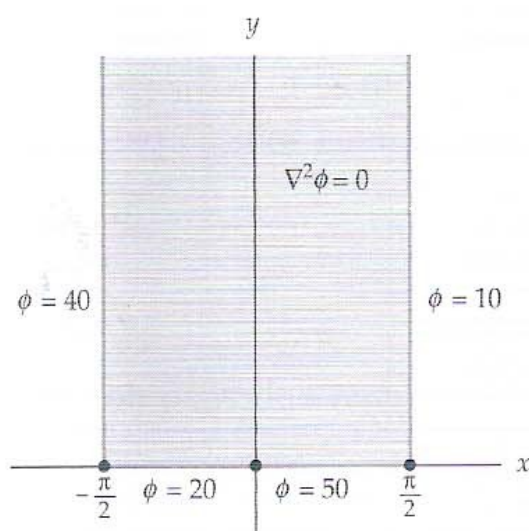



**Figura 4.5.9** Figura para o Exemplo 2

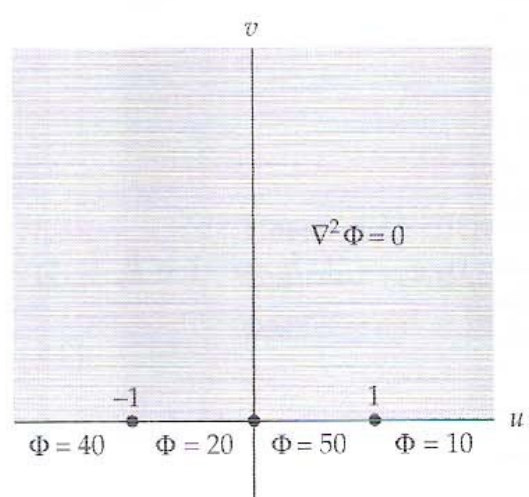



**Figura 4.5.10** Problema de Dirichlet transformado para o Exemplo 2

**Solução** Da Seção 3.4, a temperatura de estado estacionário $\phi$ deve satisfazer a equação de Laplace (1) em $D$. Procederemos como no Exemplo 1.

**Passo 1** Na Seção 4.3 vimos que a transformação $w = \operatorname{sen} z$ mapeava o domínio $D$ no semiplano superior $D'$ dado por $v > 0$ (Exemplo 3 da Seção 4.3). Como sen $z$ é uma função inteira, $w = \operatorname{sen} z$ é uma transformação analítica de $D$ em $D'$.

**Passo 2** Do Exemplo 3 da Seção 4.3, verificamos que $w = \operatorname{sen} z$ mapeia:

($i$) a semirreta $x = -\pi/2$, $y > 0$, na semirreta $v = 0$, $u < -1$,
($ii$) o segmento $y = 0$, $-\pi/2 < x < 0$, no segmento $v = 0$, $-1 < u < 0$,
($iii$) o segmento $y = 0$, $0 < x < \pi/2$, no segmento $v = 0$, $0 < u < 1$,
($iv$) a semirreta $x = \pi/2$, $y > 0$, na semirreta $v = 0$, $u > 1$.

Isso transforma o problema de Dirichlet no domínio $D$, mostrado em cinza na Figura 4.5.9, no problema de Dirichlet no semiplano $v > 0$, mostrado em cinza na Figura 4.5.10. Ou seja, o problema de Dirichlet transformado é:

$$\textit{Resolver: } \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = 0$$

$$\textit{Sujeita a: } \phi(u,0) = \begin{cases} 40, & -\infty < u < -1 \\ 20, & -1 < u < 0 \\ 50, & 0 < u < 1 \\ 10, & 1 < u < \infty\,. \end{cases}$$

**Passo 3** Uma solução do problema de Dirichlet transformado do Passo 2 é dada por (10), com os símbolos $x$, $y$ e $z$ substituídos por $u$, $v$ e $w$, respectivamente. Substituindo $k_0 = 40$, $k_1 = 20$, $k_2 = 50$, $k_3 = 10$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$ e $u_3 = 1$, obtemos:

$$\Phi(u,v) = 10 + \frac{20}{\pi}\operatorname{Arg}(w+1) - \frac{30}{\pi}\operatorname{Arg}(w) + \frac{40}{\pi}\operatorname{Arg}(w-1)\,. \qquad (12)$$

**Passo 4** Uma solução $\phi$ do problema de Dirichlet no domínio $D$ é obtida com a substituição das variáveis $u$ e $v$ em (12) pelas partes real e imaginária da função analítica $f(z) = \operatorname{sen} z$. Isto é equivalente a substituir $w$ por $z$ em (12):

$$\phi(x,y) = 10 + \frac{20}{\pi}\operatorname{Arg}(\operatorname{sen} z + 1) - \frac{30}{\pi}\operatorname{Arg}(\operatorname{sen} z) + \frac{40}{\pi}\operatorname{Arg}(\operatorname{sen} z - 1)\,. \qquad (13)$$

Caso seja necessário, a função $\phi$ pode ser escrita em termos de $x$ e $y$, desde que sejamos cuidadosos no uso da função arco tangente real. Em particular, *se os valores da função arco tangente forem escolhidos entre $0$ e $\pi$*, a função $\phi$ em (13) pode ser escrita como:

$$\phi(x,y) = 10 + \frac{20}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen} x \cosh y + 1}\right) - \frac{30}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen} x \cosh y}\right) + \frac{40}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \cosh y - 1}\right).$$

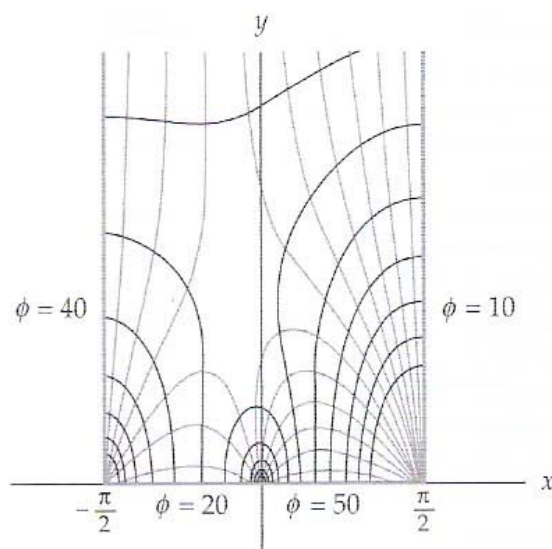



**Figura 4.5.11** Isotérmicas e linhas de fluxo para o Exemplo 2

Vale observar que a função

$$\mathbf{\Omega}(z) = 10 - \frac{20i}{\pi}\operatorname{Ln}(\operatorname{sen} z + 1) + \frac{30i}{\pi}\operatorname{Ln}(\operatorname{sen} z) - \frac{40i}{\pi}\operatorname{Ln}(\operatorname{sen} z - 1)$$

é analítica no domínio $D$ definido por $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$, e mostrado em cinza na Figura 4.5.9. Como a parte real de $\mathbf{\Omega}(z)$ é a função $\phi$ dada por (13), a parte imaginária $\psi$ de $\mathbf{\Omega}(z)$ é a conjugada harmônica de $\phi$. Portanto, $\mathbf{\Omega}(z)$ é uma função potencial complexo da função $\phi$ do Exemplo 2. Em problemas de fluxo de calor, as curvas de nível da temperatura de estado estacionário $\phi$ são denominadas isotérmicas, e as curvas de nível da conjugada harmônica $\psi$ são denominadas linhas de fluxo. Na Figura 4.5.11, ilustramos as curvas de nível para o problema de fluxo

calor do Exemplo 2. As isotérmicas são as curvas mostradas em cinza, e as linhas de fluxo são as curvas em preto.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 4.5 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–4, (**a**) use uma transformação linear e (2) para determinar o potencial eletrostático $\phi(x, y)$ no domínio $D$ que satisfaz as dadas condições de contorno, (**b**) determine uma função potencial complexo $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$, e (**c**) esboce as curvas equipotenciais e as linhas de força.

**1.** O domínio $D$ é limitado pelas retas $x = 2$ e $x = 7$; as condições de contorno são: $\phi(2, y) = 3$ e $\phi(7, y) = -2$.

**2.** O domínio $D$ é limitado pelas retas $y = 0$ e $y = 3$; as condições de contorno são: $\phi(x, 0) = 1$ e $\phi(x, 3) = 2$.

**3.** O domínio $D$ é limitado pelas retas $y = \sqrt{3}x$ e $y = \sqrt{3}x + 4$; as condições de contorno são: $\phi\left(x, \sqrt{3}x\right) = 10$ e $\phi\left(x, \sqrt{3}x + 4\right) = 5$.

**4.** O domínio $D$ é limitado pelas retas $y = x + 2$ e $y = x + 4$; as condições de contorno são: $\phi(x, x + 2) = -4$ e $\phi(x, x + 4) = 5$.

Nos Problemas 5–8, (**a**) use a transformação analítica $w = \operatorname{sen} z$ e, se necessário, transformações lineares em conjunto com (10) para determinar a temperatura de estado estacionário $\phi(x, y)$ no domínio $D$ que satisfaz as condições de contorno especificadas, e (**b**) determine uma função potencial complexo $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

**5.** O domínio $D$ é definido por $\pi/2 < x < 3\pi/2$, $y > 0$; as condições de contorno são: $\phi(\pi/2, y) = 20$, $\phi(x, 0) = -13$ e $\phi(3\pi/2, y) = 12$.

**6.** O domínio $D$ é definido por $-3 < x < 3$, $y > 1$; as condições de contorno são: $\phi(-3, y) = 1$, $\phi(x, 1) = 3$ e $\phi(3, y) = 5$.

**7.** O domínio $D$ é definido por $-\pi/2 < y < \pi/2$, $x > 0$; as condições de contorno são: $\phi(x, -\pi/2) = 15$, $\phi(0, y) = 32$ e $\phi(x, \pi/2) = 23$.

**8.** O domínio $D$ é limitado pelas retas $y = x + 2$, $y = x - 2$ e $y = -x$. Em $D$, os pontos $z = x + iy$ satisfazem $y \geq -x$. As condições de contorno são: $\phi(x, x + 2) = 10$, $\phi(x, -x) = 7$ e $\phi(x, x - 2) = 5$.

### Foco em Conceitos

**9.** Use a transformação analítica $w = z^2$ e (10) para solucionar o problema de Dirichlet mostrado na Figura 4.5.12. Determine uma função potencial complexo $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

**10.** Use a transformação analítica $w = z^4$ e (10) para solucionar o problema de Dirichlet mostrado na Figura 4.5.13. Determine uma função potencial complexo $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

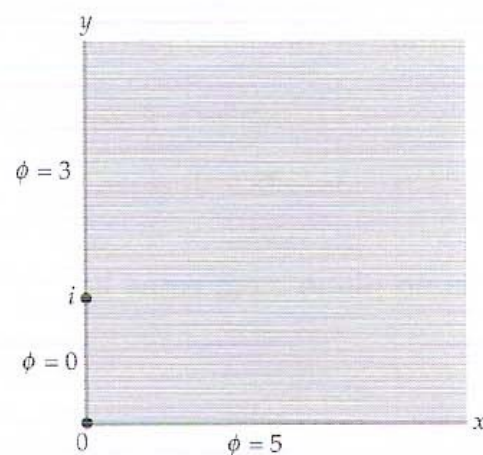



**Figura 4.5.12** Figura para o Problema 9

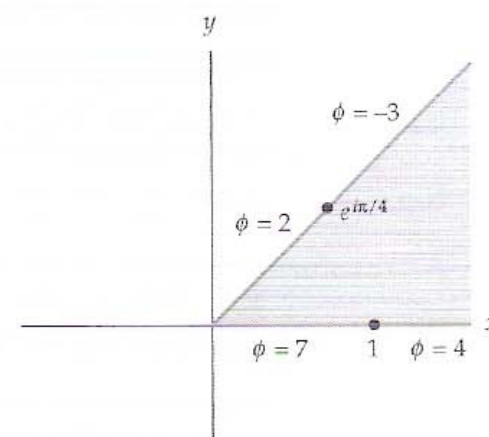



**Figura 4.5.13** Figura para o Problema 10

**11.** Use a transformação analítica $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ e (2) para solucionar o problema de Dirichlet mostrado na Figura 4.5.14. Determine uma função potencial complexo $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

**12.** Use a transformação analítica $w = z + \dfrac{1}{z}$ e (10) para solucionar o problema de Dirichlet mostrado na Figura 4.5.15. Determine uma função potencial complexo $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

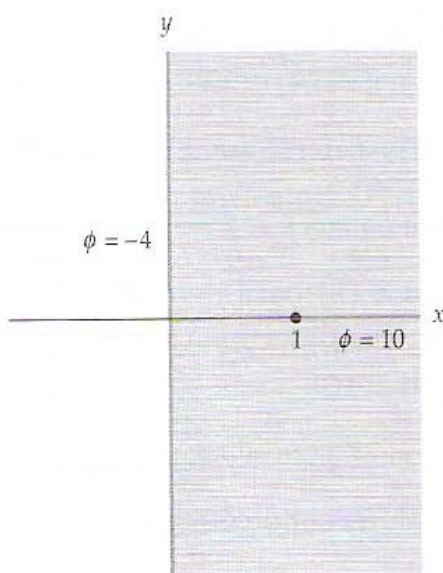



Figura 4.5.14 Figura para o Problema 11

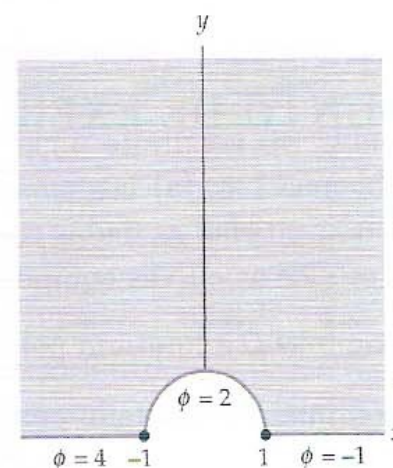



Figura 4.5.15 Figura para o Problema 12

## Tarefas para o Laboratório de Computação

Nos Problemas 13–16, use um SAC para desenhar as isotérmicas e linhas de fluxo de calor para o fluxo de calor es-pecificado.

**13.** Fluxo de calor do Problema 5.

**14.** Fluxo de calor do Problema 6.

**15.** Fluxo de calor do Problema 7.

**16.** Fluxo de calor do Problema 8.

Nos Problemas 17–20, use um SAC para desenhar as curvas de nível $\phi = c_1$ e $\psi = c_2$ da função potencial complexo $\Omega(z)$ especificada.

**17.** $\Omega(z)$ é a função potencial complexo do Problema 9.

**18.** $\Omega(z)$ é a função potencial complexo do Problema 10.

**19.** $\Omega(z)$ é a função potencial complexo do Problema 11.

**20.** $\Omega(z)$ é a função potencial complexo do Problema 12.

## Questionário de Revisão do Capítulo 4 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro)*

Nos Problemas 1–20, responda verdadeiro ou falso. Se a afirmação for falsa, justifique sua resposta explicando por que é falsa ou dê um contraexemplo; se a afirmação for verdadeira, justifique sua resposta provando a afirmação ou cite um resultado pertinente do capítulo.

**1.** Se $|e^z| = 1$, $z$ é um número imaginário puro.

**2.** $\text{Re}(e^z) = \cos y$.

**3.** A transformação $w = e^z$ mapeia retas verticais no plano $z$ em retas horizontais no plano $w$.

**4.** Há infinitas soluções $z$ para a equação $e^z = w$.

**5.** $\ln i = \frac{1}{2}\pi i$.

**6.** $\text{Im}(\ln z) = \arg(z)$.

**7.** Para todo complexo não nulo $z$, $e^{\text{Ln}\, z} = z$.

**8.** Se $w_1$ e $w_2$ forem dois valores de $\ln z$, $\text{Re}(w_1) = \text{Re}(w_2)$.

**9.** $\text{Ln}\,\dfrac{1}{z} = -\text{Ln}\, z$, para todo $z$ não nulo.

**10.** Para todos os números complexos não nulos, $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2$.

**11.** $\text{Ln}\, z$ é uma função inteira.

**12.** O valor principal de $i^{i+1}$ é $e^{\pi/2+i}$.

**13.** A potência complexa $z^\alpha$ sempre é multivalente.

**14.** $\cos z$ é uma função periódica, com período $2\pi$.

**15.** Existem números complexos $z$ tais que $|\text{sen } z| > 1$.

**16.** $\tan z$ tem singularidades em $z = (2n + 1)\pi/2$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**17.** $\cosh z = \cos(iz)$.

**18.** $z = \frac{1}{2}\pi i$ é um zero de $\cosh z$.

**19.** A função $\text{sen } z$ não é analítica em qualquer ponto.

**20.** Todo ramo de $\tan^{-1} z$ é inteiro.

Nos Problemas 21–40, tente preencher as lacunas sem consultar o texto.

**21.** As partes real e imaginária de $e^z$ são $u(x, y) =$ ______ e $v(x, y) =$ ______.

**22.** O domínio de $\text{Ln } z$ é ______ e sua imagem é ______.

**23.** $\text{Ln}\left(\sqrt{3} + i\right) =$ ______.

**24.** A função exponencial complexa $e^z$ é periódica, com período ______.

**25.** Se $e^{iz} = 2$, $z =$ ______.

**26.** $\text{Ln}\left(e^{1-\pi i}\right) =$ ______.

**27.** $\text{Ln } z$ é descontínua em ______.

**28.** O segmento de reta $x = a$, $-\pi < y \leq \pi$, é mapeado em ______ pela transformação $w = e^z$.

**29.** $\ln(1 + i) =$ ______.

**30.** Se $\ln z$ for puramente imaginário, $|z| =$ ______.

**31.** $z_1 = 1$ e $z_2 =$ ______ são dois números reais para os quais o valor principal de $z^i = 1$.

**32.** O valor principal de $i^i$ é ______.

**33.** No domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, a derivada do valor principal de $z^\alpha$ é ______.

**34.** A função seno complexo é definida por $\text{sen } z =$ ______.

**35.** $\cos(4i) =$ ______.

**36.** A fita vertical semi-infinita $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $y \geq 0$, é mapeada em ______ por $w = \text{sen } z$.

**37.** As partes real e imaginária de $\text{sen } z$ são ______ e ______, respectivamente.

**38.** As funções seno complexo e seno hiperbólico complexo estão relacionadas pelas fórmulas $\text{sen}(iz) =$ ______ e $\text{senh}(iz) =$ ______.

**39.** $\tanh^{-1} z$ não é definida para $z =$ ______.

**40.** Para calcular um valor específico de $\text{sen}^{-1} z$, é necessário escolher um ramo de ______ e um ramo de ______.

CAPÍTULO

# 5

# Integração no Plano Complexo

## Índice do Capítulo



Campo vetorial normalizado de velocidade para $f(z) = (1 + i)z$. Veja Seção 5.6, Exemplo 6.

**Introdução** Para definir a integral de uma função complexa $f$ iniciamos com uma função complexa $f$ definida ao longo de alguma curva $C$ ou contorno no plano complexo. Veremos, nesta seção, que a definição de uma integral complexa, suas propriedades e os métodos de cálculo de valores são muito semelhantes aos usados no caso de uma integral de linha real no plano cartesiano.

## 5.1 Integrais Reais

***Ao Professor:*** nesta seção revemos a definição e os métodos de cálculo de integrais definidas e de integrais de linha no plano. A experiência nos mostra que um reexame deste material contribui para uma introdução mais suave à integral complexa. Esta seção pode, sem dúvida, ser pulada, e a apresentação iniciada com integrais de contorno complexas, caso os estudantes tenham familiaridade com estes conceitos. No entanto, a terminologia de curvas no plano apresentada nesta seção é usada nas seções subsequentes.

**Integral Definida** É provável que o estudo de cálculo elementar tenha deixado pelo menos duas associações: de derivada com inclinação e de integral definida com área. No entanto, como a derivada $f'(z)$ de uma função real $y = f(z)$ tem outras aplicações além de medir a inclinação de retas, o valor de uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ não precisa ser a área "sob a curva". Recordemos que se $F(x)$ for uma antiderivada ou primitiva de uma função contínua $f$, ou seja, se $F$ for uma função tal que $F'(x) = f(x)$, a integral definida de $f$ no intervalo $[a, b]$ é o número

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Por exemplo, $\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$. Tenhamos em mente que o **teorema fundamental do cálculo**, dado em (1), representa um método para o cálculo do valor de $\int_a^b f(x)\,dx$, e não a *definição* de $\int_a^b f(x)\,dx$.

Apresentamos, a seguir, as definições de dois tipos de **integrais reais**. Iniciamos com os cinco passos que levam à definição da integral definida (ou de Riemann) de uma função $f$; depois, definimos integrais de linha no plano cartesiano. As duas definições se baseiam no conceito de limite.

$x_k^*$

$x_{k-1}$ $x_k$ $x_n = b$

Figura 5.1.1 Partição de $[a, b]$, com $x_k^*$ em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$

### *Passos que Levam à Definição da Integral Definida*

1. *Seja $f$ uma função de uma única variável $x$ definida em todos os pontos em um intervalo fechado $[a, b]$.*
2. *Seja $P$ uma partição:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

*de $[a, b]$ em $n$ subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de comprimento $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Figura 5.1.1).*

3. *Seja $\|P\|$ a **norma** da partição $P$ de $[a, b]$, isto é, o comprimento do maior subintervalo.*
4. *Seja $x_k^*$ um número em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $[a, b]$ (Figura 5.1.1).*
5. *Formemos os produtos $f(x_k^*)\Delta x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, e os somemos:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

**Definição 5.1.1 Integral Definida**

A **integral definida** de $f$ em $[a, b]$ é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Sempre que o limite em (2) existir, dizemos que $f$ é **integrável** no intervalo $[a, b]$ ou que a integral definida de $f$ **existe**. Pode ser mostrado que se $f$ for contínua em $[a, b]$, a integral definida em (2) existe.

A noção da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, ou seja, da *integração de uma função real f(x) em um inter- lo no eixo x, de x = a até x = b*, pode ser generalizada para a *integração de uma função real de múlti- variáveis G(x, y) em uma curva C de um ponto A a um ponto B* no plano cartesiano. Para isso, deve- introduzir certa terminologia a respeito de curvas.

**Terminologia** Suponhamos que uma curva $C$ no plano seja parametrizada por um conjunto de equa- $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais contínuas. Denotemos os **pontos inicial** **terminal** de $C$, ou seja, $(x(a), y(a))$ e $(x(b), y(b))$, pelos símbolos $A$ e $B$, respectivamente. Dizemos q

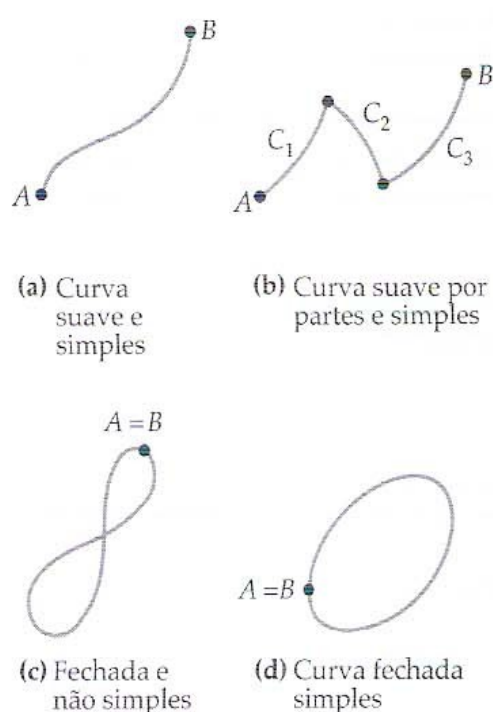



**Figura 5.1.2** Tipos de curvas no plano

$(i)$ $C$ é uma **curva suave** se $x'$ e $y'$ forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e n simultaneamente zero no intervalo aberto $(a, b)$.

$(ii)$ $C$ é uma **curva suave por partes** se consistir em um número finito de cur- suaves $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ unidas nas extremidades, isto é, o ponto terminal da cur- $C_k$ coincide com o ponto inicial da próxima curva $C_{k+1}$.

$(iii)$ $C$ é uma **curva simples** se não tiver autointerseções (se não cruzar a si mesm- exceto, talvez, em $t = a$ e $t = b$.

$(iv)$ $C$ é uma **curva fechada** se $A = B$.

$(v)$ $C$ é uma **curva fechada simples** se não tiver autointerseções e $A = B$, ou seja, se f simples e fechada.

A Figura 5.1.2 ilustra cada tipo de curva definido em $(i)$–$(v)$.

**Integrais de Linha no Plano** Os cinco passos listados a seguir levam à defi- de três **integrais de linha** no plano e são análogos aos cinco passos que levaram à de- nição de integral definida.

### *Passos que Levam à Definição de Integrais de Linha*

1. *Seja G uma função de duas variáveis reais x e y definida em todos os pontos de uma curva su- C, posicionada em alguma região do plano xy. Seja C definida pela parametrização* $x = x(t)$ *e* $y = y(t)$, $a \le t \le b$.
2. *Seja P uma partição do intervalo paramétrico* $[a, b]$ *em n subintervalos* $[t_{k-1}, t_k]$ *de comprim-* $\Delta t_k$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

*A partição P induz uma partição da curva C em n subarcos de comprimentos* $\Delta s_k$. *Sejam* $\Delta x_k$ *e* $\Delta y_k$ *os comprimentos das projeções de cada subarco nos eixos x e y, respectivamente (Figura 5.1.3).*

3. *Seja* $\|P\|$ *a norma da partição P de* $[a, b]$, *isto é, o comprimento do mais longo subintervalo.*
4. *Seja* $(x_k^*, y_k^*)$ *um ponto em cada subarco de C (Figura 5.1.3).*
5. *Formemos n produtos* $G(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k$, $G(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k$, $G(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$, $k = 1, 2, ..., n$, *e os somem-*

$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k.$$

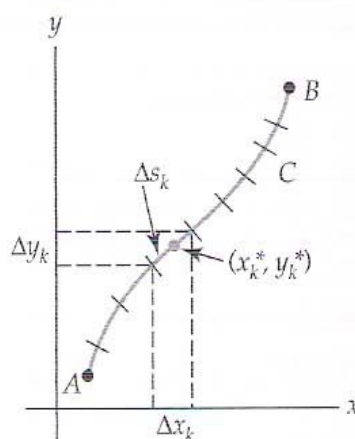



**Figura 5.1.3** Partição da curva $C$ em $n$ subarcos por uma partição $P$ do intervalo paramétrico $[a, b]$

**Definição 5.1.2 Integrais de Linha no Plano**

(*i*) **A integral de linha de** $G$ **ao longo de** $C$ **em relação a** $x$ *é*

$$\int_C G(x,y)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*,\, y_k^*)\,\Delta x_k. \tag{3}$$

(*ii*) **A integral de linha de** $G$ **ao longo de** $C$ **em relação a** $y$ *é*

$$\int_C G(x,y)\,dy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*,\, y_k^*)\,\Delta y_k. \tag{4}$$

(*iii*) **A integral de linha de** $G$ **ao longo de** $C$ **em relação ao comprimento de arco** $s$ *é*

$$\int_C G(x,y)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*,\, y_k^*)\,\Delta s_k. \tag{5}$$

Pode ser mostrado que se $G$ for contínua em $C$, as três integrais de linha definidas em (3), (4) e (5) existem. Assumiremos a continuidade de $G$ como preceito. A curva $C$ é referida como **percurso** ou **caminho** de integração.

**Método de Cálculo — $C$ Definida por Parametrização** As integrais de linha na Definição 5.1.2 podem ser calculadas de duas formas, dependendo se a curva $C$ é definida por um par de equações paramétricas ou por uma função explícita. Qualquer que seja a forma de cálculo, *a ideia básica consiste em converter a integral de linha em uma integral definida* em uma única variável. Caso $C$ seja uma curva suave parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, substituímos $x$ e $y$ na integral pelas funções $x(t)$ e $y(t)$, e o correspondente diferencial $dx$, $dy$ ou $ds$ por

$$dx = x'(t)\,dt,\ dy = y'(t)\,dt, \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

O termo $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ é denominado diferencial de comprimento de arco. Assim, cada integral de linha na Definição 5.1.2 se torna uma integral definida, na qual a variável de integração é o parâmetro $t$:

$$\int_C G(x,y)\,dx = \int_a^b G\left(x(t), y(t)\right) x'(t)\,dt, \tag{6}$$

$$\int_C G(x,y)\,dy = \int_a^b G\left(x(t), y(t)\right) y'(t)\,dt, \tag{7}$$

$$\int_C G(x,y)\,ds = \int_a^b G\left(x(t), y(t)\right) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \tag{8}$$

---

EXEMPLO 1 **$C$ Definida por Parametrização**

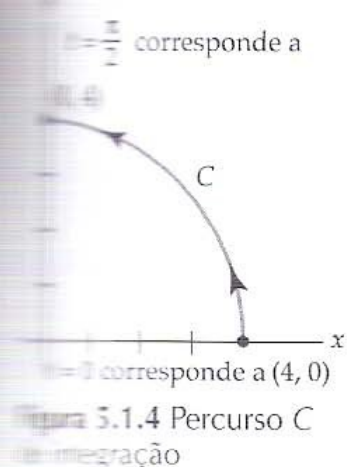
Calculemos (**a**) $\int_C xy^2dx$, (**b**) $\int_C xy^2dy$ e (**c**) $\int_C xy^2ds$, onde o percurso de integração $C$ é o quarto de circunferência definido por $x = 4\cos t$ e $y = 4\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Figura 5.1.4 Percurso C de integração

**Solução** O percurso de integração $C$ é mostrado em cinza na Figura 5.1.4. Em cada uma das três integrais de linha dadas, $x$ é substituído por $4\cos t$ e $y$, por $4\,\text{sen}\,t$.

(**a**) Como $dx = -4\,\text{sen}\,t\,dt$, de (6), temos:

$$\int_C xy^2dx = \int_0^{\pi/2} (4\cos t)\,(4\,\text{sen}\,t)^2\,(-4\,\text{sen}\,t\,dt)$$

$$= -256 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\,t \cos t\,dt = -256 \left[\frac{1}{4}\,\text{sen}^4\,t\right]_0^{\pi/2} = -64.$$

(**b**) Como $dy = \cos t\, dt$, de (7), temos:

$$\int_C xy^2 dy = \int_0^{\pi/2} (4\cos t)(4\,\text{sen}\,t)^2 (4\cos t\, dt)$$
$$= 256 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t \cos^2 t\, dt$$
$$= 256 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\,\text{sen}^2 2t\, dt$$
$$= 64 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\, dt = 32\left[t - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi.$$

Vale notar que nesta integração usamos duas identidades trigonométricas: sen $2\theta = 2$ sen $\theta$ cos $\theta$ e sen$^2$ $\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$.

(**c**) Como $ds = \sqrt{16\left(\text{sen}^2 t + \cos^2 t\right)}\, dt = 4\, dt$, de (8), temos:

$$\int_C xy^2 ds = \int_0^{\pi/2} (4\cos t)(4\,\text{sen}\,t)^2 (4\, dt)$$
$$= 256 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t \cos t\, dt = 256\left[\frac{1}{3}\,\text{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.$$

**Método de Cálculo – *C* Definida por uma Função** Se o percurso de integração *C* for o gráfico de uma função explícita $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, podemos usar $x$ como um parâmetro. Neste caso, o diferencial de $y$ é $dy = f'(x)dx$, e o diferencial de comprimento de arco é $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. Depois da substituição, cada uma das três integrais de linha na Definição 5.1.2 se torna uma integral definida:

$$\int_C G(x, y)\, dx = \int_a^b G(x, f(x))\, dx, \qquad (9)$$
$$\int_C G(x, y)\, dy = \int_a^b G(x, f(x))\, f'(x)\, dx, \qquad (10)$$
$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_a^b G(x, f(x))\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (11)$$

Uma integral de linha ao longo de uma curva *suave por partes* *C* é definida como a soma das integrais ao longo das várias curvas suaves cuja união compõe *C*. Por exemplo, para calcular $\int_C G(x, y)ds$ quando *C* é composta por duas curvas suaves $C_1$ e $C_2$, primeiro escrevemos:

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_{C_1} G(x, y)\, ds + \int_{C_2} G(x, y)\, ds. \qquad (12)$$

As integrais $\int_{C_1} G(x,\ y)\, ds$ e $\int_{C_2} G(x,\ y)\, ds$ são, então, calculadas como indicado em (8) ou (11).

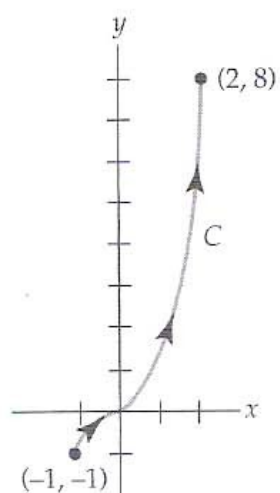



**Figura 5.1.5** Gráfico de $y = x^3$ no intervalo $-1 \leq x \leq 2$

EXEMPLO 2 ***C* Definida por uma Função**

Calculemos $\int_C xy\, dx + x^2 dy$, onde *C* é o gráfico de $y = x^3$, $-1 \leq x \leq 2$.

**Solução** A curva *C*, ilustrada na Figura 5.1.5, é definida pela função explícita $y = x^3$. Portanto, podemos usar $x$ como parâmetro. Com o diferencial $dy = 3x^2 dx$, aplicamos (9) e (10):

$$\int_C xy\, dx + x^2 dy = \int_{-1}^{2} x\left(x^3\right) dx + x^2\left(3x^2 dx\right)$$
$$= \int_{-1}^{2} 4x^4 dx = \frac{4}{5}x^5\Big|_{-1}^{2} = \frac{132}{5}.$$

**Notação** Em muitas aplicações, integrais de linha surgem como uma soma $\int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dy$. É prática comum escrever esta soma como uma integral sem parênteses:

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad \text{ou simplesmente} \quad \int_C P\,dx + Q\,dy. \tag{13}$$

Uma integral de linha ao longo de uma curva fechada $C$ é, em geral, denotada por

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy.$$

---

EXEMPLO 3 **$C$ é uma Curva Fechada**

Calculemos $\oint_C x\,dx$, onde $C$ é a circunferência definida por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**Solução** O diferencial de $x = \cos t$ é $dx = -\operatorname{sen} t\,dt$ e, de (6), obtemos:

$$\oint_C x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos t\,(-\operatorname{sen} t\,dt) = \frac{1}{2}\cos^2 t\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[1 - 1] = 0.$$

❑

---

EXEMPLO 4 **$C$ é uma Curva Fechada**

Figura 5.1.6 ... suave por ... de integração

Calculemos $\oint_C y^2\,dx - x^2 dy$, onde $C$ é a curva fechada mostrada na Figura 5.1.6.

**Solução** Como $C$ é suave por partes, procedemos como indicado em (12); ou seja, a integral dada é expressa como uma soma de integrais. Em símbolos, escrevemos $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$, onde as curvas $C_1$, $C_2$ e $C_3$ são identificadas na Figura 5.1.7. Em $C_1$, usamos $x$ como parâmetro. Como $y = 0$, $dy = 0$; logo:

$$\int_{C_1} y^2\,dx - x^2 dy = \int_0^2 0\,dx - x^2(0) = 0.$$

Em $C_2$ usamos $y$ como parâmetro. Como $x = 2$, $dx = 0$ e obtemos

$$\int_{C_2} y^2\,dx - x^2 dy = \int_0^4 y^2(0) - 4\,dy = -\int_0^4 4\,dy = -16.$$

Em $C_3$ usamos $x$ como parâmetro, mais uma vez. De $y = x^2$, temos $dy = 2x dx$, de modo que

$$\begin{aligned}\int_{C_3} y^2\,dx - x^2 dy &= \int_2^0 \left(x^2\right)^2 dx - x^2\,(2x\,dx) \\ &= \int_2^0 \left(x^4 - 2x^3\right) dx = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)\bigg|_2^0 = \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Figura 5.1.7 $C$ ... na união ... $C_2$ e $C_3$

Logo, $$\oint_C y^2 dx - x^2 dy = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 + (-16) + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}.$$

❑

**Orientação de uma Curva** Na integração definida, em geral, assumimos que o intervalo de integração é $a \leq x \leq b$ e que o símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ indica que a integral é feita no sentido positivo do eixo $x$. Integração no sentido oposto, de $x = b$ a $x = a$, resulta no negativo da integral original:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{14}$$

Integrais de linha possuem uma propriedade similar a (14); mas, antes de examiná-la, é preciso introduzir a noção de **orientação** de um percurso $C$. Caso $C$ não seja uma curva fechada, o **sentido positivo** de

$C$ ou a **orientação positiva** de $C$ corresponde a percorrer $C$ do ponto inicial $A$ ao ponto terminal $B$. Em outras palavras, se $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, são equações paramétricas para $C$, o sentido positivo de $C$ corresponde a valores crescentes do parâmetro $t$. Caso $C$ seja percorrida no sentido oposto ao positivo, dizemos que $C$ tem **orientação negativa**. Quando $C$ tem uma orientação (positiva ou negativa), a **curva oposta** é a curva com orientação oposta à de $C$, e é denotada pelo símbolo $-C$. Na Figura 5.1.8, se assumirmos que $A$ e $B$ são os pontos inicial e terminal de $C$, respectivamente, as setas na curva $C$ indicam que esta é percorrida do ponto inicial ao ponto terminal, de modo que $C$ tem orientação positiva. A curva à direita de $C$ é denotada por $-C$ e tem orientação negativa. Por fim, se $-C$ denotar a curva com orientação oposta à de $C$, o análogo a (14) para integrais de linha é:

**Figura 5.1.8** Curva $C$ e sua oposta $-C$

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy = -\int_C P\,dx + Q\,dy,$$

ou, o que é equivalente,

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy + \int_C P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Por exemplo, na parte (a) do Exemplo 1 vimos que $\int_C xy^2\,dx = -64$; de (15), concluímos que $\int_{-C} xy^2\,dx = 64$.

*Nota* ➡ É importante ressaltar que uma integral de linha independe da parametrização da curva $C$, desde que $C$ tenha a mesma orientação para todos os conjuntos de equações que a definem (Problema 33 do Conjunto de Exercícios 5.1).

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.1 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro)*

Nos Problemas 1–10, calcule a integral definida. Se necessário, reveja as técnicas de integração aprendidas em cálculo.

**1.** $\displaystyle\int_{-1}^{3} x(x-1)(x+2)\,dx$

**2.** $\displaystyle\int_{-1}^{0} t^2\,dt + \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 u^2\,du$

**3.** $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \operatorname{sen} 2\pi x\,dx$

**4.** $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\,dx$

**5.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{2x+1}$

**6.** $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-x}\,dx$

**7.** $\displaystyle\int_2^4 xe^{-x/2}\,dx$

**8.** $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

**9.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x^2-6x+5}$

**10.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x-1}{(x+3)^2}\,dx$

Nos Problemas 11–14, calcule as integrais de linha $\int_C G(x, y)\,dx$, $\int_C G(x, y)\,dy$ e $\int_C G(x, y)\,ds$ na curva $C$ indicada.

**11.** $G(x, y) = 2xy$; $x = 5\cos t$, $y = 5\operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi/4$

**12.** $G(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$

**13.** $G(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$

**14.** $G(x, y) = x^2/y^3$; $2y = 3x^{3/2}$, $1 \leq t \leq 8$

Nos Problemas 15–18, calcule $\int_C (2x + y)\,dx + xy\,dy$ na curva dada, de $(-1, 2)$ a $(2, 5)$.

**15.** $y = x + 3$

**16.** $y = x^2 + 1$

**17.**

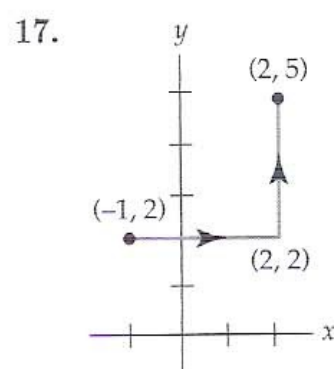



**Figura 5.1.9** Figura para o Problema 17

**18.**

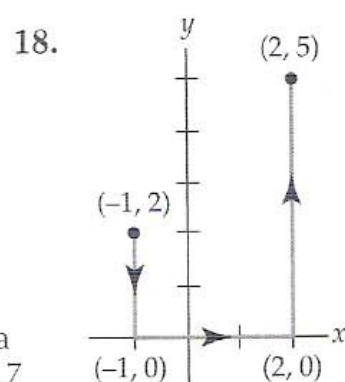



**Figura 5.1.10** Figura para o Problema 18

Nos Problemas 19–22, calcule $\int_C y\,dx + x\,dy$ na curva dada, de (0, 0) a (1, 1).

**19.** $y = x^2$

**20.** $y = x$

**21.** $C$ consiste nos segmentos de retas de (0, 0) a (0, 1) e de (0, 1) a (1, 1).

**22.** $C$ consiste nos segmentos de retas de (0, 0) a (1, 0) e de (1, 0) a (1, 1).

**23.** Calcule $\int_C (6x^2 + 2y^2)\,dx + 4xy\,dy$, onde $C$ é dada por $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $4 \le t \le 9$.

**24.** Calcule $\int_C -y^2\,dx + xy\,dy$, onde $C$ é dada por $x = 2t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 2$.

**25.** Calcule $\int_C 2x^3y\,dx + (3x + y)\,dy$, onde $C$ é dada por $x = y^2$, de (1, −1) a (1, 1).

**26.** Calcule $\int_C 4x\,dx + 2y\,dy$, onde $C$ é dada por $x = y^3 + 1$, de (0, −1) a (9, 2).

Nos Problemas 27 e 28, calcule $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy$ na curva fechada dada.

**27.**

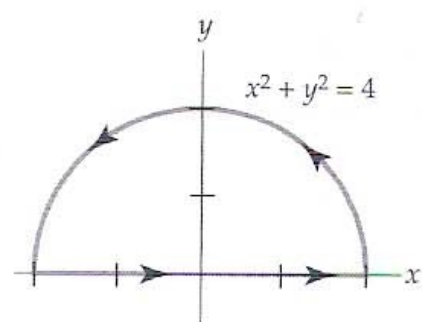



**Figura 5.1.11** Figura para o Problema 27

**28.**

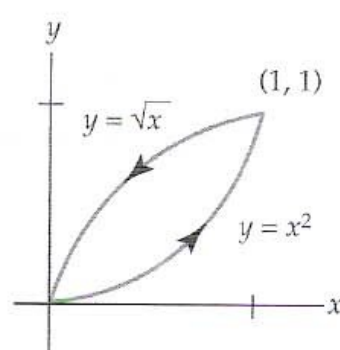



**Figura 5.1.12** Figura para o Problema 28

Nos Problemas 29 e 30, calcule $\oint_C x^2y^3\,dx - xy^2\,dy$ na curva fechada dada.

**29.**

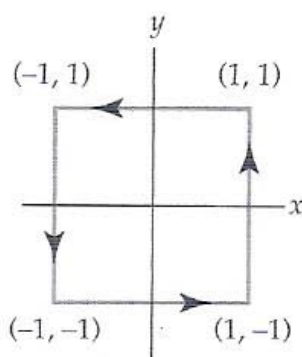



**Figura 5.1.13** Figura para o Problema 29

**30.**

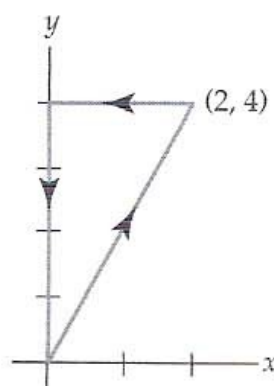



**Figura 5.1.14** Figura para o Problema 30

**31.** Calcule $\oint_C (x^2 - y^2)\,ds$, onde $C$ é dada por $x = 5\cos t$, $y = 5\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$.

**32.** Calcule $\int_{-C} y\,dx - x\,dy$, onde $C$ é dada por $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi$.

**33.** Comprove que a integral de linha $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$ tem o mesmo valor em $C$ para cada uma das seguintes parametrizações:

$$C: x = 2t + 1,\ y = 4t + 2,\ 0 \le t \le 1$$
$$C: x = t^2,\ y = 2t^2,\ 1 \le t \le \sqrt{3}$$
$$C: x = \ln t,\ y = 2\ln t,\ e \le t \le e^3.$$

**34.** Considere as três curvas entre (0, 0) e (2, 4):

$$C: x = t,\ y = 2t,\ 0 \le t \le 2$$
$$C: x = t,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 2$$
$$C: x = 2t - 4,\ y = 4t - 8,\ 2 \le t \le 3.$$

Mostre que $\int_{C_1} xy\,ds = \int_{C_3} xy\,ds$, mas $\int_{C_1} xy\,ds \ne \int_{C_2} xy\,ds$. Justifique sua resposta.

**35.** Se $\rho(x, y)$ for a densidade de um fio (massa por unidade de comprimento), a massa do fio é dada por $m = \int_C \rho(x, y)\,ds$. Calcule a massa de um fio que tem a forma de um semicírculo $x = 1 + \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi$, admitindo que a densidade em um ponto $P$ seja diretamente proporcional à distância ao eixo $y$.

**36.** As coordenadas do centro de massa de um fio com densidade variável são dadas por $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x$
onde

$$m = \int_C \rho(x, y)\, ds, \quad M_x = \int_C y\rho(x, y)\, ds, \quad M_y = \int_C x\rho(x, y)\, ds.$$

Determine o centro de massa do fio no Problema 35.

## 5.2 Integrais Complexas

Na seção anterior, revimos dois tipos de integrais reais. Vimos que a definição da integral definida
iniciava com uma função real $y = f(x)$ especificada em um intervalo no eixo $x$. Como uma curva pla
é o análogo bidimensional de um intervalo, podemos generalizar a definição de $\int_a^b f(x)\,dx$ a integrais
funções reais de duas variáveis definidas em uma curva $C$ no plano cartesiano. Veremos nesta seção
a definição de uma integral complexa é muito similar à de uma integral de linha no plano cartesia

Como curvas têm um importante papel na definição de uma integral complexa, iniciamos com
breve revisão de como curvas são representadas no plano complexo.

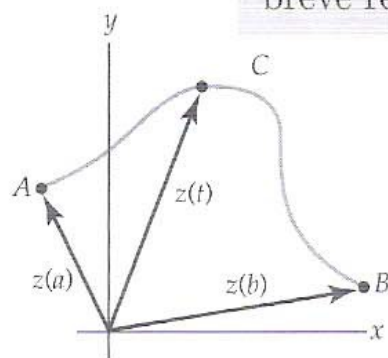



**Figura 5.2.1** $z(t) = x(t) + iy(t)$ como um vetor de posição

**Curvas Revisitadas** Suponhamos que as funções de valores reais $x = x(t)$, $y = y(t)$,
$t \leq b$ sejam equações paramétricas de uma curva $C$ no plano complexo. Na Seção 2.2
que se usarmos estas equações como as partes real e imaginária em $z = x + iy$ podemos
crever os pontos $z$ em $C$ através de uma função de valor complexo de uma variável
denominada **parametrização** de $C$:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

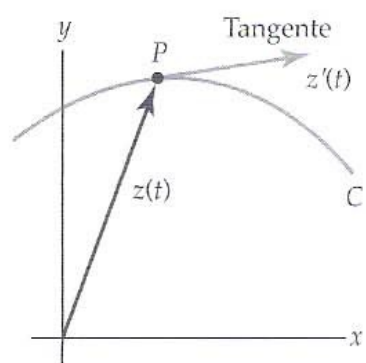



**Figura 5.2.2** $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ como um vetor tangente

Por exemplo, as equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ descrevem uma
ferência unitária centrada na origem. Uma parametrização desta circunferência é $z(t) =$
$i\,\text{sen}\, t$ ou $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (Equações (6)–(10) da Seção (2.2)).

O ponto $z(a) = x(a) + iy(a)$ ou $A = (x(a), y(a))$ é denominado **ponto inicial** de $C$; o
$z(b) = x(b) + iy(b)$ ou $B = (x(b), y(b))$ é denominado **ponto terminal** de $C$. Na Seção
mos que $z(t) = x(t) + iy(t)$ também pode ser interpretado como uma função vetorial bi
sional. Portanto, $z(a)$ e $z(b)$ podem ser interpretados como vetores de posição. À medida
$t$ varia de $t = a$ até $t = b$, podemos imaginar que a curva $C$ é percorrida pela extremidade
$z(t)$ (Figura 5.2.1).

**Figura 5.2.3** Curva $C$ não é suave, pois tem uma cúspide

**Contornos** No plano complexo, os conceitos de curvas suaves, suaves por partes,
fechadas e fechadas simples são facilmente formulados em termos da função vetorial (1).
ponhamos que a derivada de (1) seja $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Dizemos que uma curva $C$
no complexo é **suave** se $z'(t)$ for contínua e diferente de zero no intervalo $a \leq t \leq b$.
indicado na Figura 5.2.2, se o vetor $z'(t)$ for não nulo em qualquer ponto $P$ em $C$,
será tangente a $C$ em $P$. Em outras palavras, uma curva suave tem uma tangente cuja
muda continuamente; ou, ainda, uma curva suave não pode ter esquinas agudas ou
des (Figura 5.2.3). Uma curva **suave por partes** $C$ tem uma tangente cuja direção
continuamente, exceto, talvez, nos pontos de união das curvas suaves $C_1$, $C_2$, ...,
compõem. Uma curva $C$ no plano complexo é **simples** se $z(t_1) \neq z(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$
talvez, para $t = a$ e $t = b$. $C$ é uma **curva fechada** se $z(a) = z(b)$. $C$ é uma **curva**
**simples** se $z(t_1) \neq z(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$ e $z(a) = z(b)$. Na análise complexa, uma curva
partes $C$ é denominada **contorno**, **percurso** ou **caminho**.

**(a)** Sentido positivo

**(b)** Sentido positivo

**Figura 5.2.4** Interior de cada curva é mantido à esquerda

Como na seção anterior, definimos o **sentido positivo** de um contorno $C$ como
do que corresponde a valores crescentes do parâmetro $t$. Neste caso, também diz
a curva $C$ tem **orientação positiva**. Para uma curva fechada simples $C$, o sentido
corresponde ao sentido trigonométrico ou o sentido em que uma pessoa deve se
ao longo de $C$ de modo a manter o interior de $C$ à esquerda. Por exemplo, a circun
$z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ tem orientação positiva (Figura 5.2.4). O **sentido negativo**

contorno $C$ é o sentido oposto ao sentido positivo. Caso $C$ tenha uma orientação, a **curva oposta**, isto é, a curva com orientação oposta à de $C$, é denotada por $-C$. Em uma curva fechada simples, o sentido negativo corresponde ao sentido horário.

**Integral Complexa** Uma integral de uma função $f$ de uma variável complexa $z$ definida em um contorno $C$ é representada por $\int_C f(z)\,dz$ e denominada **integral complexa**. As hipóteses listadas a seguir representam um prelúdio à definição de uma integral complexa. Para efeitos de comparação, sugerimos uma revisão das listas que antecedem as Definições 5.1.1 e 5.1.2. A leitura da nova lista deve ser acompanhada de um exame da Figura 5.2.5.

### *Passos que Levam à Definição da Integral Complexa*

1. *Seja $f$ uma função de uma variável complexa $z$ definida em todos os pontos de uma curva suave $C$ posicionada em alguma região do plano complexo. Seja $C$ definida pela parametrização $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$.*
2. *Seja $P$ uma partição do intervalo paramétrico $[a, b]$ em $n$ subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$ de comprimento $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$:*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

*A partição $P$ induz uma partição da curva $C$ em $n$ subarcos cujos pontos inicial e terminal são os pares de números*

$$\begin{aligned} z_0 &= x(t_0) + iy(t_0), & z_1 &= x(t_1) + iy(t_1), \\ z_1 &= x(t_1) + iy(t_1), & z_2 &= x(t_2) + iy(t_2), \\ &\vdots & &\vdots \\ z_{n-1} &= x(t_{n-1}) + iy(t_{n-1}), & z_n &= x(t_n) + iy(t_n). \end{aligned}$$

*Seja $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$ (Figura 5.2.5).*

3. *Seja $\|P\|$ a norma da partição $P$ de $[a, b]$, isto é, o comprimento do mais longo intervalo.*
4. *Seja $z_k^* = x_k^* + iy_k^*\Delta x_k$ um ponto em cada subarco de $C$ (Figura 5.2.5).*
5. *Formemos $n$ produtos $f(z_k^*)\Delta z_k$, $k = 1, 2, ..., n$, e os somemos:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k.$$

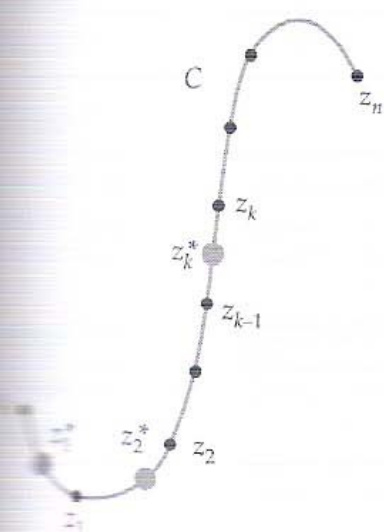



Figura 5.2.5 Partição da curva $C$ em $n$ subarcos induzida por uma partição $P$ do intervalo paramétrico $[a, b]$

**Definição 5.2.1 Integral Complexa**

A **integral complexa** de $f$ em $C$ é

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k. \tag{2}$$

Hipóteses utilizadas em todo o texto ⇒

Se o limite em (2) existir, dizemos que $f$ é **integrável** em $C$. O limite existe sempre que $f$ for contínua em todos os pontos de $C$ e $C$ for uma curva suave ou suave por portes. De aqui em diante assumiremos estas condições como preceito. Além disso, usaremos a notação $\oint_C f(z)\,dz$ para representar uma integral complexa ao longo de uma curva fechada $C$ de *orientação positiva*. Quando for importante salientar a direção de integração ao longo de uma curva fechada, empregaremos as notações

$$\oint_C f(z)\,dz \quad \text{e} \quad \oint_C f(z)\,dz$$

para representar integrações nos sentidos positivo e negativo, respectivamente.

Percebendo que a Definição 5.2.1 é formalmente igual à definição de integrais reais discutida na Seção 5.1, passaremos a nos referir à integral complexa $\int_C f(z)\,dz$ pela denominação mais comum de **integral de contorno**.

*Nota* ➡

**Função de Valor Complexo de uma Variável Real** Antes de discutirmos as propriedades de integrais de contorno e a questão fundamental de como calcular o valor de uma integral de contorno, é necessário discorrer um pouco sobre o conceito de uma **função de valor complexo de uma variável real** introduzido nas Observações ao final da Seção 2.1. Como já mencionado, uma parametrização de uma curva $C$ na forma dada em (1) é um exemplo disso. Consideremos outro exemplo simples. Se $t$ for uma variável real, a saída da função $f(t) = (2t + i)^2$ será um número complexo. Para $t = 2$,

$$f(2) = (4+i)^2 = 16 + 8i + i^2 = 15 + 8i.$$

Em geral, se $f_1$ e $f_2$ forem funções de valores reais de uma variável real $t$ (ou seja, forem funções reais), $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ é uma função de valor complexo de uma variável real $t$. O que nos interessa no momento é a integral definida $\int_a^b f(t)\,dt$, ou seja, a integração da função de valor complexo $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ da variável real $t$ em um intervalo real. Continuando com a função específica $f(t) = (2t + i)^2$, parece lógico que escrevamos no intervalo, digamos, $0 \le t \le 1$,

$$\int_0^1 (2t+i)^2 dt = \int_0^1 \left(4t^2 - 1 + 4ti\right) dt = \int_0^1 (4t^2 - 1)dt + i\int_0^1 4t\,dt.$$

As integrais $\int_0^1 (4t^2 - 1)dt$ e $\int_0^1 4t\,dt$ em (3) são reais; assim, estaríamos inclinados a chamá-las de partes real e imaginária de $\int_0^1 (2t+i)^2 dt$. Cada uma dessas integrais pode ser calculada com emprego do teorema fundamental do cálculo ((1) da Seção 5.1):

$$\int_0^1 (4t^2 - 1)dt = \left(\frac{4}{3}t^3 - t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \int_0^1 4t\,dt = 2t^2\Big|_0^1 = 2.$$

Com isso, (3) passa a $\int_0^1 (2t+i)^2 dt = \frac{1}{3} + 2i$.

Como a integração anterior é muito simples e rotineira, podemos generalizá-la. Se $f_1$ e $f_2$ forem funções de valores reais de uma variável real $t$ e forem contínuas em um intervalo comum $a \le t \le b$, *definimos* a integral da função de valor complexo $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, em $a \le t \le b$, em termos das integrais definidas das partes real e imaginária de $f$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + i\int_a^b f_2(t)\,dt.$$

A continuidade de $f_1$ e de $f_2$ em $[a, b]$ garante a existência de $\int_a^b f_1(t)\,dt$ e de $\int_a^b f_2(t)\,dt$.

Todas as familiares propriedades de integrais dadas a seguir podem ser provadas com base na definição em (4). Se $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ e $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ forem funções de valores complexos de uma variável real $t$ e forem contínuas em um intervalo $a \le t \le b$, então

Estas propriedades são importantes no cálculo de integrais de contorno. Serão usadas com frequência sem serem mencionadas explicitamente. ➡

$$\int_a^b k\,f(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt, \quad \text{sendo } k \text{ uma constante complexa}$$

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt,$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt,$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

Em (7) assumimos que o número real $c$ está no intervalo $[a, b]$.

A seguir, retomamos a discussão de integrais de contorno.

**Cálculo de Integrais de Contorno** Para facilitar a discussão sobre como calcular uma integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$, escrevamos (2) em uma forma abreviada. Se substituirmos $f(z)$ por $u + iv$ e $\Delta z$ por $\Delta x + i\Delta y$, $\lim\limits_{||P||\to 0}$ por lim, $\sum_{k=1}^n$ por $\Sigma$ e suprimirmos todos os subscritos, (2) passa a:

$$\int_C f(z)dz = \lim \sum (u + iv)(\Delta x + i\Delta y)$$
$$= \lim \left[ \sum (u\Delta x - v\Delta y) + i \sum (v\Delta x + u\Delta y) \right].$$

A interpretação da última linha é (Definição 5.1.2):

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i \int_C v\,dx + u\,dy. \tag{9}$$

Em outras palavras, as partes real e imaginária de uma integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ são as integrais de linha reais $\int_C u\,dx - v\,dy$ e $\int_C v\,dx + u\,dy$, respectivamente. Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ forem equações paramétricas de $C$, $dx = x'(t)dt$ e $dy = y'(t)dt$. Substituindo os símbolos $x$, $y$, $dx$ e $dy$ por $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)dt$ e $y'(t)dt$, respectivamente, o lado direito de (9) passa a:

$$\overbrace{\int_a^b [u(x(t), y(t))\, x'(t) - v(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt}^{\int_C u dx - v dy}$$
$$+ \, i \overbrace{\int_a^b [v(x(t), y(t))\, x'(t) + u(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt.}^{\int_C v dx + u dy} \tag{10}$$

Caso usemos a função de valor complexo (1) para descrever o contorno $C$, (10) será igual a $\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$, se a multiplicação no integrando for efetuada

$$f(z(t))\, z'(t) = [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))]\, [x'(t) + iy'(t)]$$

e $\int_a^b f\,(z(t))\ z'(t)\,dt$ for expressa em termos de suas partes real e imaginária. Com isso, obtivemos uma forma prática para calcular uma integral de contorno.

**Teorema 5.2.1 Cálculo de uma Integral de Contorno**

Se $f$ for contínua em uma curva suave $C$ dada pela parametrização $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, então

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\ z'(t)\, dt. \tag{11}$$

Os resultados em (10) e (11) podem ser descritos com outras palavras. Se $z(t) = x(t) + iy(t)$ e $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, o integrando $f(z(t))z'(t)$ é uma função de valor complexo da variável real $t$. Portanto, a integral $\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$ pode ser calculada como indicado em (4). O próximo exemplo ilustra este método.

---

EXEMPLO 1 **Cálculo de uma Integral de Contorno**

Calculemos a integral $\int_C \bar{z}\, dz$, onde $C$ é parametrizada por $z(t) = 3t + it^2$, $-1 \leq t \leq 4$.

**Solução** Com $f(z) = \bar{z}$, temos $f(z(t)) = \overline{3t + it^2} = 3t - it^2$, e $z'(t) = 3 + 2it$; com isso, segundo (11), a integral fica escrita como

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_{-1}^4 (3t - it^2)(3 + 2it)\, dt = \int_{-1}^4 \left[2t^3 + 9t + 3t^2 i\right] dt.$$

Usando (4), a última integral é calculada como

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_{-1}^4 (2t^3 + 9t)\, dt + i \int_{-1}^4 3t^2\, dt$$
$$= \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{9}{2}t^2\right)\Bigg|_{-1}^4 + it^3\Bigg|_{-1}^4 = 195 + 65i.$$

❑

**EXEMPLO 2 Cálculo de uma Integral de Contorno**

Calculemos a integral $\oint_C \frac{1}{z}\, dz$, onde $C$ é a circunferência $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**Solução** Neste caso, $z = \cos t + i\text{sen } t = e^{it}$ e $f(z(t)) = \dfrac{1}{z(t)} = e^{-it}$. Logo,

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it})\, ie^{it}\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Como discutido na Seção 5.1, para algumas curvas a própria variável real $x$ pode ser usada como parâmetro. Por exemplo, para calcular $\int_C (8x^2 - iy)\, dz$ no segmento de reta $y = 5x$, $0 \leq x \leq 2$, escrevemos $z = x + 5xi$, $dz = (1 + 5i)dx$, $\int_C (8x^2 - iy)\, dz = \int_0^2 (8x^2 - 5ix)(1 + 5i)\, dx$, e integramos na forma usual:

$$\begin{aligned}\int_C (8x^2 - iy)\, dz &= (1 + 5i)\int_0^2 (8x^2 - 5ix)\, dx \\ &= (1 + 5i)\left[\frac{8}{3}x^3\right]_0^2 - (1 + 5i)i\left[\frac{5}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{214}{3} + \frac{290}{3}i.\end{aligned}$$

Em geral, se $x$ e $y$ estiverem relacionadas por meio de uma função real contínua $y = f(x)$, a correspondente curva $C$ no plano complexo pode ser parametrizada por $z(x) = x + if(x)$. De modo equivalente, podemos escrever $x = t$; com isso, um conjunto de equações paramétricas para $C$ é $x = t$, $y = f(t)$.

**Propriedades** As seguintes propriedades de integrais de contorno são análogas às propriedades de integrais de linha reais e às propriedades listadas em (5)–(8).

**Teorema 5.2.2 Propriedades de Integrais de Contorno**

Sejam $f$ e $g$ funções contínuas em um domínio $D$ e seja $C$ uma curva suave, totalmente posicionada em $D$. Então,

(*i*) $\int_C kf(z)\, dz = k\int_C f(z)\, dz$, sendo $k$ uma constante complexa.

(*ii*) $\int_C [f(z) + g(z)]\, dz = \int_C f(z)\, dz + \int_C g(z)\, dz$.

(*iii*) $\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$, onde $C$ consiste nas curvas suaves $C_1$ e $C_2$, unidas nas extremidades.

(*iv*) $\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$, onde $-C$ denota a curva com orientação oposta à de $C$.

As quatro partes do Teorema 5.2.2 também são válidas se a curva $C$ for suave por partes em $D$.

**EXEMPLO 3 $C$ é uma Curva Suave por Partes**

Calculemos $\int_C (x^2 + iy^2)\, dz$, onde $C$ é o contorno mostrado na Figura 5.2.6.

**Figura 5.2.6** Contorno $C$ é suave por partes

**Solução** Usando o Teorema 5.2.2(*iii*), escrevemos

$$\int_C (x^2 + iy^2)\, dz = \int_{C_1} (x^2 + iy^2)\, dz + \int_{C_2} (x^2 + iy^2)\, dz.$$

Como a curva $C_1$ é definida por $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, podemos usar $x$ como parâmetro. Com isso, $z(x) = x + ix$, $z'(x) = 1 + i$, $f(z) = x^2 + iy^2$, $f(z(x)) = x^2 + ix^2$ e

$$\begin{aligned}\int_{C_1} (x^2 + iy^2)\, dz &= \int_0^1 \overbrace{(x^2 + ix^2)}^{(1+i)x^2}(1 + i)\, dx \\ &= (1 + i)^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{(1 + i)^2}{3} = \frac{2}{3}i.\end{aligned}$$

A curva $C_2$ é definida por $x = 1$, $1 \leq y \leq 2$. Se usarmos $y$ como parâmetro, $z(y) = 1 + iy$, $z'(x) = i$, $f(z(y)) = 1 + iy^2$ e

$$\int_{C_2} (x^2 + iy^2)\, dz = \int_1^2 (1 + iy^2) i\, dy = -\int_1^2 y^2\, dy + i \int_1^2 dy = -\frac{7}{3} + i. \tag{13}$$

Combinando (10) e (13), obtemos $\int_C (x^2 + iy^2)\, dz = \frac{2}{3}i + (-\frac{7}{3} + i) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}i$. ❑

Em aplicações de integrais complexas, a determinação de um limitante superior para o módulo ou o valor absoluto de uma integral de contorno às vezes pode ser útil. No próximo teorema usaremos o fato de que o comprimento de uma curva plana é $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$. Se $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, então $|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ e $L = \int_a^b |z'(t)|\, dt$.

**Teorema 5.2.3 Um Teorema Limitante**

Se $f$ for contínua em uma curva suave $C$ e $|f(z)| \leq M$ para todo $z$ em $C$, então $\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq ML$, onde $L$ é o comprimento de $C$.

**Prova** Da desigualdade triangular dada em (11) da Seção 1.2, temos

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(z_k^*)|\,|\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|. \tag{14}$$

Como $|\Delta z_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$, podemos interpretar $|\Delta z_k|$ como o comprimento da corda que une os pontos $z_k$ e $z_{k-1}$ em $C$. Além disso, como a soma dos comprimentos das cordas não pode ser maior que o comprimento $L$ de $C$, a desigualdade (14) persiste como $|\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k| \leq ML$. Por fim, a continuidade de $f$ garante a existência de $\int_C f(z)\, dz$; portanto, se fizermos $\|P\| \to 0$, a última desigualdade fornece $\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq ML$. ❑

O Teorema 5.2.3 é usado com frequência na teoria de integrais complexa; às vezes este teorema é referido como a **desigualdade $ML$**. Nossa discussão na Seção 2.6 indica que se $f$ for contínua no contorno $C$, sempre existirá o limitante $M$ invocado no Teorema 5.2.3 para os valores de $f(z)$ em $C$.

---

EXEMPLO 4 **Um Limitante para uma Integral de Contorno**

Determinemos um limitante superior para o valor absoluto de $\oint_C \frac{e^z}{z+1}\, dz$, onde $C$ é a circunferência $|z| = 4$.

**Solução** Primeiro, o comprimento $L$ da circunferência de raio 4 é $8\pi$. Segundo, da desigualdade (7) da Seção 1.2 temos que, para todos os pontos $z$ na circunferência, $|z + 4| \geq |z| - 1 = 4 - 1 = 3$. Logo,

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{|e^z|}{|z| - 1} = \frac{|e^z|}{3}. \tag{15}$$

Além disso, $|e^z| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = e^x$. Para pontos na circunferência $|z| = 4$, o máximo valor que $x = \operatorname{Re}(z)$ pode assumir é 4; com isso, (15) fornece

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{e^4}{3}.$$

Da desigualdade $ML$ (Teorema 5.2.3), temos

$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z+1}\, dz\right| \leq \frac{8\pi e^4}{3}.$$

❑

**Observações**

Não existe uma parametrização única para um contorno $C$. Podemos comprovar que

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t,\ 0 \le t \le 2\pi$$
$$z(t) = e^{2\pi it} = \cos 2\pi t + i\,\mathrm{sen}\,2\pi t,\ 0 \le t \le 1$$
$$z(t) = e^{\pi it/2} = \cos\frac{\pi t}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi t}{2},\ 0 \le t \le 4$$

são parametrizações, orientadas no sentido positivo, para a circunferência unitária $|z| = 1$.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.2 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro)*

Nos Problemas 1–16, calcule a integral dada ao longo do contorno especificado.

1. $\int_C (z+3)\,dz$, onde $C$ é $x = 2t$, $y = 4t - 1$, $1 \le t \le 3$.
2. $\int_C (2\bar{z} - z)\,dz$, onde $C$ é $x = -t$, $y = t^2 + 2$, $0 \le t \le 2$.
3. $\int_C z^2\,dz$, onde $C$ é $z(t) = 3t + 2it$, $-2 \le t \le 2$.
4. $\int_C (3z^2 - 2z)\,dz$, onde $C$ é $z(t) = t + it^2$, $0 \le t \le 1$.
5. $\int_C \frac{z+1}{z}\,dz$, onde $C$ é a metade direita da circunferência $|z| = 1$, de $z = -i$ a $z = i$.
6. $\int_C |z|^2\,dz$, onde $C$ é $x = t^2$, $y = 1/t$, $1 \le t \le 2$.
7. $\oint_C \mathrm{Re}(z)\,dz$, onde $C$ é a circunferência $|z| = 1$.
8. $\oint_C \left(\frac{1}{(z+i)^3} - \frac{5}{z+i} + 8\right) dz$, onde $C$ é a circunferência $|z + i| = 1$.
9. $\int_C (x^2 + iy^3)\,dz$, onde $C$ é o segmento de reta de $z = 1$ a $z = i$.
10. $\int_C (x^2 - iy^3)\,dz$, onde $C$ é a metade inferior da circunferência $|z| = 1$, de $z = -1$ a $z = 1$.
11. $\int_C e^z\,dz$, onde $C$ é o percurso poligonal que consiste nos segmentos de retas de $z = 0$ a $z = 2$ e de $z = 2$ a $z =$ $1 + i\pi$.
12. $\int_C \mathrm{sen}\,z\,dz$, onde $C$ é o percurso poligonal que consiste nos segmentos de retas de $z = 0$ a $z = 1$ e de $z = 1$ a $z =$ $1 + i$.
13. $\int_C \mathrm{Im}\,(z - i)\,dz$, onde $C$ é o percurso poligonal que consiste no arco circular ao longo de $|z| = 1$, de $z = 1$ a $z =$ $i$, e no segmento de reta de $z = i$ a $z = -1$.
14. $\int_C dz$, onde $C$ é a metade esquerda da elipse $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$, de $z = 2i$ a $z = -2i$.
15. $\oint_C ze^z\,dz$, onde $C$ é o quadrado com vértices em $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ e $z = i$.

16. $\int_C f(z)\,dz$, onde $f(z) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 6x, & x > 0 \end{cases}$ e $C$ é a parábola $y = x^2$, de $z = -1 + i$ a $z = 1 + i$.

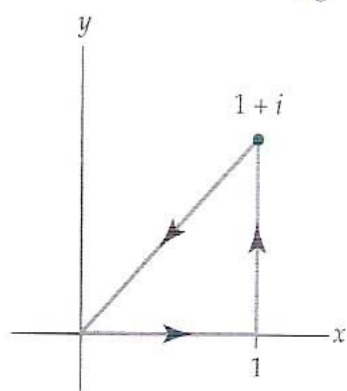



**Figura 5.2.7** Figura para os Problemas 17–20

Nos Problemas 17–20, calcule a integral dada ao longo do contorno $C$ especificado na Figura 5.2.7.

17. $\oint_C x\,dz$
18. $\oint_C (2z - 1)\,dz$
19. $\oint_C z^2\,dz$
20. $\oint_C \bar{z}^2\,dz$

Nos Problemas 21–24, calcule $\int_C (z^2 - z + 2)$ ao longo do contorno $C$ especificado nas figuras, de $z = i$ a $z = 1$.

**21.**

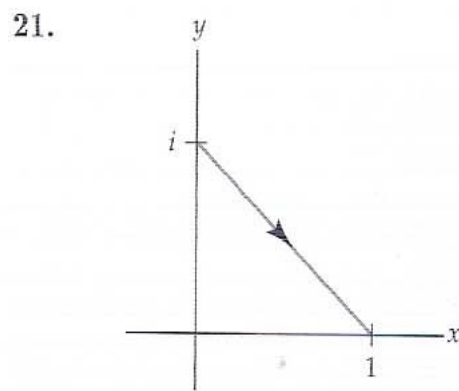



**Figura 5.2.8** Figura para o Problema 21

**22.**

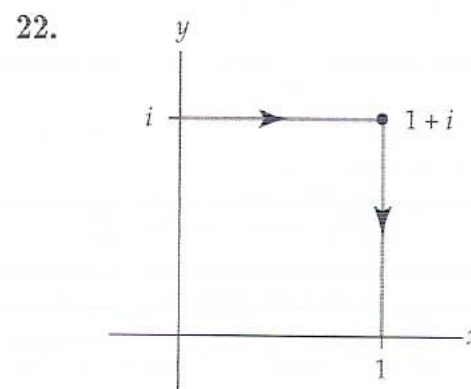



**Figura 5.2.9** Figura para o Problema 22

**23.**

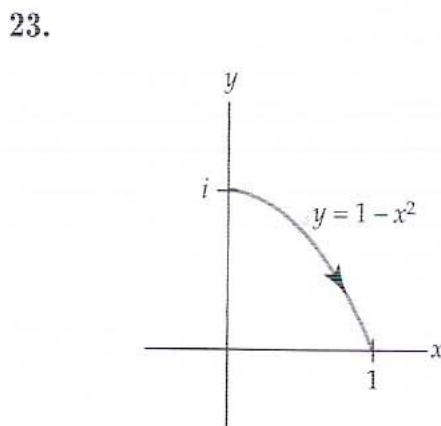



**Figura 5.2.10** Figura para o Problema 23

**24.**

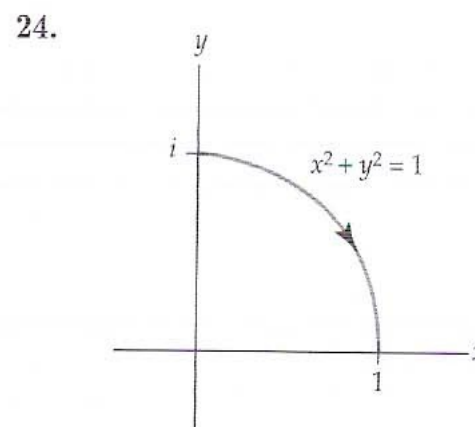



**Figura 5.2.11** Figura para o Problema 24

Nos Problemas 25–28, determine um limitante superior para o valor absoluto da integral dada ao longo do contorno especificado.

**25.** $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}\,dz$, onde $C$ é a circunferência $|z| = 5$

**26.** $\int_C \frac{1}{z^2-2i}\,dz$, onde $C$ é a metade direita da circunferência $|z| = 6$, de $z = -6i$ a $z = 6i$.

**27.** $\int_C (z^2+4)\,dz$, onde $C$ é o segmento de reta de $z = 0$ a $z = 1 + i$

**28.** $\int_C \frac{1}{z^3}\,dz$, onde $C$ é um quarto da circunferência $|z| = 4$, de $z = 4i$ a $z = 4$

## Foco em Conceitos

**29.** (a) Use a Definição 5.2.1 e mostre que, para qualquer curva suave $C$ entre $z_0$ e $z_n$, $\int_C dz = z_n - z_0$.

(b) Use o resultado da parte (a) e comprove sua resposta ao Problema 14.

(c) Qual é o valor de $\oint_C dz$ quando $C$ é uma curva fechada simples?

**30.** Use a Definição 5.2.1 e mostre que, para qualquer curva suave $C$ entre $z_0$ e $z_n$, $\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2)$. [*Sugestão:* a integral existe. Escolha $z_k^* = z_k$ e $z_k^* = z_{k-1}$.]

**31.** Use os resultados dos Problemas 29 e 30 e calcule $\int_C (6z+4)\,dz$, onde $C$ é:

(a) O segmento de reta de $1 + i$ a $2 + 3i$.

(b) O contorno fechado $x^4 + y^4 = 1$.

**32.** Determine um limitante superior para o valor absoluto da integral $\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz$, onde o contorno $C$ é o segmento de reta de $z = 3$ a $z = 3 + i$. Use o fato de que $|z^2 + 1| = |z - i||z + i|$,onde $|z - i|$ e $|z + i|$ representam, respectivamente, as distâncias entre $i$ e $-i$ a pontos $z$ em $C$.

**33.** Determine um limitante superior para o valor absoluto da integral $\oint_C \frac{z^2}{(z^2+9)^2}dz$, onde $C$ é uma circunferência com raio $R > 3$ e centro na origem. Use o fato de que $|z^2 + 9| = |z - 3i||z + 3i|$ e aplique a desigualdade triangular (10) da Seção 1.2 em cada fator.

**34.** Determine um limitante superior para o valor absoluto da integral $\int_C \text{Ln}(z+3)\,dz$, onde o contorno $C$ é o segmento de reta de $z = 3i$ a $z = 4 + 3i$.

## 5.3 Teorema de Cauchy-Goursat

Nesta seção concentraremos a atenção nas integrais de contorno, onde o contorno $C$ é uma curva fechada simples com orientação positiva (sentido trigonométrico). Especificamente, veremos que, quando $f$ é analítica em um tipo especial de domínio $D$, o valor da integral de contorno $\oint_C f(z)\,dz$ é o mesmo para *qualquer* curva fechada simples $C$ que esteja totalmente posicionada em $D$. Este teorema, denominado **Teorema de Cauchy-Goursat**, é um *dos* resultados fundamentais em análise complexa.

Antes de discutirmos o Teorema de Cauchy-Goursat e algumas de suas ramificações, precisamos entender a diferença entre dois tipos de domínios no plano complexo: simplesmente conexos e multiplamente conexos.

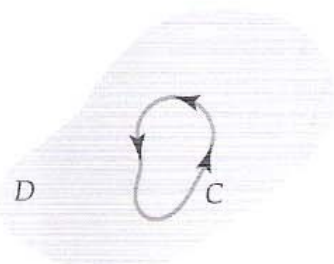



**Figura 5.3.1** Domínio simplesmente conexo $D$

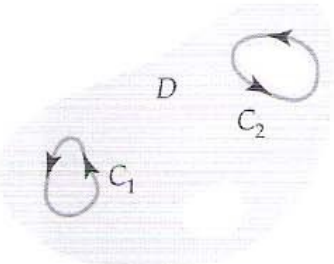



**Figura 5.3.2** Domínio multiplamente conexo $D$

**Domínios Simplesmente e Multiplamente Conexos** Recordemos, da Seção 1.5, que um domínio é um conjunto conexo aberto no plano complexo. Dizemos que um domínio $D$ é **simplesmente conexo** se todo contorno fechado simples $C$ posicionado inteiramente em $D$ puder ser comprimido a um ponto sem abandonar $D$ (Figura 5.3.1). Em outras palavras, se desenharmos qualquer contorno fechado simples $C$ de modo que esteja totalmente posicionado no interior de um domínio simplesmente conexo, então $C$ circunda apenas pontos do domínio $D$. Dito de outro modo, um domínio simplesmente conexo não tem "buracos". O plano complexo, como um todo, é um exemplo de um domínio simplesmente conexo. (Por quê?) Um domínio que não é simplesmente conexo é denominado **domínio multiplamente conexo**; ou seja, um domínio multiplamente conexo tem "buracos". Na Figura 5.3.2, se a curva $C_2$, que circunda um "buraco", fosse comprimida a um ponto, em algum momento teria que abandonar o domínio $D$. Um domínio com um "buraco" é denominado **duplamente conexo**; um domínio com dois "buracos" é denominado **triplamente conexo**, e assim por diante. O disco aberto definido por $|z| < 2$ é um domínio simplesmente conexo; a região anelar aberta definida por $1 < |z| < 2$ é um domínio duplamente conexo.

**Teorema de Cauchy** Em 1852 o matemático francês Louis-Augustin Cauchy provou um dos mais importantes teoremas da análise complexa.

### *Teorema de Cauchy*

*Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$ e seja $f'$ contínua em $D$. Então, para todo contorno fechado simples $C$ em $D$, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.*

**Prova dada por Cauchy** A prova deste teorema é uma imediata consequência do teorema de Green no plano e das equações de Cauchy-Riemann. Recordemos do cálculo que se $C$ for uma curva fechada simples, com orientação positiva, que forma a fronteira de uma região $R$ no interior de $D$, e se as funções de valores reais $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ e suas derivadas parciais de primeira ordem forem contínuas em um domínio que contenha $C$ e $R$, então

O teorema de Green expressa uma integral de linha real como uma integral dupla ➡

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA. \quad (2)$$

Em (1) assumimos que $f'$ é contínua em todo o domínio $D$. Em consequência, as partes real e imaginária de $f(z) = u + iv$ e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em todo o domínio $D$. Usando (9) da Seção 5.2, podemos escrever $\oint_C f(z)\,dz$ em termos de integrais de linha reais; aplicando o teorema de Green (2) a cada integral de linha, obtemos:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \oint_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\oint_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy \\ &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA.\end{aligned} \quad (3)$$

Como $f$ é analítica em $D$, as funções reais $u$ e $v$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ e $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, em cada ponto em $D$. Usando as equações de Cauchy-Riemann para substituir $\partial u/\partial y$ e $\partial u/\partial x$ em (3), mostramos que

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dA + i \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA \\ &= \iint_R (0)\,dA + i \iint_R (0)\,dA = 0.\end{aligned}$$

Isso conclui a prova. ❑

Em 1883 o matemático francês Edouard Goursat provou que a hipótese de continuidade de $f'$ não é necessária para chegar à conclusão do teorema de Cauchy. A correspondente versão modificada do teorema de Cauchy ficou conhecida como **teorema de Cauchy-Goursat**. Devido ao menor número de hipóteses, a prova desta versão do teorema de Cauchy é mais elaborada do que a que acabamos de apresentar. Uma forma de prova proposta por Goursat é delineada no Apêndice II.

**Teorema 5.3.1 Teorema de Cauchy-Goursat**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$. Então, para todo contorno fechado simples $C$ em $D$, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

Como o interior de um contorno fechado simples é um domínio simplesmente conexo, o teorema de Cauchy-Goursat pode ser enunciado de uma forma mais prática:

*Se $f$ for analítica em um contorno fechado simples $C$ e em todos os pontos no interior do mesmo, então $\oint_C f(z)\,dz = 0$.*

---

EXEMPLO 1 **Aplicação do Teorema de Cauchy-Goursat**

Calculemos $\oint_C e^z\,dz$, onde o contorno $C$ é mostrado na Figura 5.3.3.

**Solução** A função $f(z) = e^z$ é inteira e, consequentemente, analítica em todos os pontos no interior do e no contorno fechado simples $C$. Portanto, segundo o teorema de Cauchy-Goursat em (4), $\oint_C e^z\,dz = 0$. ❑

Figura 5.3.3 Contorno para o Exemplo 1

O resultado importante do Exemplo 1 é que $\oint_C e^z\,dz = 0$ para *qualquer* contorno fechado simples no plano complexo. Na verdade, para qualquer contorno fechado simples $C$ e qualquer função inteira $f$, como $f(z) = \text{sen}\, z$, $f(z) = \cos z$ e $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots\; a_1 z + a_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\oint_C \text{sen}\, z\,dz = 0, \quad \oint_C \cos z\,dz = 0, \quad \oint_C p(z)\,dz = 0,$$

e assim por diante.

---

EXEMPLO 2 **Aplicação do Teorema de Cauchy-Goursat**

Calculemos $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2}$, onde o contorno $C$ é a elipse $(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-5)^2 = 1$.

(a)

(b)

**Figura 5.3.4** Domínio duplamente conexo $D$

**Solução** A função racional $f(z) = 1/z^2$ é analítica em todo plano complexo, exceto em $z = 0$. Contudo, $z = 0$ não é um ponto no interior do ou no contorno elíptico fechado simples $C$. Portanto, de (4), temos que $\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$. ❑

**Teorema de Cauchy-Goursat para Domínios Multiplamente Conexos** Se $f$ for analítica em um domínio multiplamente conexo $D$, não podemos concluir que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para todo contorno fechado simples em $D$. Inicialmente, suponhamos que $D$ seja um domínio duplamente conexo, que $C$ e $C_1$ sejam contornos fechados simples e que $C_1$ circunde o "buraco" no domínio e seja interior a $C$ [Figura 5.3.4(a)]. Suponhamos, ainda, que $f$ seja analítica em cada contorno e em cada ponto interior a $C$ e exterior a $C_1$. Introduzindo o corte $AB$ mostrado na Figura 5.4.3(b), a região limitada pelas curvas é simplesmente conexa. De (*ii*) do Teorema 5.2.2, a integral de $A$ a $B$ tem sinal oposto ao da integral de $B$ a $A$, de modo que, de (4), obtemos

$$\oint_C f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{-AB} f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

ou

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz. \tag{5}$$

O último resultado é às vezes denominado **princípio de deformação de contornos**, pois podemos interpretar o contorno $C_1$ como uma deformação contínua do contorno $C$. Sob esta deformação de contornos, se a região entre $C$ e $C_1$ contiver apenas pontos nos quais $f$ é analítica, o valor da integral não é alterado. Em outras palavras, (5) permite que calculemos uma integral ao longo de um complicado contorno fechado simples $C$ substituindo-o por um contorno $C_1$ que seja mais conveniente.

---

EXEMPLO 3 **Aplicação de Deformação de Contornos**

Calculemos o valor de $\oint_C \frac{dz}{z - i}$, onde $C$ é mostrado em preto na Figura 5.3.5.

**Solução** Notemos que $f(z) = \frac{1}{z - i}$ é analítica no domínio multiplamente conexo que consiste no plano complexo, excluído o ponto $z = i$. Em vista de (5), escolhemos o contorno circular mais conveniente $C_1$, desenhado em cinza na Figura 5.3.5. Tomando o raio da circunferência como $r = 1$, garantimos que $C_1$ está no interior de $C$. Em outras palavras, $C_1$ é a circunferência $|z - i| = 1$; de (10) da Seção 2.2, $C_1$ pode ser parametrizado por $z = i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Como $z - i = e^{it}$, $dz = ie^{it}$ e obtemos

$$\oint_C \frac{dz}{z - i} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z - i} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$ ❑

**Figura 5.3.5** No Exemplo 3, usaremos o contorno mais simples $C_1$

O resultado obtido no Exemplo 3 pode ser generalizado. Usando o princípio de deformação de contornos (5) e procedendo como no exemplo, podemos mostrar que se $z_0$ for um número complexo constante qualquer interior a *qualquer* contorno fechado simples $C$, para um inteiro $n$,

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0, & n \ne 1. \end{cases} \tag{6}$$

Por exemplo, $1/(z - z_0)^{-3} = (z - z_0)^3$ é um polinômio. ➡

O fato de que a integral em (6) é zero quando $n \ne 1$ resulta apenas parcialmente do teorema de Cauchy-Goursat. Quando $n$ é zero ou um inteiro negativo, $1/(z - z_0)^n$ é um *polinômio* e, portanto, uma função inteira. O Teorema 5.3.1 e a discussão após o Exemplo 1 indicam que $\oint_C dz/(z - z_0)^n = 0$. Deixamos como exercício mostrar que a integral também é zero quando $n$ for um inteiro positivo diferente de 1 (Problema 24 do Conjunto de Exercícios 5.3).

A analiticidade da função $f$ em todos os pontos no interior ou em um contorno fechado simples $C$ é *suficiente* para garantir que $\oint_C f(z)\,dz = 0$. No entanto, o resultado em (6) enfatiza que a analiticidade não é *necessária*; em outras palavras, é possível que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ sem que $f$ seja analítica no interior de $C$. Como um exemplo disso, se considerarmos no Exemplo 2 que $C$ é a circunferência $|z| = 1$, substituindo $n = 2$ e $z_0 = 0$ em (6), vemos imediatamente que $\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$. Vale notar que $f(z) = 1/z^2$ não é analítica em $z = 0$, que é interior a $C$.

---

EXEMPLO 4 **Aplicação da Fórmula (6)**

Calculemos $\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}dz$, onde $C$ é a circunferência $|z-2| = 2$.

**Solução** Já que o denominador pode ser fatorado como $z^2 + 2z - 3 = (z-1)(z+3)$, o integrando não é analítico em $z = 1$ e em $z = -3$. Desses dois pontos, apenas $z = 1$ está no interior do contorno $C$, que é uma circunferência com centro em $z = 2$ e raio $r = 2$. Usando frações parciais,

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3} = \frac{3}{z-1} + \frac{2}{z+3}$$

de modo que

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz = 3\oint_C \frac{1}{z-1}\,dz + 2\oint_C \frac{1}{z+3}\,dz. \tag{7}$$

Pelo resultado em (6), o valor da primeira integral em (7) é $2\pi i$, enquanto o valor da segunda integral é 0, pelo teorema de Cauchy-Goursat. Assim, (7) passa a

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz = 3(2\pi i) + 2(0) = 6\pi i.$$

❑

Sejam $C$, $C_1$ e $C_2$ contornos fechados simples, como mostrado na Figura 5.3.6(a), e seja $f$ analítica em cada um destes três contornos e em cada ponto interior a $C$ e exterior a $C_1$ e a $C_2$. Introduzindo cortes entre $C_1$ e $C$ e entre $C_2$ e $C$, como ilustrado na Figura 5.3.6(b), o Teorema 5.3.1 resulta em

(b)

Figura 5.3.6 Domínio triplamente conexo $D$

$$\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

de modo que

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz. \tag{7}$$

O próximo teorema resume os principais resultados para um domínio multiplamente conexo com $n$ "buracos".

**Teorema 5.3.2 Teorema de Cauchy-Goursat para Domínios Multiplamente Conexos**

Sejam $C, C_1, \ldots, C_n$ curvas fechadas simples, todas com orientação positiva, tais que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sejam interiores a $C$, mas as regiões interiores de cada $C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, não tenham pontos em comum. Se $f$ for analítica em cada contorno e em cada ponto interior a $C$ e exterior a todos os contornos $C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, então

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz. \tag{8}$$

**EXEMPLO 5 Aplicação do Teorema 5.3.2**

Calculemos $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$, onde $C$ é a circunferência $|z| = 4$.

**Solução** Neste caso, o denominador do integrando pode ser fatorado como $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Portanto, o integrando $1/(z^2 + 1)$ não é analítico em $z = i$ e em $z = -i$. Estes dois pontos estão no interior de $C$. Usando decomposição em frações parciais, temos

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$$

e

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_C \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz.$$

**Figura 5.3.7** Contornos para o Exemplo 5

Agora, circundamos os pontos $z = i$ e $z = -i$ por contornos circulares $C_1$ e $C_2$, respectivamente, totalmente no interior de $C$. Podemos escolher $C_1$ como a circunferência $|z - i| = \frac{1}{2}$ e $C_2$ como a circunferência $|z + i| = \frac{1}{2}$ (Figura 5.3.7). Usando o Teorema 5.3.2, escrevemos

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_{C_1} \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2} \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz$$

$$= \frac{1}{2i}\oint_{C_1} \frac{1}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\oint_{C_1} \frac{1}{z+i}dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2} \frac{1}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\oint_{C_2} \frac{1}{z+i}dz. \quad (9)$$

Como $1/(z + i)$ é analítica em $C_1$ e em cada ponto em seu interior e como $1/(z - i)$ é analítica em $C_2$ e em cada ponto em seu interior, (4) indica que as segunda e terceira integrais em (9) são zero. Além disso, de (6), com $n = 1$, temos

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i \quad \text{e} \quad \oint_{C_2} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i.$$

Com isso, (9) passa a

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \pi - \pi = 0.$$

□

## Observações

**Figura 5.3.8** O contorno $C$ é fechado, mas não é simples

Na discussão anterior assumimos que $C$ é um contorno fechado simples; ou seja, não há cruzamentos na curva que define $C$. Embora não provemos, pode ser mostrado que o teorema de Cauchy-Goursat é válido para qualquer contorno fechado $C$ em um domínio simplesmente conexo $D$. O contorno mostrado na Figura 5.3.8 é fechado, mas não é simples. Mesmo assim, se $f$ for analítica em $D$, $\oint_C f(z)\,dz = 0$. (Problema 23 do Conjunto de Exercícios 5.3.)

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.3 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–8, mostre que $\oint_C f(z)\,dz = 0$, onde $f$ é a função dada e $C$, a circunferência unitária $|z| = 1$.

1. $f(z) = z^3 - 1 + 3i$
2. $f(z) = z^2 + \frac{1}{z-4}$
3. $f(z) = \frac{z}{2z+3}$
4. $f(z) = \frac{z-3}{z^2+2z+2}$
5. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2-25)(z^2+9)}$
6. $f(z) = \frac{e^z}{2z^2+11z+15}$
7. $f(z) = \tan z$
8. $f(z) = \frac{z^2-9}{\cosh z}$

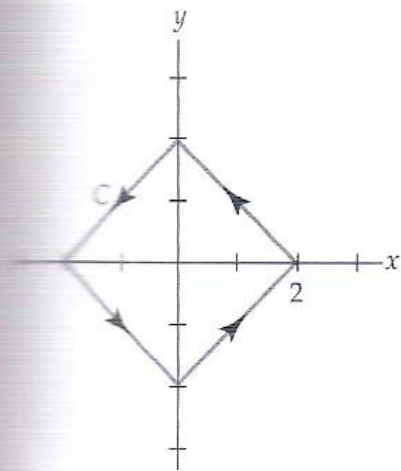



Figura 5.3.9 Figura para o Problema 9

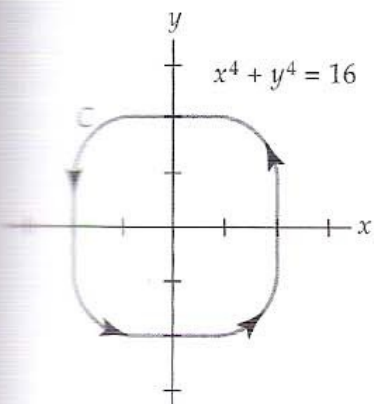



Figura 5.3.10 Figura para o Problema 10

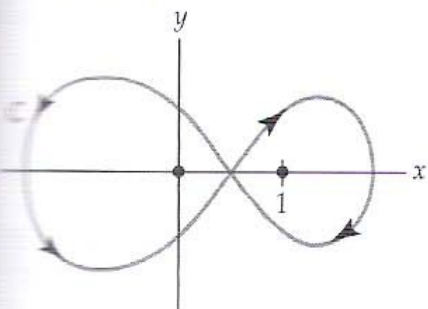



Figura 5.3.11 Figura para o Problema 23

**9.** Calcule $\oint_C \frac{1}{z}\,dz$, onde $C$ é o contorno mostrado na Figura 5.3.9.

**10.** Calcule $\oint_C \frac{5}{z+1+i}$, onde $C$ é o contorno mostrado na Figura 5.3.10.

Nos Problemas 11–22, use qualquer um dos resultados desta seção para calcular a integral dada ao logo do(s) contorno(s) fechado(s) indicado(s).

**11.** $\oint_C \left(z+\frac{1}{z}\right) dz;\ |z|=2$

**12.** $\oint_C \left(z+\frac{1}{z^2}\right) dz;\ |z|=2$

**13.** $\oint_C \frac{z}{z^2-\pi^2}\,dz;\ |z|=3$

**14.** $\oint_C \frac{10}{(z+i)^4}\,dz;\ |z+i|=1$

**15.** $\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z}\,dz$; **(a)** $|z|=\frac{1}{2}$, **(b)** $|z|=2$, **(c)** $|z-3i|=1$

**16.** $\oint_C \frac{2z}{z^2+3}\,dz$; **(a)** $|z|=1$, **(b)** $|z-2i|=1$, **(c)** $|z|=4$

**17.** $\oint_C \frac{-3z+2}{z^2-8z+12}\,dz$; **(a)** $|z-5|=2$, **(b)** $|z|=9$

**18.** $\oint_C \left(\frac{3}{z+2}-\frac{1}{z-2i}\right) dz$; **(a)** $|z|=5$, **(b)** $|z-2i|=\frac{1}{2}$

**19.** $\oint_C \frac{z-1}{z(z-i)(z-3i)}\,dz;\ |z-i|=\frac{1}{2}$

**20.** $\oint_C \frac{1}{z^3+2iz^2}\,dz;\ |z|=1$

**21.** $\oint_C \mathrm{Ln}(z+10)\,dz;\ |z|=2$

**22.** $\oint_C \left[\frac{5}{(z-2)^3}+\frac{3}{(z-2)^2}-\frac{10}{z-2}+7\csc z\right] dz;\ |z-2|=\frac{1}{2}$

**23.** Calcule $\oint_C \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz$, onde $C$ é o contorno "figura de oito" mostrado na Figura 5.3.11. [*Sugestão*: expresse $C$ como a união de duas curvas fechadas $C_1$ e $C_2$.]

**24.** Seja $z_0$ um número complexo constante qualquer interior a um contorno fechado simples qualquer $C$. Mostre que, para um inteiro positivo $n$,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

Nos Problemas 25 e 26, calcule a dada integral de contorno.

**25.** $\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3}-3\bar{z}\right) dz$, onde $C$ é a circunferência unitária $|z|=1$.

**26.** $\oint_C (z^3+z^2+\mathrm{Re}(z))\,dz$, onde $C$ é o triângulo com vértices em $z=0$, $z=1+2i$ e $z=1$.

## Foco em Conceitos

**27.** Explique por que $\oint_C f(z)\,dz=0$ para cada uma das seguintes funções, sendo $C$ um contorno fechado simples qualquer no plano complexo.

(a) $f(z)=(5iz^4-4z^2+2-6i)^9$

(b) $f(z)=(z^2-3iz)e^{5z}$

(c) $f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{e^{z^2}}$

(d) $f(z)=z\cos^2 z$

**28.** Descreva contornos $C$ para os quais $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cada uma das seguintes funções:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + z}$ (b) $f(z) = \csc z$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$ (d) $f(z) = \operatorname{Ln} z$

**29.** Explique por que a integral no Problema 25 é igual a

$$\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - \frac{3}{z}\right) dz$$

e, usando (6), por que esta forma facilita um pouco o cálculo da integral.

**Figura 5.3.12** Figura para o Problema 30

**30.** Calcule $\int_C e^z\,dz$ de $z = 0$ a $z = 2 + 2i$, ao longo do contorno $C$ mostrado na Figura 5.3.1 que consiste na reta $y = x$ e na circunferência tangente à reta em $(1, 1)$.

**31.** Do Exemplo 1, sabemos o valor de $\oint_C e^z dz$ para qualquer contorno fechado simples $C$ plano complexo. Em particular, use $|z| = 1$ como $C$ e a parametrização $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le$ e calcule os valores das seguintes integrais reais

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \operatorname{sen}(\theta + \operatorname{sen}\theta)d\theta \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \operatorname{sen}\theta)d\theta.$$

**32.** Seja $n$ um inteiro positivo. Use uma integral de contorno complexa para mostrar que

$$\int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen} n\theta}\cos(\theta - \cos n\theta)\,d\theta \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen} n\theta}\operatorname{sen}(\theta - \cos n\theta)\,d\theta = 0.$$

[*Sugestão*: modifique o integrando do Problema 31.]

## 5.4 Independência de Percurso

Na Seção 5.1 vimos que quando uma função real $f$ tem uma antiderivada elementar, ou seja, uma função $F$ tal que $F'(x) = f(x)$, uma integral definida por ser calculada com o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Vale notar que $\int_a^b f(x)\,dx$ depende apenas dos números $a$ e $b$ nos pontos inicial e terminal do intervalo de integração. Em contraste, o valor de uma integral de linha real $\int_C P\,dx + Q\,dy$ em geral depende da curva $C$. No entanto, existem integrais $\int_C y\,dx + x\,dy$ cujo valor depende apenas dos pontos inicial $A$ e terminal $B$ na curva $C$, e não da curva $C$ propriamente dita. Neste caso, dizemos que a integral de linha **independe do percurso**. Por exemplo, $\int_C y\,dx + x\,dy$ independe do percurso (Problemas 19–22 do Conjunto de Exercícios 5.1). Uma integral de linha que independe do percurso pode ser calculada de modo similar a (1). Portanto, parece natural perguntar:

*Existe uma versão complexa do teorema fundamental do cálculo?*
*Uma integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ pode independer do percurso?*

Nesta seção, veremos que a resposta a estas duas perguntas é sim.

**Independência de Percurso** A definição de **independência de percurso** para uma integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ é, essencialmente, a mesma de uma integral de linha real $\int_C P\,dx + Q\,dy$.

**Definição 5.4.1 Independência de Percurso**

Sejam $z_0$ e $z_1$ pontos em um domínio $D$. Uma integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ **independe do percurso** caso seu valor seja o mesmo para todos os percursos $C$ em $D$ com ponto inicial $z_0$ e ponto terminal $z_1$

Figura 5.4.1 Se $f$ for analítica em $D$, as integrais em $C$ e em $C_1$ são iguais

No fim da seção anterior, notamos que o teorema de Cauchy-Goursat também é válido para contornos fechados, não apenas contornos fechados simples, em um domínio simplesmente conexo $D$. Agora, suponhamos, como mostrado na Figura 5.4.1, que $C$ e $C_1$ sejam dois contornos posicionados inteiramente em um domínio simplesmente conexo $D$, com ponto inicial $z_0$ e ponto terminal $z_1$. Notemos que a união de $C$ com a curva oposta $-C$ forma um contorno fechado. Dessa forma, se $f$ for analítica em $D$, o teorema de Cauchy-Goursat indica que

$$\int_C f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz = 0. \tag{2}$$

Contudo, (2) é equivalente a

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz. \tag{3}$$

O resultado em (3) também é um exemplo do princípio de deformação de contornos introduzido em (5) da Seção 5.3. Resumimos este último resultado como um teorema.

**Teorema 5.4.1 Analiticidade Implica Independência de Percurso**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$ e seja $C$ um contorno qualquer em $D$. Então, $\int_C f(z)\,dz$ independe do percurso $C$.

EXEMPLO 1 **Escolha de um Percurso Diferente**

Calculemos $\int_C 2z\,dz$, onde $C$ é o contorno mostrado em cinza na Figura 5.4.2.

**Solução** Como a função $f(z) = 2z$ é inteira, podemos, segundo o Teorema 5.4.1, substituir o percurso suave por partes $C$ por qualquer outro contorno conveniente $C_1$ que una $z_0 = -1$ a $z_1 = -1 + i$. Em particular, escolhemos o percurso $C_1$ como o segmento de reta vertical $x = -1$, $0 \le y \le 1$, mostrado em preto na Figura 5.4.2. Neste percurso, $z = -1 + iy$ e $dz = i dy$. Portanto,

$$\int_C 2z\,dz = \int_{C_1} 2z\,dz = -2\int_0^1 y\,dy - 2i\int_0^1 dy = -1 - 2i.$$

Figura 5.4.2 Contorno para o Exemplo 1

❑

Uma integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ que independe do percurso $C$ é, em geral, escrita como $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$, onde $z_0$ e $z_1$ são os pontos inicial e terminal de $C$, respectivamente. Portanto, no Exemplo 1 podemos escrever $\int_{-1}^{-1+i} 2z\,dz$.

Existe uma forma mais simples de calcular a integral de contorno do Exemplo 1; mas, antes de prosseguir, precisamos de outra definição.

**Definição 5.4.2 Antiderivada**

Seja $f$ uma função contínua em um domínio $D$. Se existir uma função $F$ tal que $F'(z) = f(z)$ em cada $z$ em $D$, $F$ é denominada uma **antiderivada** ou **primitiva** de $f$.

Por exemplo, a função $F(z) = -\cos z$ é uma antiderivada de $f(z) = \text{sen } z$, pois $F'(z) = \text{sen } z$. Como no cálculo de uma variável real, a antiderivada mais geral, ou **integral indefinida**, de uma função $f(z)$ é escrita como $\int f(z)dz = F(z) + C$, onde $F'(z) = f(z)$ e $C$ é uma constante complexa arbitrária. Por exemplo, $\int \text{sen } z\,dz = -\cos z + C$.

Recordemos que diferenciabilidade implica continuidade.

Como uma antiderivada $F$ de uma função $f$ tem uma derivada em cada ponto em um domínio $D$, ela é necessariamente analítica e, portanto, contínua em cada ponto em $D$.

Com isso, estamos finalmente em condição de apresentar o análogo complexo de (1).

**Teorema 5.4.2 Teorema Fundamental para Integrais de Contorno**

Seja $f$ uma função contínua em um domínio $D$ e seja $F$ uma antiderivada de $f$ em $D$. Então, para qualquer contorno $C$ em $D$ com ponto inicial $z_0$ e ponto terminal $z_1$,

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0). \tag{4}$$

**Prova** Provaremos (4) para o caso em que $C$ é uma curva suave parametrizada por $z = z(t)$, $a \le t \le b$. Os pontos inicial e terminal em $C$ são $z(a) = z_0$ e $z(b) = z_1$. Usando (11) da Seção 5.2 e o fato de que $F'(z) = f(z)$ para cada $z$ em $D$, temos

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,dt\\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt \quad \leftarrow \text{regra da cadeia}\\ &= F(z(t))\,\Big|_a^b\\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_1) - F(z_0).\end{aligned}$$

□

**EXEMPLO 2 Aplicação do Teorema 5.4.2**

No Exemplo 1 vimos que a integral $\int_C 2z\,dz$, com $C$ mostrado na Figura 5.4.2, independia do percurso. Por ser uma função inteira, $f(z) = 2z$ é contínua. Além disso, $F(z) = z^2$ é uma antiderivada de $f$, pois $F'(z) = 2z = f(z)$. Portanto, de (4) do Teorema 5.4.2, temos

$$\int_{-1}^{-1+i} 2z\,dz = z^2\Big|_{-1}^{-1+i} = (-1+i)^2 - (-1)^2 = -1 - 2i.$$

□

**EXEMPLO 3 Aplicação do Teorema 5.4.2**

Calculemos $\int_C \cos z\,dz$, sendo $C$ um contorno qualquer com ponto inicial $z_0 = 0$ e ponto terminal $z_1 = 2 + i$.

**Solução** $F(z) = \text{sen}\, z$ é uma antiderivada de $f(z) = \cos z$, pois $F'(z) = \cos z = f(z)$. Portanto, de (4), temos

$$\int_C \cos z\,dz = \int_0^{2+i} \cos z\,dz = \text{sen}\, z\,\Big|_0^{2+i} = \text{sen}(2+i) - \text{sen}\,0 = \text{sen}(2+i).$$

Caso desejemos um número complexo da forma $a + ib$ como resposta, podemos usar $\text{sen}(2+i) \approx 1{,}4031 - 0{,}4891i$ (parte (*b*) do Exemplo 1 da Seção 4.3). Logo,

$$\int_C \cos z\,dz = \int_0^{2+i} \cos z\,dz \approx 1{,}4031 - 0{,}4891i.$$

□

**Algumas Conclusões** Podemos tirar várias conclusões do Teorema 5.4.2. Primeira, observemos que se o contorno $C$ for fechado, $z_0 = z_1$ e, consequentemente,

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Segunda, como o valor de $\int_C f(z)\,dz$ depende apenas dos pontos $z_0$ e $z_1$, este valor é o mesmo para qualquer contorno $C$ em $D$ que conecte esses pontos. Em outras palavras,

*Se uma função contínua $f$ tiver uma antiderivada $F$ em $D$, então $\int_C f(z)\,dz$ independe do percurso.* (6)

Temos, ainda, a seguinte condição suficiente para a existência de uma antiderivada:

*Se $f$ for contínua e $\int_C f(z)\,dz$ independer do percurso $C$ em um domínio $D$, então $f$ tem uma antiderivada em todos os pontos em $D$.* (7)

A última asserção é importante e merece uma prova.

**Prova de (7)** Assumamos que $f$ é contínua, que $\int_C f(z)\,dz$ independe do percurso em um domínio $D$ e que $F$ é uma função definida por $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$, onde $s$ denota uma variável complexa, $z_0$ é um ponto fixo em $D$ e $z$ representa um ponto arbitrário em $D$. Desejamos mostrar que $F'(z) = f(z)$, ou seja,

Importante ➡

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds \tag{8}$$

*é uma antiderivada de $f$ em $D$.* Mas,

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\,ds. \tag{9}$$

Figura 5.4.3 Contorno usado na prova de (7)

Como $D$ é um domínio, podemos escolher $\Delta z$ de modo que $z + \Delta z$ esteja em $D$. Além disso, $z$ e $z + \Delta z$ podem ser conectados por um segmento de reta, como ilustrado na Figura 5.4.3. Este é o contorno que usaremos na última integral em (9). Com $z$ fixo, podemos escrever

$$f(z)\Delta z = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds$$

ou

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds. \tag{10}$$

De (9) e (10), temos

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds.$$

Como $f$ é contínua no ponto $z$, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ sempre que $|s - z| < \delta$. Por conseguinte, se escolhermos $\Delta z$ de modo que $|\Delta z| < \delta$, da desigualdade $ML$ da Seção 5.2, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta z}\right|\left|\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds\right| \le \left|\frac{1}{\Delta z}\right| \varepsilon\,|\Delta z| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Assim, mostramos que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \quad \text{ou} \quad F'(z) = f(z).$$

❑

Se $f$ for uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$, $f$ é necessariamente contínua em todo $D$. Este fato, os resultados do Teorema 5.4.1 e (7) levam a um teorema que afirma que uma função analítica possui uma antiderivada analítica.

**Teorema 5.4.3 Existência de uma Antiderivada**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$. Então, $f$ possui uma antiderivada em $D$; ou seja, existe uma função $F$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z$ em $D$.

É preciso ter cuidado ao usar Ln $z$ como uma antiderivada de $1/z$. ➡

Em (21) da Seção 4.1 vimos que para $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, $1/z$ é a derivada de Ln $z$. Isto significa que em algumas circunstâncias Ln $z$ é uma antiderivada de $1/z$. Contudo, devemos ser cuidadosos ao usar esse resultado. Por exemplo, suponhamos que $D$ é todo o plano complexo sem a origem. A função $1/z$ é analítica neste domínio *multiplamente conexo*. Se $C$ for qualquer contorno fechado simples que contém a origem (5) *não* resulta em $\oint_C dz/z = 0$. Na verdade, de (6) da Seção 5.3, com $n = 1$ e $z_0 = 0$, temos

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Neste caso Ln $z$ não é uma antiderivada de $1/z$ em $D$, pois não é analítica em $D$. Recordemos que Ln $z$ não é analítica no eixo real não positivo, que é o corte de ramo do ramo principal $f_1(z)$ do logaritmo (Seção 4.1).

---

EXEMPLO 4 **Uso da Função Logarítmica**

Calculemos $\int_C \frac{1}{z}\,dz$, onde $C$ é o contorno mostrado na Figura 5.4.4.

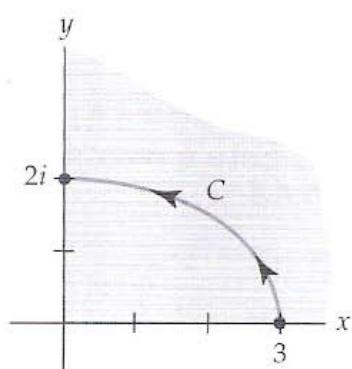



**Figura 5.4.4** Contorno para o Exemplo 4

**Solução** Suponhamos que $D$ seja o domínio simplesmente conexo definido por $x > 0$, $y > 0$. Em outras palavras, $D$ é o primeiro quadrante no plano $z$. Neste caso, Ln $z$ é uma antiderivada de $1/z$, pois as duas funções são analíticas em $D$. Portanto, de (4),

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \text{Ln}\, z\Big|_3^{2i} = \text{Ln}\, 2i - \text{Ln}\, 3.$$

De (14) da Seção 4.1,

$$\text{Ln}\, 2i = \log_e 2 + \frac{\pi}{2}i \qquad \text{e} \qquad \text{Ln}\, 3 = \log_e 3$$

$\log_e 2 - \log_e 3 = \log_e \frac{2}{3}$ ➡ de modo que

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \log_e \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}i \approx -0{,}4055 + 1{,}5708i.$$

---

EXEMPLO 5 **Uso de uma Antiderivada de $z^{-1/2}$**

Calculemos $\int_C \frac{1}{z^{1/2}}\,dz$, onde $C$ é o segmento de reta entre $z_0 = i$ e $z_1 = 9$.

**Solução** Tomaremos $f_1(z) = z^{1/2}$ como o ramo principal da função raiz quadrada. No domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, a função $f_1(z) = 1/z^{1/2} = z^{-1/2}$ é analítica e possui a antiderivada $F(z) = 2z^{1/2}$ [(9) da Seção 4.2]. Logo,

(Problema 5 do Conjunto de Exercícios 1.4)

$$\int_i^9 \frac{1}{z^{1/2}}dz = 2z^{1/2}\Big|_i^9 = 2\left[3 - \overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right]$$

$$= (6 - \sqrt{2}) - i\sqrt{2}.$$

**Observações**

## *Comparação com Análise Real*

($i$) Em cálculo o estudo de técnicas de integração mostra que integrais indefinidas de certos tipos de produtos podem ser calculadas através de integração por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx. \tag{11}$$

Em geral (11) é usada na forma mais compacta $\int udv = uv - \int vdu$. A fórmula (11) também é válida na análise complexa. Suponhamos que $f$ e $g$ sejam analíticas em um domínio simplesmente conexo $D$. Então,

$$\int f(z)g'(z)dz = f(z)g(z) - \int g(z)f'(z)dz. \tag{12}$$

Além disso, se $z_0$ e $z_1$ forem os pontos inicial e terminal de um contorno $C$ totalmente posicionado em $D$, então

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\,dz = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)\,dz. \tag{13}$$

Esses resultados podem ser facilmente provados por aplicação do Teorema 5.4.2 à função $\frac{d}{dz}fg$. (Problemas 21–24 do Conjunto de Exercícios 5.4.)

($ii$) Se $f$ for uma função real contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, existe um número $c$ no intervalo aberto $(a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a). \tag{14}$$

O resultado em (14) é conhecido como **teorema do valor médio** para integrais definidas. Se $f$ for uma função complexa analítica em um domínio simplesmente conexo $D$, $f$ é contínua em todos os pontos em um contorno $C$ em $D$ com ponto inicial $z_0$ e ponto terminal $z_1$. Poderíamos esperar um resultado parecido com (14) para uma integral $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$. No entanto, não existe um análogo complexo a (14).

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.4 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1 e 2, calcule a integral dada para o contorno $C$ mostrado na figura, usando (**a**) um percurso alternativo de integração e (**b**) o Teorema 5.4.2.

**1.** $\int_C (4z - 1)\,dz$

**2.**  $\int_C e^z\,dz$

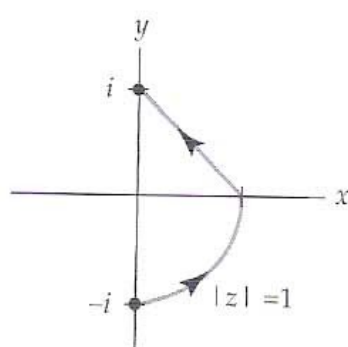



**Figura 5.4.5** Figura para o Problema 1

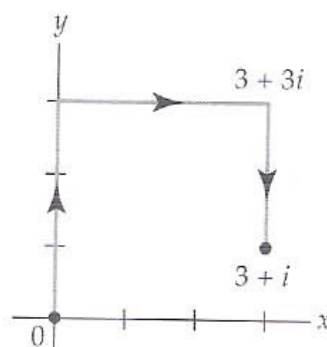



**Figura 5.4.6** Figura para o Problema 2

Nos Problemas 3 e 4, calcule a integral dada ao longo do contorno indicado $C$.

**3.** $\int_C 2z\,dz$, onde $C$ é $z(t) = 2t^3 + i(t^4 - 4t^3 + 2)$, $-1 \le t \le 1$

**4.** $\int_C 2z\,dz$, onde $C$ é $z(t) = 2\cos^3 \pi t - i\,\text{sen}^2 \frac{\pi}{4}t$, $0 \le t \le 2$

Nos Problemas 5–20, use o Teorema 5.4.2 para calcular a integral dada. Escreva as respostas na forma $a + ib$.

**5.** $\int_0^{3+i} z^2\,dz$

**6.** $\int_{-2i}^{1} (3z^2 - 4z + 5i)\,dz$

**7.** $\int_{1-i}^{1+i} z^3\,dz$

**8.** $\int_{-3i}^{2i} (z^3 - z)\,dz$

**9.** $\int_{-i/2}^{1-i} (2z+1)^2\,dz$

**10.** $\int_1^i (iz+1)^3\,dz$

**11.** $\int_{i/2}^{i} e^{\pi z}\,dz$

**12.** $\int_{1-i}^{1+2i} ze^{z^2}\,dz$

**13.** $\int_{\pi}^{\pi+2i} \operatorname{sen}\frac{z}{2}\,dz$

**14.** $\int_{1-2i}^{\pi i} \cos z\,dz$

**15.** $\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z\,dz$

**16.** $\int_i^{1+(\pi/2)i} \operatorname{senh} 3z\,dz$

**17.** $\int_C \frac{1}{z}\,dz$, $C$ é o arco de circunferência $z = e^{it}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

**18.** $\int_C \frac{1}{z}\,dz$, $C$ é o segmento de reta entre $1 + i$ e $4 + 4i$.

**19.** $\int_{-4i}^{4i} \frac{1}{z^2}\,dz$, $C$ é qualquer contorno que passa pela origem.

**20.** $\int_{1-i}^{1+\sqrt{3}i} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) dz$, $C$ é qualquer contorno no semiplano direito $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Nos Problemas 21–24, use a integração por partes (13) para calcular a integral dada. Escreva as respostas na forma $a + ib$.

**21.** $\int_{\pi}^{i} e^z \cos z\,dz$

**22.** $\int_0^i z \operatorname{sen} z\,dz$

**23.** $\int_i^{1+i} ze^z\,dz$

**24.** $\int_0^{\pi i} z^2 e^z\,dz$

Nos Problemas 25 e 26, use o Teorema 5.4.2 para calcular a integral dada. Em cada integral, $z^{1/2}$ é o ramo principal da função raiz quadrada. Escreva as respostas na forma $a + ib$.

**25.** $\int_C \frac{1}{4z^{1/2}}\,dz$, $C$ é o arco de círculo $z = e^{it}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

**26.** $\int_C 3z^{1/2}\,dz$, $C$ é o segmento de reta entre $z_0 = 1$ e $z_1 = 9i$.

## Foco em Conceitos

**27.** Determine uma antiderivada de $f(z) = \operatorname{sen} z^2$. Não imagine coisas complicadas.

**28.** Determine um domínio $D$ no qual $f(z) = z(z+1)^{1/2}$ é analítica e, então, encontre uma antiderivada de $f$ em $D$.

**29.** Seja $\alpha = a + ib$ uma constante complexa.

(a) Use o Teorema 5.4.2 para calcular $\int_{x_0}^{x} e^{\alpha z}\,dz$, sendo $x_0$ e $x$ valores reais.

(b) Com a parametrização $z(t) = t$, $x_0 \le t \le x$, explique por que a parte (a) e o Teorema 5.2.1 podem ser usados para deduzir a fórmula integral (real)

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

**30.** Calcule $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$. [*Sugestão*: Veja o Problema 29.]

## 5.5 Fórmulas Integrais de Cauchy e Suas Consequências

Nas últimas duas seções vimos a importância do teorema de Cauchy-Goursat no cálculo de integrais de contorno. Nesta seção examinaremos diversas consequências do teorema de Cauchy-Goursat. Sem dúvida, a mais significativa é o seguinte resultado:

*O valor de uma função analítica $f$ em qualquer ponto $z_0$ em um domínio simplesmente conexo pode ser representado por uma integral de contorno.*

Após provarmos esta asserção, vamos usá-la para mostrar que:

*Uma função analítica $f$ em um domínio simplesmente conexo possui derivadas de todas as ordens.*

As ramificações desses dois resultados nos manterão ocupados no resto desta seção e, também, no próximo capítulo.

### 5.5.1 Duas Fórmulas Integrais de Cauchy

**Primeira Fórmula** Se $f$ for uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$ e $z_0$ for um ponto qualquer em $D$, o quociente $f(z)/(z - z_0)$ não é definido em $z_0$ e, portanto, *não* é analítico em $D$. Dessa forma, pelo teorema de Cauchy-Goursat *não* podemos concluir que a integral de $f(z)/(z - z_0)$ ao longo de um contorno fechado simples $C$ que contém $z_0$ é zero. De fato, como veremos agora, a integral de $f(z)/(z - z_0)$ ao longo de $C$ tem o valor $2\pi i f(z_0)$. A primeira das duas fórmulas notáveis é conhecida como **fórmula integral de Cauchy**.

**Teorema 5.5.1 Fórmula Integral de Cauchy**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$ e seja $C$ um contorno fechado simples qualquer totalmente posicionado em $D$. Então, para qualquer ponto $z_0$ no interior de $C$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{1}$$

**Prova** Sejam um domínio simplesmente conexo $D$, um contorno fechado simples $C$ em $D$ e um ponto $z_0$ no interior de $C$. Além disso, seja $C_1$ uma circunferência centrada em $z_0$ com raio suficientemente pequeno para que $C_1$ esteja no interior de $C$. Usando o princípio de deformação de contornos, (5) da Seção 5.3, podemos escrever:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{2}$$

Desejamos mostrar que o valor da integral no lado direito é $2\pi i f(z_0)$. Para isso, somamos e subtraímos a constante $f(z_0)$ ao numerador do integrando:

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz &= \oint_{C_1} \frac{f(z_0) - f(z_0) + f(z)}{z - z_0}\,dz.\\ &= f(z_0)\oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0}\,dz + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz.\end{aligned} \tag{3}$$

De (6) da Seção 5.3, sabemos que

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi i \tag{4}$$

## 5.5 Fórmulas Integrais de Cauchy e Suas Consequências

Nas últimas duas seções vimos a importância do teorema de Cauchy-Goursat no cálculo de integrais de contorno. Nesta seção examinaremos diversas consequências do teorema de Cauchy-Goursat. Sem dúvida, a mais significativa é o seguinte resultado:

> *O valor de uma função analítica $f$ em qualquer ponto $z_0$ em um domínio simplesmente conexo pode ser representado por uma integral de contorno.*

Após provarmos esta asserção, vamos usá-la para mostrar que:

> *Uma função analítica $f$ em um domínio simplesmente conexo possui derivadas de todas as ordens.*

As ramificações desses dois resultados nos manterão ocupados no resto desta seção e, também, no próximo capítulo.

### 5.5.1 Duas Fórmulas Integrais de Cauchy

**Primeira Fórmula** Se $f$ for uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$ e $z_0$ for um ponto qualquer em $D$, o quociente $f(z)/(z - z_0)$ não é definido em $z_0$ e, portanto, *não* é analítico em $D$. Dessa forma, pelo teorema de Cauchy-Goursat *não* podemos concluir que a integral de $f(z)/(z - z_0)$ ao longo de um contorno fechado simples $C$ que contém $z_0$ é zero. De fato, como veremos agora, a integral de $f(z)/(z - z_0)$ ao longo de $C$ tem o valor $2\pi i f(z_0)$. A primeira das duas fórmulas notáveis é conhecida como **fórmula integral de Cauchy**.

**Teorema 5.5.1 Fórmula Integral de Cauchy**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$ e seja $C$ um contorno fechado simples qualquer totalmente posicionado em $D$. Então, para qualquer ponto $z_0$ no interior de $C$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{1}$$

**Prova** Sejam um domínio simplesmente conexo $D$, um contorno fechado simples $C$ em $D$ e um ponto $z_0$ no interior de $C$. Além disso, seja $C_1$ uma circunferência centrada em $z_0$ com raio suficientemente pequeno para que $C_1$ esteja no interior de $C$. Usando o princípio de deformação de contornos, (5) da Seção 5.3, podemos escrever:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{2}$$

Desejamos mostrar que o valor da integral no lado direito é $2\pi i f(z_0)$. Para isso, somamos e subtraímos a constante $f(z_0)$ ao numerador do integrando:

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz &= \oint_{C_1} \frac{f(z_0) - f(z_0) + f(z)}{z - z_0}\,dz.\\ &= f(z_0)\oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0}\,dz + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz. \end{aligned} \tag{3}$$

De (6) da Seção 5.3, sabemos que

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi i \tag{4}$$

de modo que (3) passa a

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0) + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \qquad (5)$$

Como $f$ é contínua em $z_0$, sabemos que para qualquer número $\varepsilon > 0$ pequeno existe um número $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ sempre que $|z - z_0| < \delta$. Em particular, se escolhermos a circunferência $C_1$ como $|z - z_0| = Ð\delta < \delta$, usando a desigualdade $ML$ (Teorema 5.2.3), vemos que o valor absoluto da integral no lado direito da igualdade em (5) satisfaz

$$\left| \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \le \frac{\varepsilon}{\delta/2} 2\pi \left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\pi\varepsilon.$$

Em outras palavras, o valor absoluto da integral pode ser feito arbitrariamente pequeno fazendo o raio da circunferência $C_1$ suficientemente pequeno. Isso pode ocorrer apenas se a integral for 0. Assim, (5) passa a $\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$. Para completar a prova o teorema, basta dividir os dois lados do último resultado por $2\pi i$. ❑

*Nota* ➡ Como o símbolo $z$ representa um ponto no contorno $C$, (1) indica que *os valores de uma função analítica $f$ em pontos $z_0$ no interior de um contorno fechado simples $C$ são determinados pelos valores de $f$ no contorno $C$.*

A fórmula integral de Cauchy (1) pode ser usada para calcular integrais de contorno. Como muitas vezes trabalhamos sem termos um domínio simplesmente conexo definido de forma explícita, uma versão mais prática do Teorema 5.5.1 é:

*Se $f$ for uma função analítica em um contorno fechado simples $C$ e em todos os pontos no interior de $C$ e se $z_0$ for um ponto qualquer no interior de $C$, então* $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$

EXEMPLO 1 **Uso da Fórmula Integral de Cauchy**

Calculemos $\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i}\, dz$, onde $C$ é a circunferência $|z| = 2$.

**Solução** Primeiro, identificamos $f(z) = z^2 - 4z + 4$, e $z_0 = -i$ como um ponto no interior da circunferência $C$. A seguir, observamos que $f$ é analítica no contorno $C$ e em todos os pontos em seu interior. Portanto, usando a fórmula integral de Cauchy (1), obtemos

$$\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i}\, dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3 + 4i) = \pi(-8 + 6i).$$

❑

EXEMPLO 2 **Uso da Fórmula Integral de Cauchy**

Figura 5.5.1 Contorno para o Exemplo 2

Calculemos $\oint_C \frac{z}{z^2 + 9}\, dz$, onde $C$ é a circunferência $|z - 2i| = 4$.

**Solução** Fatorando o denominador como $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$, vemos que $3i$ é o único ponto no interior do contorno fechado $C$ onde o integrando deixa de ser analítico (Figura 5.5.1). Reescrevendo o integrando como

$$\frac{z}{z^2 + 9} = \frac{\left.\dfrac{z}{z + 3i}\right\} f(z)}{z - 3i},$$

podemos identificar $f(z) = z/(z + 3i)$. A função $f$ é analítica em todos os pontos no interior e no contorno de $C$. Assim, usando a fórmula integral de Cauchy (1), obtemos

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,dz = \int_C \frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}\,dz = 2\pi i\, f(3i) = 2\pi i \frac{3i}{6i} = \pi i.$$

❑

**Segunda Fórmula** Agora usaremos o Teorema 5.5.1 para provar que os valores das derivadas $f^{(n)}(z_0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, de uma função analítica também são dados por uma fórmula integral. Esta segunda fórmula integral é similar a (1) e conhecida como **fórmula integral de Cauchy para derivadas**.

**Teorema 5.5.2 Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$ e seja $C$ um contorno fechado simples qualquer totalmente posicionado em $D$. Então, para qualquer ponto $z_0$ no interior de $C$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz. \tag{6}$$

**Prova Parcial** Provaremos (6) apenas para o caso $n = 1$. O resto da prova pode ser completado com aplicação do princípio de indução matemática. Iniciamos com a definição da derivada e usando (1):

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\,\Delta z}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right] \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\,dz. \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, façamos algumas considerações. A continuidade de $f$ no contorno $C$ garante que $f$ é limitada (Seção 2.6), ou seja, que existe um número real $M$ tal que $|f(z)| \le M$ para todos os pontos $z$ em $C$. Além disso, sejam $L$ o comprimento de $C$ e $\delta$ a menor distância entre pontos em $C$ e o ponto $z_0$. Portanto, para todos os pontos em $C$, temos

$$|z-z_0| \ge \delta \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{|z-z_0|^2} \le \frac{1}{\delta^2}.$$

Além disso, se escolhermos $|\Delta z| \le \frac{1}{2}\delta$, de (10) da Seção 1.2, obtemos

$$|z-z_0-\Delta z| \ge \big|\,|z-z_0| - |\Delta z|\,\big| \ge \delta - |\Delta z| \ge \tfrac{1}{2}\delta$$

de modo que
$$\frac{1}{|z-z_0-\Delta z|} \le \frac{2}{\delta}.$$

Então,

$$\begin{aligned} &\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\,dz\right| \\ &\qquad = \left|\oint_C \frac{-\Delta z\, f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\,dz\right| \le \frac{2ML\,|\Delta z|}{\delta^3}. \end{aligned}$$

Uma vez que a última expressão tende a zero quando $\Delta z \to 0$, mostramos que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz,$$

que é o resultado em (6) para $n = 1$. ❑

Como (1), a fórmula em (6) pode ser usada para calcular integrais.

---

**EXEMPLO 3 Uso da Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas**

Calculemos $\oint_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3}\,dz$, onde $C$ é a circunferência $|z|=1$.

**Solução** A inspeção do integrando mostra que este não é analítico em $z=0$ e em $z=-2i$; mas, apenas $z=0$ está no interior do contorno. Escrevendo o integrando como

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3} = \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}$$

podemos identificar $z_0=0$, $n=2$ e $f(z)=(z+1)/(z+2i)$. A regra de diferenciação de quocientes fornece $f''(z)=(2-4i)(z+2i)^3$, de modo que $f''(0)=(2i-1)/4i$. Assim, de (6) obtemos

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}i.$$

□

---

**EXEMPLO 4 Uso da Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas**

**Figura 5.5.2** Contorno para o Exemplo 4

Calculemos $\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$, onde $C$ é o contorno com formato do número oito mostrado na Figura 5.5.2.

**Solução** Embora $C$ não seja um contorno fechado simples, podemos imaginá-lo como a união de dois contornos fechados simples $C_1$ e $C_2$, como indicado na Figura 5.5.2. Como as setas em $C_1$ têm o sentido horário ou negativo, a curva oposta $-C_1$ tem orientação positiva. Portanto, escrevemos

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = \int_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$$

$$= -\oint_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = -I_1+I_2,$$

e agora estamos em condições de usar as fórmulas em (1) e em (6).

Para calcular $I_1$, identificamos $z_0=0$, $f(z)=(z^3+3)/(z-i)^2$ e $f(0)=-3$. De (1), temos

$$I_1 = \oint_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz = 2\pi i\,f(0) = 2\pi i(-3) = -6\pi i.$$

Para calcular $I_2$, identificamos $z_0=i$, $n=1$, $f(z)=(z^3+3)/z$, $f'(z)=(2z^3-3)/z^2$ e $f'(i)=3+2i$. De (6), obtemos

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(i) = 2\pi i(3+2i) = -4\pi+6\pi i.$$

Por fim, calculamos

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = -I_1+I_2 = 6\pi i + (-4\pi+6\pi i) = -4\pi+12\pi i.$$

□

## 5.5.2 Algumas Consequências de Fórmulas Integrais

Um imediato e importante corolário do Teorema 5.5.2 é resumido a seguir:

**Teorema 5.5.3 A Derivada de uma Função Analítica É Analítica**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$. Então, $f$ possui derivadas de todas as ordens em todos os pontos $z$ em $D$. As derivadas $f'$, $f''$, $f'''$, ... são funções analíticas em $D$.

Acabamos de ver que se uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for analítica em um domínio simplesmente conexo $D$, suas derivadas de todas as ordens existem em todos os pontos $z$ em $D$, de modo que $f'$, $f''$, $f'''$, ... são contínuas. De

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\vdots$$

também podemos concluir que as funções reais $u$ e $v$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em um ponto de analiticidade.

**Desigualdade de Cauchy** A seguir, apresentamos uma desigualdade resultante da fórmula integral de Cauchy para derivadas.

**Teorema 5.5.4 Desigualdade de Cauchy**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio simplesmente conexo $D$ e seja $C$ uma circunferência definida por $|z - z_0| = r$ e totalmente posicionada em $D$. Se $|f(z)| \leq M$ para todos os pontos $z$ em $C$, então

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}. \tag{7}$$

**Prova** Da hipótese,

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}}.$$

Portanto, de (6) e da desigualdade $ML$ (Teorema 5.2.3) temos

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$ □

O número $M$ no Teorema 5.5.4 depende da circunferência $|z - z_0| = r$. Contudo, notamos em (7) que se $n = 0$, $M \geq |f(z_0)|$ para *qualquer* circunferência $C$ centrada em $z_0$, desde que $C$ esteja totalmente posicionada em $D$. Em outras palavras, um limitante superior $M$ de $|f(z)|$ em $C$ não pode ser menor que $|f(z_0)|$.

**Teorema de Liouville** A desigualdade de Cauchy (7) é um ingrediente importante na prova do próximo resultado. Embora tenha o nome de "teorema de Liouville", este resultado provavelmente foi provado primeiro por Cauchy. A informação mais importante contida no teorema é que uma função inteira $f$, uma função analítica para todo $z$, não pode ser limitada a menos que seja uma constante.

**Teorema 5.5.5 Teorema de Liouville**

As únicas funções inteiras limitadas são constantes.

**Prova** Seja $f$ uma função inteira limitada, isto é, $|f(z)| \leq M$ para todo $z$. Então, para qualquer ponto $z_0$, (7) indica que Se $|f'(z_0)| \leq M/r$. Fazendo $r$ arbitrariamente grande, podemos tornar $|f'(z_0)|$ tão pequeno quanto queiramos. Isso significa que $f'(z_0) = 0$ para todos os pontos $z_0$ no plano complexo. Logo, pelo Teorema 3.2.3 $f$ deve ser uma constante.

**Teorema Fundamental da Álgebra** O Teorema 5.5.5 permite que provemos um resultado que, em geral, é ensinado em álgebra elementar mas nunca provado.

**Teorema 5.5.6 Teorema Fundamental da Álgebra**

Seja $p(z)$ um polinômio não constante; então, a equação $p(z) = 0$ tem pelo menos uma raiz.

**Prova** Suponhamos que o polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $n > 0$, não é 0 para qualquer número complexo $z$. Isso implica que o recíproco de $p$, $f(z) = 1/p(z)$, é uma função inteira. Mas,

$$|f(z)| = \frac{1}{|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|}$$

$$= \frac{1}{|z|^n \left|a_n + (a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n)\right|}.$$

Escolhamos um número real $M > 1$ tal que $M > |2na_j/a_n|$, para $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Então, para $|z| > M$ temos $|a_j/z^{n-j}| < |a_n|/2n$, de modo que

$$\left|a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z\right| \leq |a_n|/2n + \cdots + |a_n|/2n = |a_n|/2.$$

Da desigualdade (8) da Seção 1.2, temos:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^n \left||a_n| - |a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n|\right|}$$

$$\leq \frac{1}{M^n \left||a_n| - |a_n|/2\right|} = \frac{2}{M^n |a_n|}.$$

Assim, vemos que $f$ é limitada no exterior do disco $|z| \leq M$. No entanto, por ser contínua $f$ deve também ser limitada no disco $|z| \leq M$ (Seção 2.6). Concluímos que a função $f$ é uma função inteira limitada. O teorema de Liouville indica que $f$ é uma constante e, portanto, $p$ é uma constante. No entanto, isso contradiz a hipótese inicial de que $p$ *não* é um polinômio constante. Concluímos, portanto, que deve existir pelo menos um número $z$ para o qual $p(z) = 0$.

Deixamos como exercício mostrar, usando o Teorema 5.5.6, que se $p(z)$ for um polinômio não constante de grau $n$, então $p(z) = 0$ tem exatamente $n$ raízes (incluindo raízes múltiplas) (Problema 29 do Conjunto de Exercícios 5.5).

**Teorema de Morera** A prova do próximo teorema mitificou o nome do matemático italiano Giacinto Morera em textos sobre análise complexa. O teorema de Morera, que fornece uma condição suficiente para analiticidade, é muitas vezes tomado como o recíproco do teorema de Cauchy-Goursat. Para prová-lo, recorremos ao Teorema 5.5.3.

**Teorema 5.5.7 Teorema de Morera**

Se a função $f$ for contínua em um domínio simplesmente conexo $D$ e se $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para qualquer contorno fechado simples $C$ em $D$, então $f$ é analítica em $D$.

**Prova** Das hipóteses da continuidade de $f$ e de $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para qualquer contorno fechado simples $C$ em $D$, concluímos que $\int_C f(z)\,dz$ independe do percurso. Na prova de (7) da Seção 5.4, vimos que a função $F$ definida por $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$ (onde $s$ denota uma variável complexa, $z_0$ é um ponto fixo em $D$ e $z$ representa um ponto qualquer em $D$) é uma antiderivada de $f$; ou seja, $F'(z) = f(z)$. Consequentemente, $F$ é analítica em $D$. Além disso, segundo o Teorema 5.5.3, $F'(z)$ é analítica. Como $f(z) = F'(z)$, concluímos que $f$ é analítica em $D$. ❑

Uma prova alternativa deste resultado é delineada no Problema 31 do Conjunto de Exercícios 5.5.

Poderíamos prosseguir enunciando diversos outros resultados cujas provas se baseiam em fundamentos da teoria que incluem o teorema de Cauchy-Goursat e as fórmulas integrais de Cauchy. Contudo, pararemos após o próximo teorema.

Na Seção 2.6 vimos que, se uma função $f$ for contínua em uma região limitada e fechada $R$, $f$ é limitada; ou seja, existe uma constante $M$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z$ em $R$. Se a fronteira de $R$ for uma curva fechada simples $C$, o próximo teorema, que apresentaremos sem prová-lo, nos informa que $|f(z)|$ assume seu valor máximo em algum ponto $z$ na fronteira $C$.

**Teorema 5.5.8 Teorema do Módulo Máximo**

Seja $f$ uma função analítica e não constante em uma região fechada $R$ limitada por uma curva fechada simples $C$. Então, o módulo $|f(z)|$ atinge seu valor máximo em $C$.

Se a condição $f(z) \neq 0$ para todo $z$ em $R$ for adicionada às hipóteses do Teorema 5.5.8, então o módulo $|f(z)|$ também atingirá seu valor *mínimo* em $C$ (Problemas 27 e 28 do Conjunto de Exercícios 5.5).

---

EXEMPLO 5 **Módulo Máximo**

Determinemos o módulo máximo de $f(z) = 2z + 5i$ na região circular fechada definida por $|z| \leq 2$.

**Solução** De (2) da Seção 1.2, sabemos que $|z|^2 = z\bar{z}$. Substituindo o símbolo $z$ por $2z + 5i$, temos

$$|2z + 5i|^2 = (2z + 5i)\overline{(2z + 5i)} = (2z + 5i)(2\bar{z} - 5i) = 4z\bar{z} - 10i(z - \bar{z}) + 25. \tag{8}$$

Contudo, de (6) da Seção 1.1, $\bar{z} - z = 2i\text{Im}(z)$, de modo que (8) pode ser escrita como

$$|2z + 5i|^2 = 4|z|^2 + 20\,\text{Im}(z) + 25. \tag{9}$$

Por ser um polinômio, $f$ é analítica na região definida por $|z| \leq 2$. Segundo o Teorema 5.5.8, $\max_{|z|\leq 2} |2z + 5i|$ ocorre na fronteira $|z| = 2$. Portanto, se $|z| = 2$, (9) fornece

$$|\,2z + 5i\,| = \sqrt{41 + 20\,\text{Im}(z)}. \tag{10}$$

Esta última expressão atinge seu valor máximo quando $\text{Im}(z)$ assume seu valor máximo em $|z| = 2$, ou seja, no ponto $z = 2i$. Portanto, $\text{máx}_{|z|\leq 2}\,|\,2z + 5i\,| = \sqrt{81} = 9$. ❑

Notamos, no Exemplo 5, que $f(z) = 0$ somente em $z = -\frac{5}{2}i$ e que este ponto é exterior à região definida por $|z| \leq 2$. Portanto, concluímos que (10) atinge seu valor mínimo quando $\text{Im}(z)$ assume seu valor mínimo em $|z| = 2$ em $z = -2i$. Isso resulta em $\min_{|z|\leq 2}\,|\,2z + 5i\,| = \sqrt{1} = 1$.

**Observações**

*Comparação com Análise Real*

(*i*) Como consequência do Teorema 5.5.3, se $f$ for diferenciável em todos os pontos em algum domínio todas as derivadas $f'$, $f''$, $f'''$, ... existem no domínio. Na análise real isso pode não ser verdade. Por exemplo, a função $f(x) = x^{5/3}$ é diferenciável em toda a reta real. No entanto, $f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3}$ não existe em $x = 0$.

(*ii*) Na análise real existem numerosas funções infinitamente diferenciáveis que são limitadas em um intervalo fechado $[a, b]$; ou seja, $|f(x)| \leq M$ para todo $a \leq x \leq b$. Por exemplo, sen $x$ é infinitamente diferenciável e limitada em $[-\pi, \pi]$, pois $|\text{sen}\, x| \leq 1$ para todo $x$. No entanto, o valor absoluto $|\text{sen}\, x|$ não atinge seu valor máximo na fronteira do intervalo fechado, já que $|\text{sen}\,(-\pi)| = |\text{sen}\,\pi| = 0$. Este fato deve ser comparado com o Teorema do Módulo Máximo 5.5.8.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.5 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro)*

### 5.5.1 Fórmulas Integrais de Cauchy

Nos Problemas 1–22, use os Teoremas 5.5.1 e 5.5.2, onde for apropriado, para calcular a dada integral ao longo do(s) contorno(s) fechado(s) indicado(s).

**1.** $\oint_C \frac{4}{z-3i}\,dz;\ |z| = 5$

**2.** $\oint_C \frac{z^2}{(z-3i)^2}\,dz;\ |z| = 5$

**3.** $\oint_C \frac{e^z}{z-\pi i}\,dz;\ |z| = 4$

**4.** $\oint_C \frac{1+e^z}{z}\,dz;\ |z| = 1$

**5.** $\oint_C \frac{z^2-3z+4i}{z+2i}\,dz;\ |z| = 3$

**6.** $\oint_C \frac{\cos z}{3z-\pi}\,dz;\ |z| = 1{,}1$

**7.** $\oint_C \frac{z^2}{z^2+4}\,dz$; **(a)** $|z-i| = 2$, **(b)** $|z+2i| = 1$

**8.** $\oint_C \frac{z^2+3z+2i}{z^2+3z-4}\,dz$; **(a)** $|z| = 2$, **(b)** $|z+5| = \frac{3}{2}$

**9.** $\oint_C \frac{z^2+4}{z^2-5iz-4}\,dz;\ |z-3i| = 1{,}3$

**10.** $\oint_C \frac{\text{sen}\, z}{z^2+\pi^2}\,dz;\ |z-2i| = 2$

**11.** $\oint_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}\,dz;\ |z-i| = 1$

**12.** $\oint_C \frac{z}{(z+i)^4}\,dz;\ |z| = 2$

**13.** $\oint_C \frac{\cos 2z}{z^5}\,dz;\ |z| = 1$

**14.** $\oint_C \frac{e^{-z}\,\text{sen}\, z}{z^3}\,dz;\ |z-1| = 3$

**15.** $\oint_C \frac{2z+5}{z^2-2z}\,dz$; **(a)** $|z| = \frac{1}{2}$, **(b)** $|z+1| = 2$ **(c)** $|z-3| = 2$, **(d)** $|z+2i| = 1$

**16.** $\oint_C \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz$; **(a)** $|z| = \frac{1}{2}$, **(b)** $|z+1| = 1$ **(c)** $|z-1| = \frac{1}{2}$, **(d)** $|z| = 4$

**17.** $\oint_C \frac{z+2}{z^2(z-1-i)}\,dz$; **(a)** $|z| = 1$, **(b)** $|z-1-i| = 1$

**18.** $\oint_C \frac{1}{z^3(z-4)}\,dz$; **(a)** $|z| = 1$, **(b)** $|z-2| = 1$

**19.** $\oint_C \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-i)^3}\right) dz;\ |z| = 6$

**20.** $\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\text{sen}^2 z}{(2z-\pi)^3}\right) dz;\ |z| = 3$

**21.** $\oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^2}\,dz;\ |z-2| = 5$

**22.** $\oint_C \frac{1}{z^2(z^2+1)}\,dz;\ |z-i| = \frac{3}{2}$

Nos Problemas 23 e 24, calcule a integral dada, onde $C$ é o percurso com aspecto do número oito indicado na figura.

**23.** $\oint_C \frac{3z+1}{z(z-2)^2}\,dz$

**24.** $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz$

**Figura 5.5.3** Figura para o Problema 23

**Figura 5.5.4** Figura para o Problema 24

## 5.5.2 Algumas Consequências de Fórmulas Integrais

Nos Problemas 25 e 26, proceda como no Exemplo 5 e calcule o módulo máximo da integral dada na região circular fechada indicada.

**25.** $f(z) = -iz + i$; $|z| \leq 5$

**26.** $f(z) = z^2 + 4z$; $|z| \leq 1$

**27.** Suponha que a fronteira $C$ da região circular fechada $R$ definida por $|z| \leq 1$ seja parametrizada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Considerando $|f(z(t))|$, determine os módulos máximo e mínimo da função analítica $f$ dada, assim como os pontos $z$ em $C$ onde esses valores ocorrem.

(a) $f(z) = (iz+3)^2$

(b) $f(z) = (z - 2 - 2\sqrt{3}\,i)^2$

(c) $f(z) = -2iz^2 + 5$

[*Sugestão*: nas partes (b) e (c) pode ser útil recordar, do cálculo, como determinar os extremos relativos de uma função de valor real da variável real $t$.]

**Foco em Conceitos**

**28.** (***Fórmula Integral de Cauchy***) Seja $f$ uma função analítica em uma circunferência $C$ de raio $r$ e centro em $z_0$ e em todos os pontos no interior de $C$. Use (1) para obter

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Este resultado é conhecido como **teorema do valor médio de Gauss** e mostra que o valor de $f$ no centro $z_0$ da circunferência é a média de todos os valores de $f$ na circunferência $C$.

**29.** (***Teorema Fundamental da Álgebra***) Sejam

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

um polinômio de grau $n > 1$ e $z_1$ um número tal que $p(z_1) = 0$. Então,

(a) Mostre que $p(z) = p(z) - p(z_1) = a_n(z^n - z_1^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_1^{n-1}) + \ldots + a_1(z - z_1)$.

(b) Usando o resultado da parte (a), mostre que $p(z) = (z - z_1)\,q(z)$, onde $q$ é um polinômio de grau $n - 1$.

(c) Usando o resultado da parte (b), explique claramente por que a equação $p(z) = 0$ tem $n$ raízes.

**30.** Use o Problema 20 para fatorar o polinômio

$$p(z) = z^3 + (3-4i)z^2 - (15+4i)z - 1 + 12i.$$

Não use tecnologia.

**31.** (***Teorema de Morera***) Na prova do Teorema 5.5.7 algumas vezes a continuidade de $f'$ em $D$ também é assumida. Com esta hipótese, (3) da Seção 5.1 e o teorema de Green podem ser usados para escrever $\oint_C f(z)\,dz$ como

Nos Problemas 23 e 24, calcule a integral dada, onde $C$ é o percurso com aspecto do número oito indicado na figura.

**23.** $\oint_C \frac{3z+1}{z(z-2)^2}\, dz$

**24.** $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz$

**Figura 5.5.3** Figura para o Problema 23

**Figura 5.5.4** Figura para o Problema 24

## 5.5.2 Algumas Consequências de Fórmulas Integrais

Nos Problemas 25 e 26, proceda como no Exemplo 5 e calcule o módulo máximo da integral dada na região circular fechada indicada.

**25.** $f(z) = -iz + i;\ |z| \leq 5$

**26.** $f(z) = z^2 + 4z;\ |z| \leq 1$

**27.** Suponha que a fronteira $C$ da região circular fechada $R$ definida por $|z| \leq 1$ seja parametrizada por $x = \cos t$, $y = \text{sen}\ t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Considerando $|f(z(t))|$, determine os módulos máximo e mínimo da função analítica $f$ dada, assim como os pontos $z$ em $C$ onde esses valores ocorrem.

(a) $f(z) = (iz+3)^2$

(b) $f(z) = (z - 2 - 2\sqrt{3}\,i)^2$

(c) $f(z) = -2iz^2 + 5$

[*Sugestão*: nas partes (b) e (c) pode ser útil recordar, do cálculo, como determinar os extremos relativos de uma função de valor real da variável real $t$.]

**Foco em Conceitos**

**28.** (***Fórmula Integral de Cauchy***) Seja $f$ uma função analítica em uma circunferência $C$ de raio $r$ e centro em $z_0$ e em todos os pontos no interior de $C$. Use (1) para obter

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Este resultado é conhecido como **teorema do valor médio de Gauss** e mostra que o valor de $f$ no centro $z_0$ da circunferência é a média de todos os valores de $f$ na circunferência $C$.

**29.** (***Teorema Fundamental da Álgebra***) Sejam

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

um polinômio de grau $n > 1$ e $z_1$ um número tal que $p(z_1) = 0$. Então,

(a) Mostre que $p(z) = p(z) - p(z_1) = a_n(z^n - z_1^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_1^{n-1}) + \ldots + a_1(z - z_1)$.

(b) Usando o resultado da parte (a), mostre que $p(z) = (z - z_1)\, q(z)$, onde $q$ é um polinômio de grau $n - 1$.

(c) Usando o resultado da parte (b), explique claramente por que a equação $p(z) = 0$ tem $n$ raízes.

**30.** Use o Problema 20 para fatorar o polinômio

$$p(z) = z^3 + (3-4i)z^2 - (15+4i)z - 1 + 12i.$$

Não use tecnologia.

**31.** (***Teorema de Morera***) Na prova do Teorema 5.5.7 algumas vezes a continuidade de $f'$ em $D$ também é assumida. Com esta hipótese, (3) da Seção 5.1 e o teorema de Green podem ser usados para escrever $\oint_C f(z)\, dz$ como

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$$
$$= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA,$$

onde $R$ denota a região limitada por $C$. Efetue os próximos passos da prova e enuncie a conclusão.

**32.** (***Teorema do Módulo Máximo***) Discuta o seguinte raciocínio:
Considere a função $f(z) = z^2 + 5z - 1$, definida na região circular fechada $|z| \leq 1$. A desigualdade triangular, (10) da Seção 1.2, indica que

$$|z^2 + 5z - 1| \leq |z|^2 + 5|z| + |-1|.$$

Como o módulo máximo de $f$ ocorre em $|z| = 1$, a desigualdade mostra que o módulo máximo de $f(z) = z^2 + 5z - 1$ na região é 7.

**33.** Este Problema indica os passos iniciais da prova do **teorema do módulo mínimo**

*Se $f$ for uma função analítica em uma região fechada $R$ limitada por uma curva fechada simples $C$ e $f(z) \neq 0$ para todo $z$ em $R$, o módulo $|f(z)|$ assume seu valor mínimo em $C$.*

Defina a função $g(z) = 1/f(z)$, releia o Teorema 5.5.8 e complete a prova do teorema.

**34.** Suponha que $f(z) = z + 1$ seja definida em uma região triangular $R$ com vértices $i$, 1 e $1 + i$. Discuta como o conceito de *distância* a partir do ponto $-1 + i$ pode ser usado para determinar os pontos na fronteira de $R$ para os quais $|f(z)|$ assume seus valores máximo e mínimo.

## 5.6 Aplicações

Na Seção 1.2 introduzimos a noção de que um número complexo pode ser interpretado como um vetor bidimensional. Com isso, vimos na Seção 2.7 que um campo vetorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ pode ser interpretado como uma função complexa $f$ com partes real e imaginária dadas pelas componentes $P$ e $Q$ de $\mathbf{F}$, respectivamente; ou seja, $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ é um vetor cujo ponto inicial é $z$. Nesta seção exploraremos o emprego dessa representação complexa do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ no contexto da análise de certos aspectos de fluxo fluido. Como o campo vetorial consiste em vetores que representam velocidades em vários pontos no fluxo, $\mathbf{F}(x, y)$ ou $f(z)$ é denominado **campo de velocidade**. A magnitude $\|\mathbf{F}\|$ de $\boldsymbol{F}$ ou o módulo $|f(z)|$ da representação complexa $f$ é denominado **velocidade**.
Ao longo desta seção, admitiremos que todo domínio $D$ é simplesmente conexo.

**Campo Vetorial Irrotacional** Em toda esta seção consideraremos apenas o **fluxo bidimensional** de um fluido (Seções 2.7 e 3.4). Esta hipótese nos permite analisar uma única lâmina de fluxo em um domínio $D$ no plano. Seja $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ um campo de velocidade em *estado estacionário* desse fluxo fluido em $D$. Em outras palavras, a velocidade do fluido em um ponto da lâmina depende apenas de sua posição $(x, y)$, ou seja, não depende do tempo $t$. No estudo de fluidos, se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, o fluido é denominado **irrotacional**. Se uma hélice for inserida no fluxo fluido, como indicado na Figura 5.6.1, o rotacional desse campo de velocidade $\mathbf{F}$ é uma medida da tendência de o fluido fazer a hélice girar em torno de seu eixo vertical (perpendicular à página e apontando para fora). Os fluxos ilustrados nas Figuras 5.6.1(a) e 5.6.1(b) são irrotacionais, pois a hélice não está girando. Às vezes a palavra "irrotacional" é enganosa, porque *não* significa que o fluido não tenha rotação, como visto na Figura 5.6.1(b). Se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, o fluxo

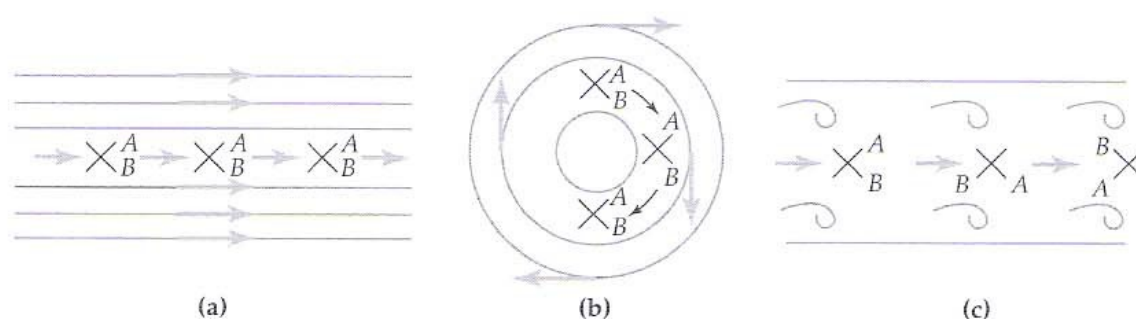



**Figura 5.6.1** Três fluxos fluidos

do fluido não está sujeito à turbulência na forma de vórtices ou redemoinhos que fariam a hélice girar. No caso da Figura 5.6.1(c), o fluxo é rotacional, pois há vórtices e a hélice é mostrada girando.

A divergência do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ é uma medida da taxa de variação da densidade do fluido em um ponto. Se div $\mathbf{F} = 0$, o fluido é denominado **incompressível**; ou seja, um fluido incompressível é homogêneo (com densidade constante) em todo o domínio $D$. Em um domínio simplesmente conexo $D$, um fluxo incompressível tem a propriedade especial de que a quantidade de fluido no interior de qualquer contorno fechado simples $C$ independe do tempo. A taxa em que o fluido entra no interior de $C$ é igual à taxa em que o fluido sai de $C$ e, consequentemente, não existem fontes ou sumidouros de fluxo em pontos em $D$. Na teoria eletromagnética, se $\mathbf{F}$ representar um campo vetorial para o qual div $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{F}$ é denominado **solenoidal**. Assumamos que $P$ e $Q$ sejam funções contínuas e tenham derivadas parciais contínuas em $D$. Do cálculo vetorial, div $\mathbf{F}$ (ou $\nabla \cdot \mathbf{F}$) é uma função escalar e rot $\mathbf{F}$ (ou $\nabla \times \mathbf{F}$) é uma função vetorial:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{e} \quad \text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{1}$$

No caso de um **fluido ideal**, ou seja, um fluido *incompressível* não viscoso cujo fluxo bidimensional seja *irrotacional*, vemos de (1) que div $\mathbf{F} = 0$ e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ resultam nas seguintes equações simultâneas:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

O sistema de equações diferenciais parciais em (2) lembra as equações de Cauchy-Riemann, um critério para analiticidade apresentado no Teorema 3.2.2 da Seção 3.2. Se o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ for representado pela função complexa $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, (2) implica que o conjugado de $f$, ou seja, $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$, é uma função analítica em $D$.

**Teorema 5.6.1 Campos Vetoriais e Analiticidade**

Sejam $u$, $v$, $P$ e $Q$ funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio $D$.

(*i*) Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ for um campo vetorial para o qual div $\mathbf{F} = 0$ e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em $D$, e se $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ for a representação complexa de $\mathbf{F}$, a função $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$ é analítica em $D$.

(*ii*) Reciprocamente, se $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for uma função analítica em $D$, a função $f(z) = \overline{g(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ é a representação complexa de um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ para o qual div $\mathbf{F} = 0$ e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em $D$.

**Prova** (***i***) Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ as partes real e imaginária de $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$; então, $P = u$ e $Q = -v$. Como div $\mathbf{F} = 0$ e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, as equações (2) passam a, respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(-v)}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

As equações em (3) são as usuais equações de Cauchy-Riemann; portanto, usando o Teorema 3.2.2 concluímos que $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$ é analítica em $D$.

(***ii***) Agora, sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ as partes real e imaginária de $f(z) = \overline{g(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$. Como $u = P$ e $v = -Q$, as equações de Cauchy-Riemann ficam escritas como

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(-Q)}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial(-Q)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4}$$

Estas são as equações (2), de modo que div $\mathbf{F} = 0$ e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. ❑

EXEMPLO 1 **Campo Vetorial Fornece uma Função Analítica**

O campo vetorial bidimensional

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{K}{2\pi}\left[\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\mathbf{i} - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\mathbf{j}\right], K > 0,$$

pode ser interpretado como o campo de velocidade do fluxo de um fluido ideal em um domínio $D$ do pla-no $xy$ que não contém $(x_0, y_0)$. É uma tarefa simples comprovar que o fluido é incompressível (div $\mathbf{F} = 0$) e irrotacional (rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$) em $D$. A representação complexa de $\mathbf{F}$ é

$$f(z) = \frac{K}{2\pi}\left[\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - i\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right].$$

Reescrevendo $f$ como

$$f(z) = \frac{K}{2\pi i}\left[\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + i\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]$$

e usando $z_0 = x_0 + iy_0$ e $z = x + iy$, podemos verificar que $f$ é igual a

$$f(z) = \frac{K}{2\pi i}\frac{z-z_0}{|z-z_0|^2} \qquad \text{ou} \qquad f(z) = \frac{K}{2\pi i}\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}_0}.$$

Por conseguinte, usando o Teorema 5.6.1($i$), concluímos que a função complexa $g(z) = \overline{f(z)}$ é irrotacion

$$g(z) = \overline{f(z)} = -\frac{K}{2\pi i}\frac{1}{z-z_0}, \quad K > 0,$$

e analítica em um domínio $D$ do plano $z$ que não contém $z_0$. □

Qualquer função analítica $g(z)$ pode ser interpretada como uma representação complexa do campo de velocidade $\mathbf{F}$ de um fluxo fluido bidimensional. *Contudo*, devido ao Teorema 5.6.1 ($ii$), é a função $f$ defi-da como o conjugado de $g$, $f(z) = \overline{g(z)}$ que fornece a representação complexa de um campo de velocid $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ de um fluxo bidimensional de um *fluido ideal* em algum domínio $D$ do pla

EXEMPLO 2 **Função Analítica Fornece um Campo Vetorial**

A função polinomial $g(z) = kz = k(x + iy)$, $k > 0$, é analítica em qualquer domínio $D$ do plano compl Segundo o Teorema 5.6.1.($ii$), $f(z) = \overline{g(z)} = k\bar{z} = x - iy$ é a representação complexa de um campo de ve-locidade $\mathbf{F}$ de um fluido ideal em $D$. Identificando $P(x, y) = kx$ e $Q(x, y) = -ky$, obtemos $\mathbf{F}(x, y) = k(x\mathbf{i} - y\mathbf{j})$. Uma rápida inspeção de (2) comprova que div $\mathbf{F} = 0$ e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. □

**Linhas de Fluxo Revisitadas** Podemos agora estabelecer uma relação entre as Seções 2.7 e 3.4. Na Seção 2.7, vimos que se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ representar um campo de velocidade de *qual-quer* fluxo fluido bidimensional, o caminho $z(t) = x(t) + iy(t)$ percorrido por uma partícula (como uma pequena rolha, por exemplo) posicionada no fluxo deve satisfazer o sistemas de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x,y). \qquad (5)$$

A família de todas as soluções de (5) foi denominada **linhas de fluxo**.

Na Seção 3.4 vimos que no caso de um fluxo bidimensional de um fluido ideal, o vetor velocidade $\mathbf{F}$ podia ser representado pelo gradiente de uma função de valor real $\phi$ denominada **potencial de velocid** As curvas de nível $\phi(x, y) = c_1$ receberam a denominação de **curvas equipotenciais**. Mais important

mos que a função $\phi$ sempre é solução da equação de Laplace em algum domínio $D$ e, portanto, harmônica em $D$. Depois da determinação do conjugado harmônico $\psi(x, y)$ de $\phi$, formamos uma função

$$\mathbf{\Omega}(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \tag{6}$$

denominada **potencial complexo de velocidade**, que é analítica em $D$. Neste contexto, $\psi(x, y)$ recebeu a denominação de **função de fluxo** e suas curvas de nível $\psi(x, y) = c_2$, **linhas de fluxo**.

Agora, demonstraremos que (5) e (6) representam a mesma coisa. Suponhamos que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ seja o campo de velocidade do fluxo de um fluido ideal em algum domínio $D$. Iniciemos revendo o parágrafo que contém (6). Como $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ é um campo gradiente, existe uma função escalar $\phi$ tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}, \tag{7}$$

de modo que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q(x, y). \tag{8}$$

Como $\phi$ é harmônica em $D$, vamos tomá-la como um potencial para $\mathbf{F}$. Podemos, então, determinar sua conjugada harmônica e usá-la para formar o potencial complexo de velocidade $\mathbf{\Omega}(z) = \phi + i\psi$. Como $\mathbf{\Omega}(z)$ é analítica em $D$, podemos lançar mão das equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{9}$$

para reescrever (8) como

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = P(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -Q(x, y). \tag{10}$$

Agora, reexaminemos o sistema de equações diferenciais em (5). Se dividirmos a segunda equação no sistema pela primeira, obteremos uma única equação diferencial de primeira ordem $dy/dx = Q(x, y)/P(x, y)$ ou

$$-Q(x, y)dx + P(x, y)dy = 0. \tag{11}$$

Consequentemente, de (2), vemos que $P$ e $Q$ estão relacionadas por $\partial P/\partial x = \partial(-Q)/\partial y = -\partial Q/\partial y$. Esta última equação prova que (11) é uma equação diferencial de primeira ordem **exata**. Mais especificamente, as equações em (10) mostram que (11) é igual a

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0. \tag{12}$$

Para aqueles que ainda não fizeram um curso de equações diferenciais, as manipulações anteriores podem não parecer relevantes. Contudo, aqueles que têm algum conhecimento do assunto devem perceber que (12) mostra que (11) equivale ao diferencial exato $d(\psi(x, y)) = 0$. A integração desta última equação mostra que todas as soluções de (5) satisfazem $\psi(x, y) = c_2$. Em outras palavras, as linhas de fluxo do campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ obtido de (5) são iguais às curvas de nível da conjugada harmônica $\psi$ de $\phi$ em (6).

*Nota* ➡

**Potencial Complexo Revisitado** Seja $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ o campo de velocidade do fluxo de um fluido ideal em algum domínio $D$ do plano e seja $\mathbf{\Omega}(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ o potencial complexo de velocidade do fluxo. O Teorema 5.6.1($i$) nos diz que da representação complexa $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de $\mathbf{F}$ podemos construir uma função analítica $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$. As duas funções analíticas $g$ e $\mathbf{\Omega}$ estão relacionadas uma à outra. Para comprovar isso, primeiro, escrevemos o gradiente do vetor $\mathbf{F}$ em (7) na notação complexa equivalente

$$f(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y}. \tag{13}$$

Usando (9) da Seção 3.2, vemos que a derivada da função analítica $\mathbf{\Omega}(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ é a função analítica

$$\mathbf{\Omega}'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{14}$$

Usamos, agora, a segunda equação de Cauchy-Riemann em (9) para substituir $\partial\psi/\partial x$ em (14):

$$\boldsymbol{\Omega}'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{15}$$

Comparando (13) e (15), vemos imediatamente que $\overline{f(z)} = \boldsymbol{\Omega}'(z)$ e, por conseguinte,

$$g(z) = \boldsymbol{\Omega}'(z). \tag{16}$$

O conjugado desta função analítica, $\overline{g(z)} = \overline{\overline{f(z)}} = f(z)$, é a representação complexa do campo vetorial **F** cujo potencial complexo é $\boldsymbol{\Omega}(z)$. Em símbolos,

$$f(z) = \overline{\boldsymbol{\Omega}'(z)}. \tag{17}$$

Como $f(z)$ é uma representação complexa do campo vetorial de velocidade, a grandeza $\overline{\boldsymbol{\Omega}'(z)}$ em (17) é às vezes referida como **velocidade complexa**.

É pertinente perguntar: (17) é apenas interessante ou tem alguma utilidade? Resposta: tem utilidade. Aqui está uma observação prática: qualquer função analítica em algum domínio $D$ pode ser interpretada como um potencial complexo para o fluxo bidimensional de um fluido ideal.

---

EXEMPLO 3 **Potenciais Complexos**

(a) A função analítica $\boldsymbol{\Omega}(z) = \frac{1}{2}kz^2$, $k > 0$ é um potencial complexo para o fluxo no Exemplo 2. Usando (16), a derivada $g(z) = \boldsymbol{\Omega}'(z) = kz$ é uma função analítica. De (17), o conjugado $f(z) = \overline{\boldsymbol{\Omega}'(z)}$ ou $f(z) = k\bar{z} = kx - iky$ é a representação complexa do campo vetorial de velocidade **F** do fluxo de um fluido ideal em algum domínio $D$ do plano. O potencial complexo de **F** é $\boldsymbol{\Omega}(z)$. Como $\boldsymbol{\Omega}(z) = \frac{1}{2}k(x^2 - y^2 + 2xyi)$, vemos que as linhas de fluxo do fluxo são $xy = c^2$.

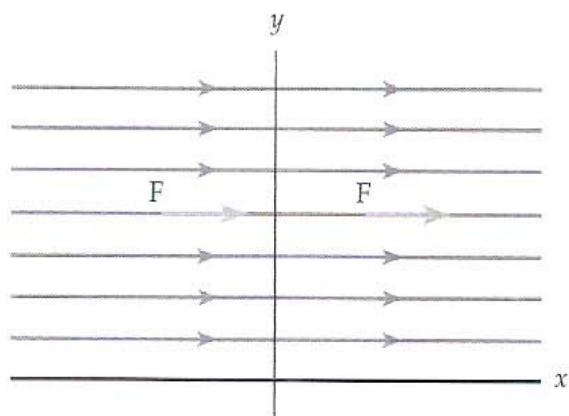
(b) A função complexa $\boldsymbol{\Omega}(z) = Az$, $A > 0$ é um potencial complexo para um tipo muito simples e importante de fluxo. De

$$\boldsymbol{\Omega}'(z) = A \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{\Omega}'(z)} = A,$$

**Figura 5.6.2** Fluxo uniforme

vemos que $\boldsymbol{\Omega}(z)$ é o potencial complexo do campo vetorial **F** cuja representação complexa é $f(z) = A$. Como a velocidade $|f| = A$ é constante em todos os pontos, dizemos que o campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y) = A\mathbf{i}$ é um fluxo *uniforme*. Em outras palavras, em um domínio $D$, como o semiplano superior, uma partícula no fluxo se move com velocidade constante. De $\boldsymbol{\Omega}(z) = Az = Ax + iAy$, vemos que a rota percorrida por uma partícula móvel — uma linha de fluxo para o fluxo — é uma reta horizontal da família definida por $y = c_2$. Vale notar que a própria fronteira do domínio $D$, $y = 0$, é uma linha de fluxo (Figura 5.6.2). ❑

**Circulação e Fluxo Líquido** Dadas uma curva fechada simples $C$ orientada no sentido trigonométrico no plano e uma função complexa $f$ que representa o campo de velocidade de um fluxo fluido bidimensional, podemos fazer as seguintes perguntas:

($i$) Até que ponto o fluxo tende a fluir em torno da curva $C$?

($ii$) Qual é a diferença líquida entre as taxas de entrada e de saída do fluido na região limitada pela curva $C$?

As grandezas consideradas nas perguntas ($i$) e ($ii$) são denominadas **circulação** em torno de $C$ e **fluxo líquido** através de $C$, respectivamente. Definições precisas de circulação e de fluxo líquido exigem o uso de uma integral de contorno envolvendo a representação complexa $f$ e serão dadas mais adiante. Por ora, podemos determinar se a circulação ou o fluxo líquido é positivo, negativo ou 0 por meio de representação gráfica do campo vetorial $f$ do fluxo. Como no caso de argumentos de números complexos, consideramos o sentido de um fluxo como "positivo" se o mesmo se der no sentido trigonométrico. Portanto, um fluxo terá uma circulação positiva em torno de $C$ se o fluido tender a fluir no sentido trigonométrico em torno de $C$. Uma circulação negativa significa que o fluxo tende a fluir em torno de $C$ no sentido horário, e uma circulação 0 significa que o fluxo é perpendicular a $C$. Por exemplo, na Figura 5.6.3 a circulação é posi-

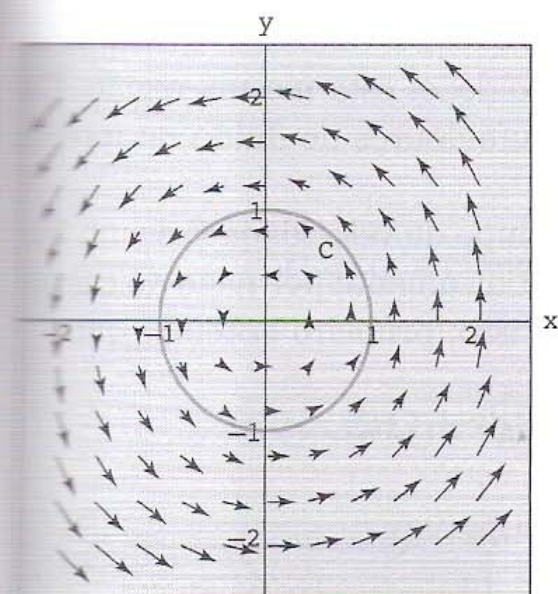



Figura 5.6.3 Circulação positiva e fluxo líquido zero

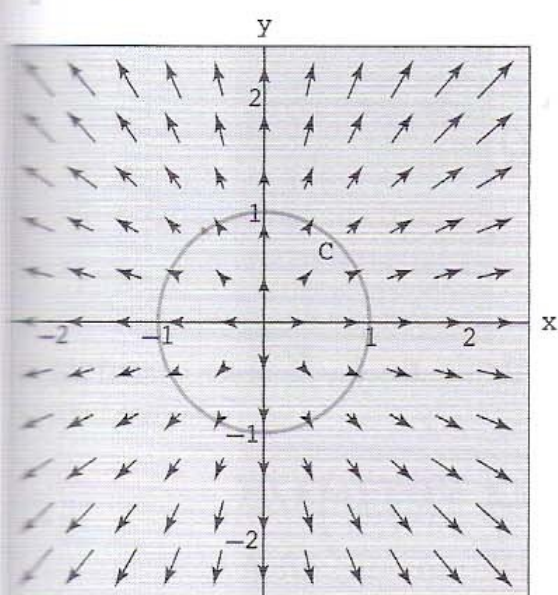



Figura 5.6.4 Circulação zero e fluxo líquido positivo

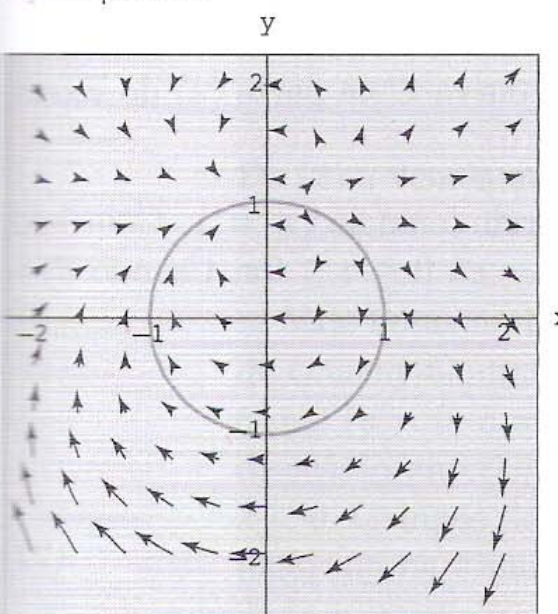



Figura 5.6.5 Campo de velocidade para a parte (a) do Exemplo 4

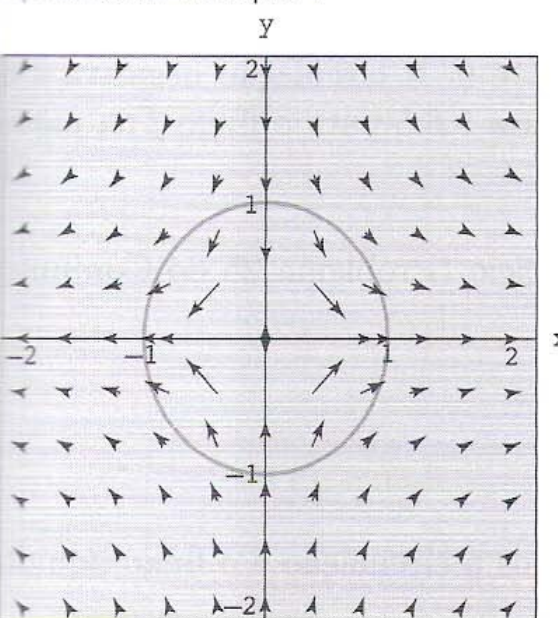



Figura 5.6.6 Campo de velocidade para a parte (b) do Exemplo 4

va, pois o fluido tende a fluir em torno de $C$ no sentido trigonométrico; já na Figura 5.6.4 a circulação é 0, pois o fluxo é perpendicular à curva $C$. Consideramos que um fluxo líquido positivo significa que o fluido sai da região limitada pela curva $C$ a uma taxa maior que a taxa a que entra na região. Isso indica a presença de uma **fonte** no interior de $C$, isto é, um ponto em que o fluxo é produzido. Reciprocamente, um fluxo líquido negativo indica que o fluido entra na região limitada pela curva $C$ a uma taxa maior do que a taxa que sai da região ou que existe um **sumidouro** no interior de $C$, ou seja, um ponto onde o fluxo desaparece. Se o fluxo líquido for 0, o fluxo sai da região limitada por $C$ à mesma taxa em que entrou. Na Figura 5.6.3 o fluxo é tangente à circunferência $C$, de modo que nenhum fluido cruza $C$; isso implica que o fluxo líquido através de $C$ é 0. Na Figura 5.6.4 o fluxo líquido através de $C$ é positivo, pois o fluxo parece apenas sair da região limitada por $C$.

---

EXEMPLO 4 **Circulação e Fluxo Líquido de um Fluxo**

Seja $C$ a circunferência unitária $|z| = 1$ no plano complexo. Para cada fluxo $f$, determinemos graficamente se a circulação em torno de $C$ é positiva, negativa ou 0. Determinemos, ainda, se o fluxo líquido é positivo, negativo ou 0: **(a)** $f(z) = (z - i)^2$ **(b)** $f(z) = 1/z$.

**Solução** Em cada parte, usamos um sistema algébrico computacional para desenhar o campo vetorial de velocidade $f$ e a curva $C$.

(a) O campo de velocidade $f(z) = (z - i)^2$ é representado na Figura 5.6.5. Como o campo vetorial $f$ mostra que o fluido flui no sentido horário em torno de $C$, concluímos que a circulação é negativa. Além disso, como parece que o fluido não cruza a curva $C$, o fluxo líquido é 0.

(b) O campo de velocidade $f(z) = 1/z$, representado na Figura 5.6.6, indica que iguais quantidades de fluido fluem nos sentidos trigonométrico e horário em torno de $C$. Isso sugere que a circulação é 0. Além disso, como a mesma quantidade de fluido parece entrar e sair da região limitada pela curva $C$, o fluxo líquido é 0. ❑

**Circulação e Fluxo Líquido Revisitados** Seja $\mathbf{T}$ o vetor unitário tangente a uma curva fechada simples $C$ com orientação positiva. Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ representar um campo vetorial de velocidade de um fluxo fluido bidimensional, definimos a **circulação** de $\mathbf{F}$ em torno de $C$ como a integral de linha real $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$. Como $d\mathbf{r}/dt = (d\mathbf{r}/ds)(ds/dt)$, onde $d\mathbf{r}/ds = (dx/ds)\mathbf{i} + (dy/ds)\mathbf{j} = \mathbf{T}$ é uma tangente unitária à curva $C$, a integral de linha pode ser escrita em termos da componente tangencial do vetor de velocidade $\mathbf{F}$, ou seja,

$$\text{circulação} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds. \tag{18}$$

Como já discutido, a circulação de $\mathbf{F}$ é uma medida de como o fluido tende a fazer a curva $C$ girar circulando em torno da mesma. Se $\mathbf{F}$ for perpendicular a $\mathbf{T}$ em cada $(x, y)$ em $C$, $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$ e a curva não se move. Por outro lado, $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$ e $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ significam que o fluido tende a fazer $C$ girar nos sentidos trigonométrico e horário, respectivamente (Figura 5.6.7).

Seja $\mathbf{N} = (dy/ds)\mathbf{i} - (dx/ds)\mathbf{j}$ o vetor unitário normal a um contorno fechado simples com orientação positiva $C$ e, novamente, seja $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ um campo de velocidade de um fluxo fluido bidimensional; definimos o **fluxo líquido** de $\mathbf{F}$ como a integral de linha real da componente normal do vetor velocidade $\mathbf{F}$:

$$\text{fluxo líquido} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds. \tag{19}$$

Na verdade, (19) define uma *taxa líquida* com que o fluido cruza a curva $C$ na direção da normal $\mathbf{N}$; esta taxa é medida em unidade de área por unidade de tempo.

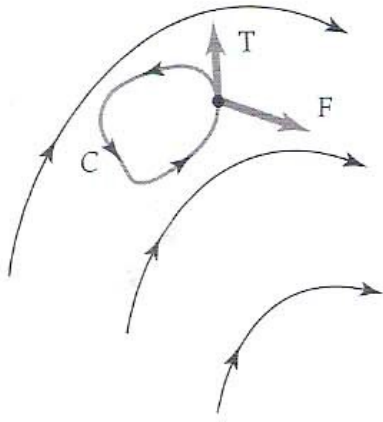



**Figura 5.6.7** O fluxo de fluido tende a fazer $C$ girar

Em outras palavras, o fluxo líquido através de $C$ é a diferença entre a taxa com que o fluido entra na região limitada pela curva $C$ e a taxa com que o fluido deixa esta mesma região. Um valor não nulo de $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds$ indica a presença de fontes ou sumidouros de fluido no interior da curva $C$.

Seja $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ a representação complexa do campo de velocidade $\mathbf{F}$ de um fluido. As integrais de linha (18) e (19) podem ser calculadas simultaneamente por meio do cálculo de uma única integral de contorno $\oint_C \overline{f(z)}\, dz$. Para comprovar isso, primeiro notemos que:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \oint_C P\, dx + Q\, dy$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \oint_C (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \oint_C P\, dy - Q\, dx,$$

e assim:

$$\begin{aligned}\oint_C \overline{f(z)}\, dz &= \oint_C (P - iQ)\,(dx + i dy) \\ &= \left(\oint_C P\, dx + Q\, dy\right) + i\left(\oint_C P\, dy - Q\, dx\right) \\ &= \left(\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds\right) + i\left(\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds\right).\end{aligned} \tag{20}$$

A Equação (20) mostra que (18) e (19) podem ser determinadas com o cálculo de $\oint_C \overline{f(z)}\, dz$ e a identificação de suas partes real e imaginária:

$$\text{circulação} = \operatorname{Re}\left(\oint_C \overline{f(z)}\, dz\right) \quad \text{e} \quad \text{fluxo líquido} = \operatorname{Im}\left(\oint_C \overline{f(z)}\, dz\right). \tag{21}$$

---

EXEMPLO 5 **Circulação e Fluxo Líquido**

Usemos (21) para calcular a circulação e o fluxo líquido para o fluxo e a curva $C$ na parte (a) do Exemplo 4.

**Solução** Da parte (a) do Exemplo 4, o fluxo é $f(z) = (z - i)^2$ e $C$, a circunferência $|z| = 1$. Com isso, $\overline{f(z)} = \left(\overline{z - i}\right)^2 = (\bar{z} + i)^2 = \bar{z}^2 + 2i\bar{z} - 1$ e $C$ é parametrizada por $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando $dz = ie^{it}dt$ e o método de integração em (11) da Seção 5.2, temos:

$$\begin{aligned}\oint_C \overline{f(z)}\, dz &= \int_0^{2\pi} \left(e^{-2it} + 2ie^{-it} - 1\right) ie^{it} dt \\ &= i\int_0^{2\pi} \left(e^{-it} + 2i - e^{it}\right) dt \\ &= \left[-e^{-it} - 2t - e^{it}\right]_0^{2\pi} = -4\pi + 0i.\end{aligned} \tag{22}$$

No último cálculo usamos $e^{-2\pi i} = e^{2\pi i} = e^0 = 1$. Comparando os resultados obtidos em (22) e (21), vemos que a circulação em torno de $C$ é $-4\pi$ e que o fluxo líquido através de $C$ é 0. A circulação negativa e o fluxo líquido zero são consistentes com a análise geométrica feita na Figura 5.6.5 para o fluxo $f$ na parte (a) do Exemplo 4. ❑

A análise do fluxo $f$ na parte (b) do Exemplo 4 é deixada como exercício (Problema 25 do Conjunto de Exercícios 5.6).

---

EXEMPLO 6 **Circulação e Fluxo Líquido**

Seja $f(z) = (1 + i)z$ o campo de velocidade de um fluxo fluido. Calculemos a circulação e o fluxo líquido através de $C$, onde $C$ é a circunferência unitária $|z| = 1$.

**Solução** Como $\overline{f(z)} = (1 - i)\bar{z}$ e $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, de (21) obtemos

$$\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \int_0^{2\pi} (1 - i)e^{-it} ie^{it} dt = (1 + i)\int_0^{2\pi} dt = 2\pi + 2\pi i.$$

Portanto, a circulação em torno de $C$ é $2\pi$, e o fluxo líquido através de $C$ também é $2\pi$. ❑

---

EXEMPLO 7 **Aplicação do Teorema de Cauchy-Goursat**

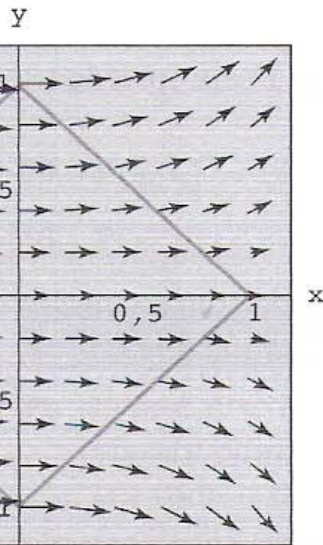



Figura 5.6.8 Campo de velocidade para o Exemplo 7

Seja $f(z) = \overline{\cos z}$ o campo de velocidade de um fluxo fluido. Calculemos a circulação e o fluxo líquido através de $C$, onde $C$ é o quadrado com vértices $z = 1$, $z = i$, $z = -1$ e $z = -i$.

**Solução** Devemos calcular $\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \oint_C \overline{\overline{\cos z}}\, dz = \oint_C \cos z\, dz$ e tomar as partes real e imaginária da integral para obtermos a circulação e o fluxo líquido, respectivamente. Como a função cos $z$ é analítica em todos os pontos, o teorema de Cauchy-Goursat fornece $\oint_C \cos z\, dz = 0$. A circulação e o fluxo líquido são iguais a 0.

O campo de velocidade $f(z) = \overline{\cos z}$ e o contorno $C$ são mostrados na Figura 5.6.8. Os resultados que acabamos de obter para a circulação e o fluxo líquido são consistentes com a discussão no Exemplo 4 a respeito da geometria de fluxos.

---

EXEMPLO 8 **Circulação e Fluxo Líquido**

A função complexa $f(z) = k/(\bar{z} - \bar{z}_0)$, onde $k = a + ib$ e $z_0$ são constantes complexas, dá origem a um fluxo no domínio definido por $z \neq z_0$. Se $C$ for um contorno fechado simples com $z_0$ em seu interior, a fórmula integral de Cauchy, (1) da Seção 5.5, fornece

$$\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \oint_C \frac{a - ib}{z - z_0}\, dz = 2\pi i(a - ib) = 2\pi b + 2\pi a i.$$

De (21), vemos que a circulação em torno de $C$ é $\text{Re}(2\pi b + 2\pi a i) = 2\pi b$ e que o fluxo líquido através de $C$ é $\text{Im}(2\pi b + 2\pi a i) = 2\pi a$. ❑

Vale notar no Exemplo 8 que se $z_0$ fosse um ponto exterior à região limitada por $C$, segundo o teorema de Cauchy-Goursat, a circulação e o fluxo líquido seriam iguais a zero. Além disso, quando a constante $k$ é real ($a \neq 0$, $b = 0$), a circulação em torno de $C$ é 0, mas o fluxo líquido através de $C$ é $2\pi k$. Segundo a discussão anterior nesta seção, o número $z_0$ é uma fonte de fluxo quando $k > 0$ e um sumidouro quando $k < 0$. Campos de velocidade que correspondem a esses dois casos são ilustrados na Figura 5.6.9. O fluxo ilustrado na Figura 5.6.4 é do tipo mostrado na Figura 5.6.9(a).

(a) Fonte: $k > 0$ (b) Sumidouro: $k < 0$

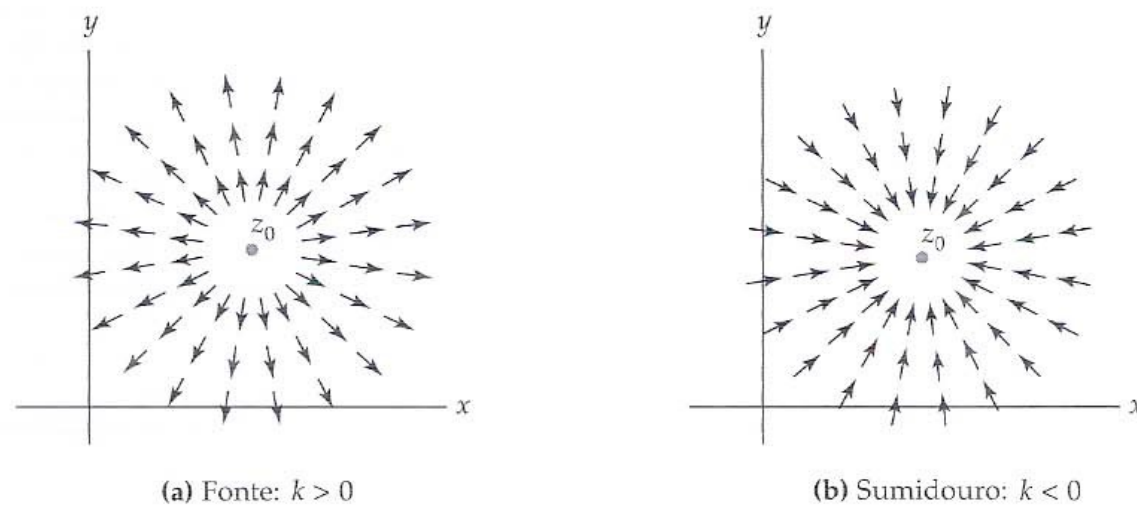



**Figura 5.6.9** Dois campos de velocidade normalizados

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.6 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–4, para o dado campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y)$, comprove que div $\mathbf{F} = 0$ e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em um domínio $D$ apropriado.

**1.** $\mathbf{F}(x,y) = (\cos\theta_0)\mathbf{i} + (\text{sen}\,\theta_0)\mathbf{j}$, $\theta_0$ é uma constante

**2.** $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

**3.** $\mathbf{F}(x,y) = 2x\mathbf{i} + (3 - 2y)\mathbf{j}$

**4.** $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$

Nos Problemas 5–8, dê a representação complexa $f(z)$ do campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y)$. Expresse a função $g(z) = \overline{f(z)}$ em termos do símbolo $z$ e comprove que $g(z)$ é uma função analítica em um domínio $D$ apropriado.

**5.** $\mathbf{F}(x, y)$ do Problema 1

**6.** $\mathbf{F}(x, y)$ do Problema 2

**7.** $\mathbf{F}(x, y)$ do Problema 3

**8.** $\mathbf{F}(x, y)$ do Problema 4

Nos Problemas 9–12, determine o campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y)$ do fluxo de um fluido ideal especificado pela dada função analítica $g(z)$.

**9.** $g(z) = (1+i)z^2$

**10.** $g(z) = \text{sen}\,z$

**11.** $g(z) = e^x \cos y + ie^x \,\text{sen}\, y$

**12.** $g(z) = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2y - y^3)$

Nos Problemas 13–16, determine um potencial complexo de velocidade $\boldsymbol{\Omega}(z)$ da representação complexa $f(z)$ do campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y)$ indicado. Verifique sua resposta usando (17). Descreva as linhas equipotenciais e as linhas de fluxo.

**13.** $\mathbf{F}(x, y)$ do Problema 1

**14.** $\mathbf{F}(x, y)$ do Problema 2

**15.** $\mathbf{F}(x, y)$ do Problema 3

**16.** $\mathbf{F}(x, y)$ do Problema 4

Nos Problemas 17 e 18, a função analítica $\boldsymbol{\Omega}(z)$ dada é um potencial complexo de velocidade para o fluxo de um fluido ideal. Determine o campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y)$ do fluxo.

**17.** $\boldsymbol{\Omega}(z) = \frac{1}{3}iz^3$

**18.** $\boldsymbol{\Omega}(z) = \frac{1}{4}z^4 + z$

**19.** Mostre que

$$\mathbf{F}(x,y) = A\left[\left(1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}\right],\quad A > 0,$$

é um campo de velocidade para um fluido ideal em um domínio $D$ que não contém a origem.

**20.** Comprove que a função analítica $\boldsymbol{\Omega}(z) = A\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ é um potencial complexo de velocidade para o fluxo cujo campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y)$ é o do Problema 19.

**21.** (a) Considere o campo de velocidade do Problema 19. Descreva o campo $\mathbf{F}(x, y)$ em um ponto $(x, y)$ distante da origem.
(b) Para o potencial complexo de velocidade no Problema 20, de que modo a observação de que $\boldsymbol{\Omega}(z) \to Az$ à medida que $|z|$ aumenta comprova sua resposta à parte (a)?

**22.** Um **ponto de estagnação** em um fluxo fluido é um ponto em que o campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y)$ é igual a zero. Determine o ponto de estagnação para:
(a) o fluxo no Problema 3(a).
(b) o fluxo no Problema 19.

**23.** Para quaisquer dois números reais $k$ e $x_1$, a função $\boldsymbol{\Omega}(z) = k\text{Ln}(z - x_1)$ é analítica no semiplano superior, de modo que representa um potencial complexo para o fluxo de um fluido ideal. O número real $x_1$ é um sumidouro quando $k < 0$ e uma fonte para o fluxo quando $k < 0$.
(a) Mostre que as linhas de fluxo são raios que emanam de $x_1$.
(b) Mostre que a representação complexa $f(z)$ do campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y)$ do fluxo é

$$f(z) = k\frac{z - x_1}{|z - x_1|^2}$$

e conclua que o fluxo flui em direção a $x_1$ quando $k < 0$.

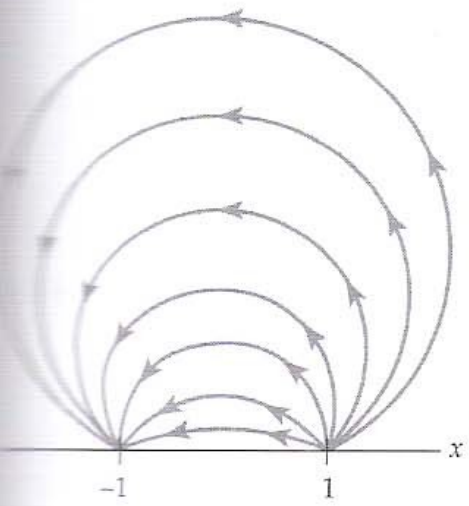



Figura 5.6.10 Figura para o Problema 24

**24.** O potencial complexo $\Omega(z) = k\text{Ln}(z-1) - k\text{Ln}(z+1)$, $k > 0$, determina o fluxo de um fluido ideal no semiplano superior $y > 0$, com uma única fonte em $z = 1$ e um único sumidouro em $z = -1$. Mostre que as linhas de fluxo são a família de circunferências $x^2 + (y - c_2)^2 = 1 + c_2^2$ (Figura 5.6.10).

Nos Problemas 25–30, calcule a circulação e o fluxo líquido para o fluxo dado e o contorno fechado $C$ indicado.

**25.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$; $C$ é a circunferência $|z| = 1$.

**26.** $f(z) = 2z$; $C$ é a circunferência $|z| = 1$.

**27.** $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z-1}}$; $C$ é a circunferência $|z - 1| = 2$.

**28.** $f(z) = \bar{z}$; $C$ é o quadrado com vértices $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ e $z = i$.

**29.** $\mathbf{F}(x, y) = (4x + 3y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j}$; $C$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

**30.** $\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$; $C$ é o quadrado com vértices $z = 0$, $z = 1 + i$, $z = 2i$ e $z = -1 + i$.

## Foco em Conceitos

**31.** Seja $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ a representação complexa de um campo de velocidade $\mathbf{F}$ do fluxo de um fluido ideal em um domínio simplesmente conexo $D$ do plano complexo. Assuma que $P$ e $Q$ têm derivadas parciais contínuas em todo o domínio $D$. Se $C$ for qualquer curva fechada posicionada em $D$, mostre que a circulação em torno de $C$ e o fluxo líquido através de $C$ são iguais a zero.

**32.** O fluxo descrito pelo campo de velocidade $f(z) = (a + ib)/\bar{z}$ tem um **vórtice** em $z = 0$. A natureza geométrica das linhas de fluxo depende da escolha de $a$ e $b$.

(**a**) Mostre que, se $z(t) = x(t) + iy(t)$ for o caminho percorrido por uma partícula no fluxo, então

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax - by}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{bx + ay}{x^2 + y^2}.$$

(**b**) Coordenadas retangulares e polares se relacionam por $r^2 = x^2 + y^2$ e $\tan\theta = y/x$.

Use essas equações para mostrar que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right).$$

(**c**) Use as equações nas partes (a) e (b) para obter

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a}{r}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{b}{r^2}.$$

(**d**) Use as equações na parte (c) e conclua que as linhas de fluxo do fluxo são espirais logarítmicas $r = ce^{a\theta/b}$, $b \neq 0$. Use algum software gráfico para comprovar que uma partícula percorre um caminho no sentido trigonométrico se e somente se $a < 0$, e no sentido horário se e somente se $b < 0$. Qual desses dois sentidos de deslocamento corresponde ao movimento espiróide em direção ao vórtice?

## Questionário de Revisão do Capítulo 5

*(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–20, responda verdadeiro ou falso. Se a afirmação for falsa, justifique sua resposta explicando por que é falsa ou dê um contraexemplo; se a afirmação for verdadeira, justifique sua resposta provando a afirmação ou cite um resultado pertinente do capítulo.

**1.** Se $z(t)$, $a \leq t \leq b$, for uma parametrização de um contorno $C$ e $z(a) = z(b)$, então $C$ é um contorno simples fechado.

**2.** A integral de linha real $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, com $C$ dado por $y = x^3$, de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, tem o mesmo valor na curva $y = x^6$, de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

**3.** O setor definido por $-\pi/6 < \arg(z) < \pi/6$ é um domínio simplesmente conexo.

**4.** Se $f$ for analítica em $z_0$, $f'''$ existe necessariamente em $z_0$.

**5.** Se $f$ for analítica em um contorno fechado simples $C$ e $z_0$ for um ponto qualquer no interior de $C$, o valor de $f(z_0)$ é determinado pelos valores de $f(z)$ em $C$.

**6.** Se $f$ for analítica em um contorno fechado simples $C$, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

**7.** Se $f$ for contínua em um domínio $D$ e tiver uma antiderivada $F$ em $D$, uma integral $\int_C f(z)\,dz$ tem o mesmo valor em todos os contornos $C$ em $D$ entre os pontos inicial $z_0$ e terminal $z_1$.

**8.** Se $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para todo contorno fechado simples $C$, $f$ é analítica em $C$ e no interior de $C$.

**9.** O valor de $\displaystyle\int_C \frac{z-2}{z}\,dz$ é o mesmo para qualquer percurso $C$ no semiplano direito $\text{Re}(z) > 0$ entre $z = 1 + i$ e $z = 10 + 8i$.

**10.** Se $g$ for inteira, $\displaystyle\oint_C \frac{g(z)}{z-i}\,dz = \oint_{C_1} \frac{g(z)}{z-i}\,dz$, onde $C$ é a circunferência $|z| = 3$ e $C_1$ é a elipse $x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$.

**11.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)}\,dz = 0$ para qualquer contorno fechado simples $C$ que circunde os pontos $z_0$ e $z_1$.

**12.** Se $f$ for analítica em um contorno fechado simples $C$ e no interior de $C$, e se $z_0$ for um ponto no interior de $C$, $\displaystyle\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$.

**13.** $\oint_C \text{Re}(z)$ independe do percurso $C$ entre $z_0 = 0$ e $z_1 = 1 + i$.

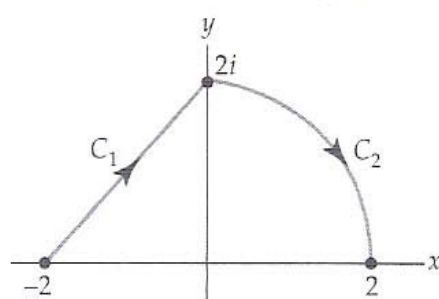



**Figura 5.R.1** Figura para o Problema 14

**14.** $\int_C \left(4z^3 - 2z + 1\right) dz = \int_{-2}^{2} \left(4x^3 - 2x + 1\right) dx$, onde o contorno $C$ é composto dos segmentos $C_1$ e $C_2$ mostrados na Figura 5.R.1.

**15.** $\int_{C_1} z^n\,dz = \int_{C_2} z^n\,dz$ para todos os inteiros $n$, onde $C_1$ é $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, e $C_2$ é $z(t) = Re^{it}$, $R > 1$, $0 \le t \le 2\pi$.

**16.** Se $f$ for contínua em um contorno $C$, $\int_C f(z)\,dz + \int_{-C} f(z)\,dz = 0$.

**17.** Para qualquer contorno $C$ com ponto inicial $z_0 = -i$ e ponto terminal $z_1 = i$, posicionado em um domínio simplesmente conexo $D$ que não contém a origem nem o eixo real negativo, $\displaystyle\int_{-i}^{i} \frac{1}{z}\,dz = \text{Ln}(i) - \text{Ln}(-i) = \pi i$.

**18.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = 0$ quando $C$ é a elipse $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.

**19.** Se $p(z)$ for um polinômio em $z$, a função $f(z) = 1/p(z)$ nunca pode ser uma função inteira.

**20.** A função $f(z) = \cos z$ é inteira e não constante, de modo que deve ser ilimitada.

Nos Problemas 21–40, tente preencher as lacunas sem recorrer ao texto.

**21.** $z(t) = e^{it^2}$, $0 \le t \le \sqrt{2\pi}$, é uma parametrização para um(a) ______.

**22.** $z(t) = z_0 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, é uma parametrização para um(a) ______.

**23.** A diferença entre $z_1(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, e $z_2(t) = e^{i(2\pi - t)}$, $0 \le t \le 2\pi$, é ______.

**24.** $\displaystyle\oint_C (2y + x - 6ix^2)\,dz =$ ______, onde o percurso $C$ é o triângulo com vértices $0$, $i$ e $1 + i$, percorrido no sentido trigonométrico.

**25.** Se $f$ for uma função polinomial e $C$ for um contorno fechado simples, $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz =$ ______.

**26.** $\displaystyle\int_C z\,\text{Im}(z)\,dz =$ ______, com $C$ dado por $z(t) = 2t + t^2 i$, $0 \le t \le 1$.

**27.** $\displaystyle\int_C |z|^2\,dz =$ ______, onde $C$ é o segmento de reta de $1 - i$ a $1 + i$.

**28.** $\displaystyle\oint_C (\bar{z})^n\,dz =$ ______, onde $n$ é um inteiro e $C$ é $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

**29.** $\displaystyle\int_C \text{sen}\,\frac{z}{2}\,dz =$ ______, com $C$ dado por $z(t) = 2i + 4e^{it}$, $0 \le t \le \pi/2$.

**30.** $\displaystyle\oint_C \sec z\,dz =$ ______, onde $C$ é $|z| = 1$.

**31.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z(z-1)}\,dz =$ ______, onde $C$ é $|z - 1| = \frac{1}{2}$.

**32.** Se $f(z) = \oint_C \frac{\xi^2 + 6\xi - 2}{\xi - z} d\xi$, onde $C$ é $|z| = 3$, então $f(1 + i)$ é ______.

**33.** Se $f(z) = z^3 + e^z$ e $C$ for um contorno $z = 8e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, então $\oint_C \frac{f(z)}{(z + \pi i)^3} dz =$ ______.

**34.** Se $|f(z)| \leq 2$ na circunferência $|z| = 3$, então $\left| \oint_C f(z)\, dz \right| \leq$ ______.

**35.** Se $n$ for um inteiro positivo e $C$ for o contorno $|z| = 2$, então $\oint_C z^{-n} e^z \, dz =$ ______.

**36.** Em $|z| = 1$, a integral de contorno $\oint_C \frac{\cos z}{z^n} dz$ é igual a ______ para $n = 1$, igual a ______ para $n = 2$ e igual a ______ para $n = 3$.

**37.** $\oint_C z^n dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{______} \\ 2\pi i, & \text{se } n \text{______} \end{cases}$, onde $n$ é um inteiro e $C$, a circunferência $|z| = 1$.

**38.** O valor da integral $\oint_C \frac{z}{z + i} dz$ no contorno $C$ mostrado na Figura 5.R.2 é ______.

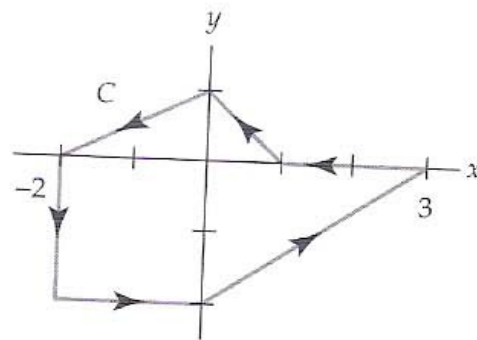



**Figura 5.R.2** Figura para o Problema 38

**39.** O valor da integral $\int_C (2z + 1)\, dz$ no contorno $C$ composto dos segmentos de retas $C_1$, $C_2$, ..., $C_{11}$, mostrado na Figura 5.R.3, é ______.

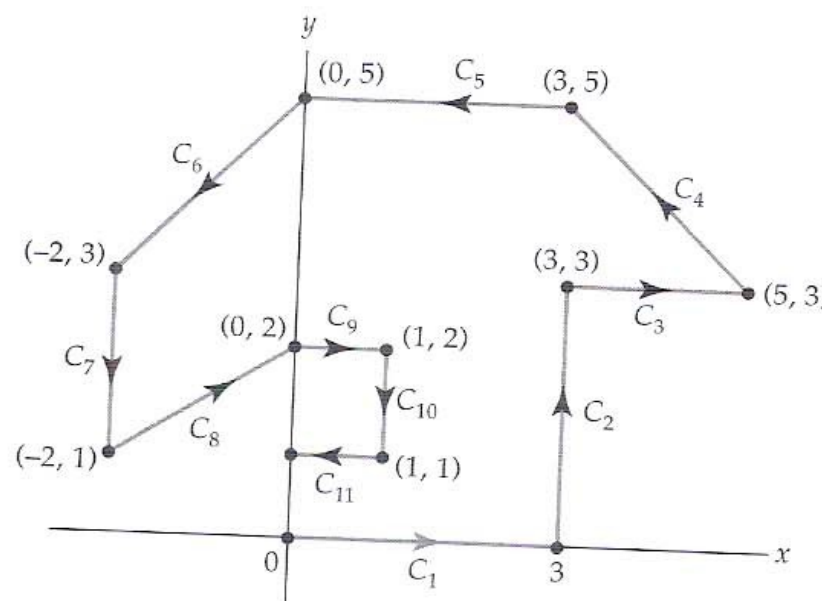



**Figura 5.R.3** Figura para o Problema 39

**40.** O valor da integral $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z - \pi i)} dz$ no contorno $C$ fechado mostrado na Figura 5.R.4 é ______.

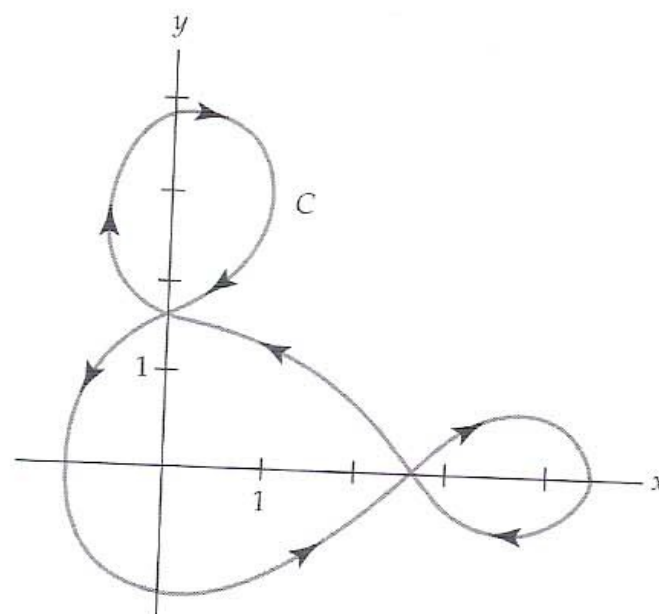
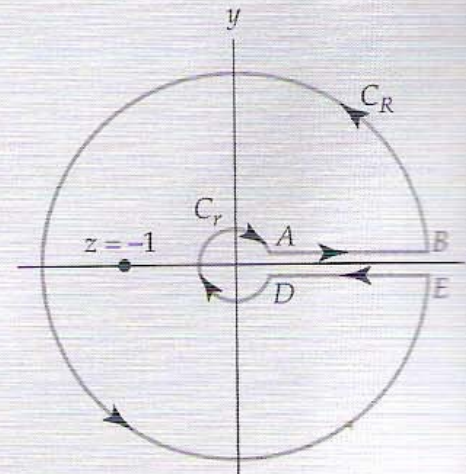



**Figura 5.R.4** Figura para o Problema 40

CAPÍTULO

# 6

# Séries e Resíduos

## Índice do Capítulo



Contorno especial usado no cálculo de uma integral real (Veja Figura 6.6.5)

**Introdução** A fórmula integral de Cauchy para derivadas indica que uma função $f$ analítica em um ponto $z_0$ possui derivadas de todas as ordens no ponto. Como uma consequência desse resultado, veremos que $f$ sempre pode ser expandida em uma série de potências centrada nesse ponto. Se, no entanto, $f$ não for analítica em $z_0$, ainda pode ser possível expandi-la em um tipo diferente de série conhecida como *série de Laurent*. A noção da série de Laurent leva ao conceito de um *resíduo*, que, por sua vez, leva a uma outra forma de calcular integrais complexas e, em alguns casos, reais.

## 6.1 Sequências e Séries

Uma grande parte da teoria de sequências e séries complexas é análoga à correspondente teoria no cálculo real. Nesta seção exploraremos as definições de convergência e divergência para sequências complexas e séries infinitas complexas. Além disso, apresentaremos alguns testes de convergência de séries infinitas. Sugerimos especial atenção às *séries geométricas*, pois este tipo de série tem papel importante em seções posteriores deste capítulo.

**Sequências** Uma **sequência** complexa $\{z_n\}$ é uma função cujo domínio é o conjunto de números inteiros positivos e cuja imagem é um subconjunto dos números complexos **C**. Em outras palavras, a cada inteiro $n = 1, 2, 3,...$ associamos um único número complexo $z_n$. Por exemplo, a sequência $\{1 + i^n\}$ é

Figura 6.1.1 Se $\{z_n\}$ converge a $L$, todos os termos, excetuando um número finito deles, estão em cada vizinhança $\varepsilon$ de $L$

$$\begin{array}{ccccc} 1+i, & 0, & 1-i, & 2, & 1+i, \ \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n=1, & n=2, & n=3, & n=4, & n=5, \ \dots \end{array} \tag{1}$$

Se $\lim_{n\to\infty} z_n = L$, dizemos que a sequência $\{z_n\}$ é **convergente**. Ou seja, $\{z_n\}$ converge ao número $L$ se, para cada número real positivo $\varepsilon$, puder ser encontrado um inteiro positivo $N$ tal que $|z_n - L| < \varepsilon$ sempre que $n > N$. Como $|z_n - L|$ é uma distância, os termos $z_n$ de uma sequência que converge a $L$ podem ser feitos arbitrariamente próximos de $L$. Dizendo de outra forma, quando uma sequência $\{z_n\}$ converge a $L$, todos os termos da sequência, excetuando um número finito deles, estão em cada vizinhança $\varepsilon$ de $L$ (Figura 6.1.1). Uma sequência que não é convergente é denominada **divergente**.

A sequência $\{1 + i^n\}$ ilustrada em (1) é divergente, pois o termo geral $z_n = 1 + i^n$ não se aproxima de um número complexo fixo quando $n \to \infty$. De fato, podemos verificar que os quatro primeiros termos desta sequência se repetem indefinidamente à medida que $n$ aumenta.

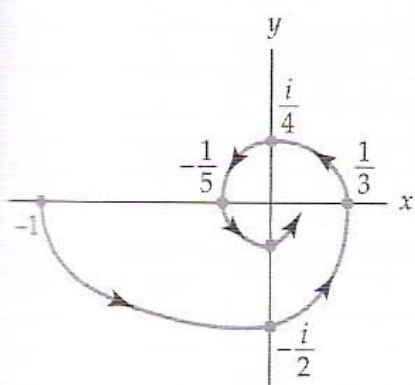



Figura 6.1.2 Os termos da sequência $\{i^{n+1}/n\}$ seguem uma curva espiral em direção a 0

**EXEMPLO 1 Uma Sequência Convergente**

A sequência $\left\{\dfrac{i^{n+1}}{n}\right\}$ converge, pois $\lim_{n\to\infty} \dfrac{i^{n+1}}{n} = 0$. Como vemos de

$$-1, -\frac{i}{2}, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{5}, \dots,$$

e da Figura 6.1.2, os termos da sequência, representados por pontos cinza na figura, seguem uma curva espiral em direção ao ponto $z = 0$ à medida que $n$ aumenta. ❑

O seguinte teorema para sequências é análogo ao Teorema 2.6.1 da Seção 2.6.

**Teorema 6.1.1 Critério para Convergência**

Uma sequência $\{z_n\}$ converge ao número complexo $L = a + ib$ se e somente se $\text{Re}(z_n)$ convergir a $\text{Re}(L) = a$ e $\text{Im}(z_n)$ convergir a $\text{Im}(L) = b$.

**EXEMPLO 2 Ilustração do Teorema 6.1.1**

Consideremos a sequência $\left\{\dfrac{3+ni}{n+2ni}\right\}$. De

$$z_n = \frac{3+ni}{n+2ni} = \frac{(3+ni)(n-2ni)}{n^2+4n^2} = \frac{2n^2+3n}{5n^2} + i\frac{n^2-6n}{5n^2},$$

vemos que

$$\text{Re}(z_n) = \frac{2n^2 + 3n}{5n^2} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5n} \to \frac{2}{5}$$

e

$$\text{Im}(z_n) = \frac{n^2 - 6n}{5n^2} = \frac{1}{5} - \frac{6}{5n} \to \frac{1}{5}$$

quando $n \to \infty$. Segundo o Teorema 6.1.1, os últimos resultados são suficientes para que concluamos que a sequência dada converge a $a + ib = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$. □

**Séries** Uma **série infinita** ou uma **série** de números complexos

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

é **convergente** se a sequência de termos parciais $\{S_n\}$, com

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n,$$

convergir. Se $S_n \to L$ quando $n \to \infty$, dizemos que a série converge a $L$ ou que a **soma** da série é $L$.

**Séries Geométricas** Uma **série geométrica** é qualquer série da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots. \tag{2}$$

Para (2), o $n$-ésimo termos da sequência parcial de termos é

$$S_n = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1}. \tag{3}$$

Quando uma série infinita é uma série geométrica, sempre é possível determinar uma fórmula para $S_n$. Para demonstrar isso, multipliquemos $S_n$ em (3) por $z$:

$$zS_n = az + az^2 + az^3 + \cdots + az^n,$$

e subtraiamos este resultado de $S_n$. Todos os termos se cancelam, exceto o primeiro termo em $S_n$ e o último em $zS_n$:

$$\begin{aligned} S_n - zS_n &= \left(a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1}\right) \\ &\quad - \left(az + az^2 + az^3 + \cdots + az^{n-1} + az^n\right) \\ &= a - az^n \end{aligned}$$

ou $(1 - z)S_n = a(1 - z^n)$. Resolvendo esta equação para $S_n$, obtemos

$$S_n = \frac{a(1 - z^n)}{1 - z}. \tag{4}$$

Sempre que $|z| < 1$, $z^n \to 0$ quando $n \to \infty$, de modo que $S_n \to a/(1 - z)$. Em outras palavras, para $|z| < 1$, a soma da série geométrica (2) é $a/(1 - z)$:

$$\frac{a}{1 - z} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots. \tag{5}$$

Uma série geométrica (2) diverge quando $|z| \geq 1$.

**Séries Geométricas Especiais** A seguir, apresentaremos várias deduções imediatas de (4) e (5) que serão particularmente úteis nas duas próximas seções. Se fizermos $a = 1$, a igualdade em (5) passa a

Vale a pena memorizar (6) e (7). ➡

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots. \tag{6}$$

Se, em (6), substituirmos o símbolo $z$ por $-z$, obtemos

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots. \tag{7}$$

Como em (5), a igualdade em (7) é válida para $|z| < 1$, pois $|-z| = |z|$. Com $a = 1$, (4) fornece a soma dos primeiros $n$ termos da série em (6):

$$\frac{1-z^n}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}.$$

Se reescrevermos o lado esquerdo desta equação como $\dfrac{1-z^n}{1-z} = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{-z^n}{1-z}$, obtemos uma forma alternativa

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1-z} \tag{8}$$

que será utilizada para provar os dois principais teoremas deste capítulo.

---

EXEMPLO 3 **Série Geométrica Convergente**

A série infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k} = \frac{1+2i}{5} + \frac{(1+2i)^2}{5^2} + \frac{(1+2i)^3}{5^3} + \cdots$$

é uma série geométrica. Esta série tem a forma em (2), com $a = \frac{1}{5}(1 + 2i)$ e $z = \frac{1}{5}(1 + 2i)$. Como $|z| = \sqrt{5}/5 < 1$, a série é convergente e sua soma é dada por (5):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k} = \frac{\frac{1+2i}{5}}{1 - \frac{1+2i}{5}} = \frac{1+2i}{4-2i} = \frac{1}{2}i.$$

❑

A seguir, apresentaremos alguns importantes teoremas a respeito de convergência e divergência de séries infinitas. Teoremas similares a estes são apresentados em cursos de cálculo elementar.

**Teorema 6.1.2 Uma Condição Necessária para Convergência**

Se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ convergir, então $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

**Prova** Seja $L$ a soma da série. Então $S_n \to L$ e $S_{n-1} \to L$ quando $n \to \infty$. Tomando o limite dos dois lados de $S_n - S_{n-1} = z_n$ $L$ quando $n \to \infty$, obtemos a condição necessária. ❑

**Um Teste de Divergência** A forma contrapositiva* da asserção no Teorema 6.1.2 é o familiar teste do $n$-ésimo termo para a divergência de uma série infinita.

**Teorema 6.1.3 Teste do $n$-ésimo Termo para Divergência**

Se $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, então $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge.

Por exemplo, a série $\sum_{k=1}^{\infty} (ik+5)/k$ diverge, pois $z_n = (in+5)/n \to i$ quando $n \to \infty$. A série geométrica (2) diverge se $|z| \geq 1$, pois mesmo quando $\lim_{n\to\infty} |z_n|$ existe este limite não é zero.

**Definição 6.1.1 Convergências Absoluta e Condicional**

Uma série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ **converge absolutamente** se $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ convergir. Uma série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ **converge condicionalmente** se for convergente e $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ divergir.

*A proposição "Se $P$, então $Q$" é logicamente equivalente à forma contrapositiva "Se não $Q$, então não $P$".

No cálculo elementar, uma série real da forma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ é denominada **série $p$**; esta série converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. Usaremos este resultado bem conhecido no próximo exemplo.

---

EXEMPLO 4 **Convergência Absoluta**

A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2}$ converge absolutamente, pois a série $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{i^k}{k^2}\right|$ é igual à série $p$ real convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, com $p = 2 > 1$. ❑

Como no cálculo real:

*Convergência absoluta implica convergência.*

(Problema 47 do Conjunto de Exercícios 6.1.) Agora, estamos em condições de concluir que a série no Exemplo 4

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2} = i - \frac{1}{2^2} - \frac{i}{3^2} + \cdots$$

converge, pois mostramos que converge absolutamente.

**Testes de Convergência** Dois dos testes mais usados para determinar a convergência de séries infinitas serão dados nos próximos dois teoremas.

**Teorema 6.1.4 Teste da Razão**

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ uma série de termos complexos não nulos tais que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L. \tag{9}$$

($i$) Se $L < 1$, a série converge absolutamente.
($ii$) Se $L > 1$ ou $L = \infty$, a série diverge.
($iii$) Se $L = 1$, o teste é não conclusivo.

**Teorema 6.1.5 Teste da Raiz**

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ uma série de termos complexos tais que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L. \tag{10}$$

($i$) Se $L < 1$, a série converge absolutamente.
($ii$) Se $L > 1$ ou $L = \infty$, a série diverge.
($iii$) Se $L = 1$, o teste é não conclusivo.

Provas dos testes da razão e da raiz são similares às dos análogos reais (Problema 48 do Conjunto de Exercícios 6.1). Aqui, nosso interesse principal é a aplicação dos testes especificados nos Teoremas 6.1.4 e 6.1.5 a séries de potências.

**Séries de potências** A noção de uma série de potência é importante no estudo de funções analíticas. Uma série infinita da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \tag{11}$$

onde os coeficientes $a_k$ são constantes complexas, é denominada **série de potências** em $z - z_0$. Dizemos que a série de potências em (11) é **centrada em** $z_0$; o ponto complexo $z_0$ é denominado **centro** da série. Em (11), é conveniente definir $(z - z_0)^0 = 1$, mesmo quando $z = z_0$.

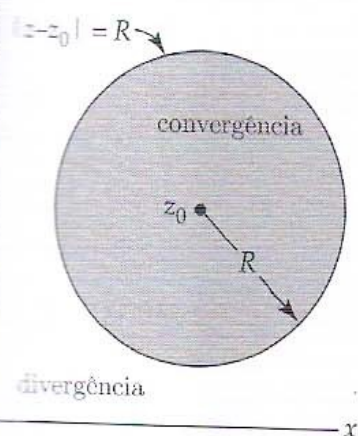



Figura 6.1.3 Não é possível fazer qualquer afirmação a respeito da convergência em pontos na circunferência $|z - z_0| = R$

**Círculo de Convergência** Toda série de potência complexa (11) tem um **raio de convergência.** Assim como uma série de potências real tem um intervalo de convergência, uma série de potências complexa (11) tem um **círculo de convergência**, que é um círculo com centro em $z_0$ e o maior raio $R > 0$ para o qual (11) converge em todos os pontos no *interior* do círculo $|z - z_0| = R$. Uma série de potências converge absolutamente em todos os pontos $z$ no interior de seu círculo de convergência, ou seja, para todo $z$ que satisfaz $|z - z_0| < R$, e diverge para todos os pontos fora do círculo, isto é, pontos que satisfazem $|z - z_0| > R$. O raio de convergência pode ser:

(*i*) $R = 0$ (neste caso, (11) converge apenas no centro do círculo $z = z_0$),
(*ii*) um número positivo finito $R$ (neste caso, (11) converge em todos os pontos interiores ao círculo $|z - z_0| = R$) ou
(*iii*) $R = \infty$ (neste caso, (11) converge para todo $z$).

Uma série de potências pode convergir em alguns, todos ou em nenhum dos pontos *na* circunferência do círculo de convergência (Figura 6.1.3). O próximo exemplo ilustra este fato.

---

**EXEMPLO 5 Círculo de Convergência**

Consideremos a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k}$. Pelo teste da razão (9),

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+2}}{n+1}}{\frac{z^{n+1}}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|z| = |z|.$$

Portanto, a série converge absolutamente para $|z| < 1$. O círculo de convergência é $|z| = 1$ e o raio de convergência é $R = 1$. Na circunferência do círculo de convergência, $|z| = 1$, a série não converge absolutamente, pois $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ é a bem conhecida e divergente série harmônica. Tenhamos em mente que *isto não significa* que a série diverge na circunferência do círculo de convergência. Na verdade, em $z = -1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ é a convergente série harmônica alternada. Podemos mostrar que a série converge em todos os pontos na circunferência $|z| = 1$, *exceto* em $z = 1$. ❑

Deve ficar claro do Teorema 6.1.4 e do Exemplo 5 que para uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, o limite (9) depende apenas dos coeficientes $a_k$. Logo, se

$$(i) \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \neq 0, \text{ o raio de convergência é } R = \frac{1}{L}; \tag{12}$$

$$(ii) \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0, \text{ o raio de convergência é } R = \infty; \tag{13}$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty, \text{ o raio de convergência é } R = 0. \tag{14}$$

Conclusões semelhantes se aplicam ao teste da razão (10), utilizando

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{15}$$

Por exemplo, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \neq 0$, então $R = 1/L$.

---

EXEMPLO 6 **Raio de Convergência**

Consideremos a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}(z-1-i)^k$. Identificando $a_n = (-1)^{n+1}/n!$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Consequentemente, segundo (13), o raio de convergência é $\infty$; a série de potências com centro $z_0 = 1 + i$ converge absolutamente para todo $z$, ou seja, para $|z - 1 - i| < \infty$. ❑

---

EXEMPLO 7 **Raio de Convergência**

Consideremos a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k (z-2i)^k$. Com $a_n = \left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n$, o teste da razão na forma (5) fornece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{2n+5} = 3.$$

Por raciocínio similar ao que levou a (12), concluímos que o raio de convergência da série é $R = \frac{1}{3}$. O círculo de convergência é $|z - 2i| = \frac{1}{3}$; a série de potências converge absolutamente para $|z - 2i| < \frac{1}{3}$. ❑

**Aritmética de Séries de Potências** Algumas vezes, pode ser conveniente efetuar certas *operações aritméticas* em uma ou mais séries de potências. Embora o detalhamento formal das propriedades de séries de potências (enunciando e provando teoremas) nos abrisse muitos caminhos, saber o que podemos (ou o que não podemos) fazer com séries de potências é útil em pontos deste capítulo. Aqui estão alguns fatos:

- Uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ pode ser multiplicada por uma constante complexa não nula $c$ sem afetar sua convergência ou divergência.
- Uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ converge absolutamente no interior de seu círculo de convergência. Em consequência, no interior do círculo de convergência os termos da série podem ser rearranjados, e a série rearranjada tem a mesma soma $L$ que a série original.
- Duas séries de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ podem ser somadas e subtraídas por meio de adição e subtração, respectivamente, de termos de mesma potência de $z - z_0$. Em símbolos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(z-z_0)^k.$$

  Caso as duas séries tenham o mesmo raio de convergência não nulo $R$, o raio de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(z-z_0)^k$ é $R$. Deve parecer intuitivo que se uma das séries tiver raio de convergência $r > 0$ e a outra raio de convergência $R > 0$, com $r \neq R$, o raio de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(z-z_0)^k$ é o menor dos dois números $r$ e $R$.
- Duas séries de potências podem (com cuidado) ser multiplicadas e divididas.

## Observações

(*i*) Se $z_n = a_n + ib_n$, o $n$-ésimo termo da sequência de somas parciais para $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ pode ser escrito como $S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + ib_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k$. Como no Teorema 6.1.2, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge

a um número $L = a + ib$ se e somente se $\text{Re}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ convergir a $a$ e $\text{Im}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k$ convergir a $b$ (Problema 35 do Conjunto de Exercício 6.1).

(*ii*) Quando escrita na notação de somatório, uma série geométrica pode não ser identificada imediatamente como equivalente a (2). Na notação de somatório, uma série geométrica não precisa começar em $k = 1$, assim como o termo geral não precisa aparecer exatamente na forma $az^{k-1}$. À primeira vista, $\sum_{k=3}^{\infty} 40\frac{i^{k+2}}{2^{k-1}}$ não parece ter a forma genérica $\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1}$ de uma série geométrica. No entanto, escrevendo os primeiros termos do somatório,

$$\sum_{k=3}^{\infty} 40\frac{i^{k+2}}{2^{k-1}} = \overbrace{40\frac{i^5}{2^2}}^{a} + \overbrace{40\frac{i^6}{2^3}}^{az} + \overbrace{40\frac{i^7}{2^4}}^{az^2} + \cdots$$

podemos identificar $a = 40(i^5/2^2)$ e $z = i/2$ no lado direito da igualdade. Como $|z| = \frac{1}{2} < 1$, a soma da série é dada por (5):

$$\sum_{k=3}^{\infty} 40\frac{i^{k+2}}{2^{k-1}} = \frac{40\frac{i^5}{2^2}}{1 - \frac{i}{2}} = -4 + 8i.$$

(*iii*) Embora não a tenhamos provado, vale a pena repetir a asserção: uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, $z \neq z_0$, *sempre* possui um raio de convergência $R$ que é positivo, 0 ou $\infty$. Na discussão anterior ao Exemplo 6 vimos que os testes da razão e da raiz levavam a

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{e} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

assumindo que o limite exista. Como estas fórmulas dependem apenas dos coeficientes, é fácil imaginar exemplos onde $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$ e $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$ não existam. Qual é o valor de $R$ se nenhum desses limites existir? (Problemas 45 e 46 do Conjunto de Exercícios 6.1).

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.1 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–4, escreva os primeiros cinco termos da sequência dada.

**1.** $\{5i^n\}$

**2.** $\{2 + (-i)^n\}$

**3.** $\{1 + e^{n\pi i}\}$

**4.** $\{(1 + i)^n\}$ [*Sugestão*: use a forma polar.]

Nos Problemas 5–10, determine se a sequência dada converge ou diverge.

**5.** $\left\{\frac{3ni + 2}{n + ni}\right\}$

**6.** $\left\{\frac{ni + 2^n}{3ni + 5^n}\right\}$

**7.** $\left\{\frac{(ni + 2)^2}{n^2 i}\right\}$

**8.** $\left\{\frac{n(1 + i^n)}{n + 1}\right\}$

**9.** $\left\{\frac{n + i^n}{\sqrt{n}}\right\}$

**10.** $\left\{e^{1/n} + 2(\tan^{-1} n)i\right\}$

Nos Problemas 11 e 12, mostre que a sequência dada $\{z_n\}$ converge a um número complexo $L$; para isso, calcule $\lim_{n\to\infty}\text{Re}(z_n)$ e $\lim_{n\to\infty}\text{Im}(z_n)$.

**11.** $\left\{\frac{4n + 3ni}{2n + i}\right\}$

**12.** $\left\{\left(\frac{1 + i}{4}\right)^n\right\}$

Nos Problemas 13 e 14, use a sequência de somas parciais para mostrar que a série dada é convergente.

**13.** $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k + 2i} - \frac{1}{k + 1 + 2i}\right]$

**14.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i}{k(k + 1)}$

Nos Problemas 15–20, determine se a dada série geométrica é convergente ou divergente. Caso seja convergente, determine sua soma.

**15.** $\sum_{k=0}^{\infty} (1-i)^k$

**16.** $\sum_{k=1}^{\infty} 4i\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

**17.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k$

**18.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}i^k$

**19.** $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{2}{1+2i}\right)^k$

**20.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^k}{(1+i)^{k-1}}$

Nos Problemas 21–30, determine o círculo e o raio de convergência da série de potências dada.

**21.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{k+1}}(z-2i)^k$

**22.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{i}{1+i}\right) z^k$

**23.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k2^k}(z-1-i)^k$

**24.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(3+4i)^k}(z+3i)^k$

**25.** $\sum_{k=0}^{\infty} (1+3i)^k(z-i)^k$

**26.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^k}$

**27.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-4-3i)^k}{5^{2k}}$

**28.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\left(\frac{1+2i}{2}\right)^k(z+2i)^k$

**29.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+2)\,(k!)^2}(z-i)^{2k}$

**30.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)^k} z^{3k}$

**31.** Mostre que a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{k2^k}$ não converge absolutamente na circunferência de seu círculo de convergência. Determine pelo menos um ponto na circunferência do círculo de convergência em que a série de potências é convergente.

**32.** Mostre a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ converge em todos os pontos na circunferência de seu círculo de convergência.

**33.** Releia o Teorema 6.1.3. A que conclusão você chega se $\lim_{n\to\infty}|z_n| \neq 0$?

**34.** Mostre que a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ converge em todos os pontos na circunferência de seu círculo de convergência.

## Foco em Conceitos

**35.** Considerando a série $\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik\theta}$, $0 < r < 1$, mostre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^k \operatorname{sen} k\theta = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

**36.** Suponha que $\{z_n + w_n\}$ convirja. Isso significa que pelo menos uma das sequências $\{z_n\}$ ou $\{w_n\}$ converge?

**37.** Uma sequência $\{z_n\}$ é **limitada** se o conjunto $S$ dos termos for um conjunto limitado (Seção 1.5). A sequência no Exemplo 1 é limitada.

(a) Prove que a sequência no Exemplo 2 é limitada.

(b) Dê um outro exemplo de uma sequência de termos complexos que seja limitada.

(c) Dê um exemplo de uma sequência de termos complexos que seja ilimitada.

**38.** Toda sequência $\{z_n\}$ convergente é limitada? (Veja o Problema 37.)

Toda sequência limitada é convergente? Justifique suas respostas matematicamente.

**39.** A sequência $\{i^{1/n}\}$, onde $i^{1/n}$ denota a raiz $n$-ésima principal de $i$, converge?

**40.** Vimos que a igualdade em (4) era válida para $|z| < 1$. Mostre que

$$\frac{1}{1-z} = -z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - \cdots$$

e dê os valores de $z$ para os quais a igualdade é válida.

**41.** Considere (6) com o símbolo $z$ substituído por $e^{iz}$:

$$\frac{1}{1-e^{iz}} = e^{iz} + e^{2iz} + e^{3iz} + \cdots .$$

Dê a região no plano complexo em que esta série converge.

**42.** Esboce uma ilustração da região no plano complexo em que $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z+2}\right)^k$ converge.

**43.** Considere a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-1+2i)^k$. Esta série pode convergir em $-3+i$ e divergir em $5-3i$?

**44.** Faça desenhos no plano complexo que ilustrem a validade de cada um dos seguintes teoremas:

($i$) Se uma série de potências centrada em $z_0$ convergir em $z_1 \neq z_0$, então a série converge em todo $z$ que satisfaça $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.

($ii$) Se uma série de potências centrada em $z_0$ divergir em $z_2$, então a série diverge em todo $z$ que satisfaça $|z-z_0| > |z_2 - z_0|$.

**45.** Considere a série de potências $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, onde

$$a_k = \begin{cases} 2^k, & k = 0, 2, 4, \dots \\ \dfrac{1}{7^k} & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

**(a)** Mostre que $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$ e $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$ não existem.

**(b)** Determine o raio de convergência de cada uma das seguintes séries:

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} z^{2k} \qquad \text{e} \qquad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7^{2k+1}} z^{2k+1}.$$

**(c)** Comprove que $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. O raio de convergência $R$ da série de potências original pode ser determinado a partir desta observação? Qual é o valor de $R$?

**46.** Proceda como no Problema 45 e determine o raio de convergência $R$ para a série de potências

$$1 + 3z + z^2 + 27z^3 + z^4 + 243z^5 + z^6 + \cdots$$

**47.** Este problema vai guiá-lo nos passos iniciais da prova da asserção:

*Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge absolutamente, então a série converge.*

**Prova** Iniciamos com a hipótese de que $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ converge. Se $z_k = a_k + ib_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k^2+b_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$.

**(a)** Primeiro, explique por que a desigualdade anterior é verdadeira. Segundo, explique por que esta desigualdade mostra que a série $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ converge.

**(b)** Explique por que seu raciocínio para a parte (a) também mostra que $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ converge.

**(c)** Explique por que seu raciocínio para as partes (a) e (b) mostra que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge.

**48.** Este problema vai guiá-lo nos passos iniciais da prova da parte ($i$) do teste da razão (9).

**Prova** Iniciamos com a hipótese de que $\lim_{n\to\infty}|z_{n+1}/z_n| = L < 1$.

**(a)** Primeiro, explique por que existe um inteiro $N$ e um número real positivo $r < 1$ tais que $|z_{n+1}/z_n| < r$ sempre que $n > N$. Segundo, explique por que isso implica que $|z_{N+j}| < r^j|z_N|$, para $j = 0, 1, 2, \dots$

**(b)** Use o teste da comparação da análise real e a parte (a) para mostrar que $\sum_{j=0}^{\infty}|z_{N+j}|$ converge.

**(c)** Explique por que a parte (b) mostra que $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ converge absolutamente.

## 6.2 Série de Taylor

A correspondência entre um número complexo $z$ no interior do círculo de convergência e o número a que a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ converge é unívoca. Neste sentido, uma série de potências *define* ou *representa* uma função $f$; para um $z$ específico no interior do círculo de convergência, o número $L$ a que a série de potências converge é definido como o valor de $f$ em $z$, isto é, $f(z) = L$. Nesta seção, apresentaremos alguns fatos importantes a respeito da natureza desta função $f$.

Na seção anterior vimos que toda série de potências tem um raio de convergência $R$. Ao longo desta seção assumiremos que uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ tem um raio de convergência $R$ *positivo* ou *infinito*.

**Diferenciação e Integração de Séries de Potências** Os três teoremas a seguir indicam que uma função $f$ definida por uma série de potências é contínua, diferenciável e integrável no interior de seu círculo de convergência.

**Teorema 6.2.1 Continuidade**

Uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ representa uma função contínua $f$ no interior de seu círculo de convergência $|z-z_0| = R$.

**Teorema 6.2.2 Diferenciação Termo a Termo**

Uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ pode ser diferenciada termo a termo no interior de seu círculo de convergência $|z-z_0| = R$.

Diferenciando uma série de potências termo a termo, obtemos

$$\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d}{dz}(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(z-z_0)^{k-1}.$$

Notemos que o índice do somatório na última série começa em $k = 1$, pois o termo correspondente a $k = 0$ é nulo. É fácil provar pelo teste da razão que a série original e a série após diferenciação

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(z-z_0)^{k-1}$$

têm o mesmo círculo de convergência $|z-z_0| = R$. Como a derivada de uma série de potências é outra série de potências, a primeira série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ pode ser diferenciada quantas vezes desejarmos. Em outras palavras, um corolário ao Teorema 6.2.2 é que *uma série de potências define uma função infinitamente diferenciável* no interior de seu círculo de convergência, e cada série resultante da diferenciação tem o mesmo raio de convergência $R$ que a série de potências original.

*Importante.* ➾

**Teorema 6.2.3 Integração Termo a Termo**

Uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ pode ser integrada termo a termo no interior de seu círculo de convergência $|z-z_0| = R$, para todo contorno $C$ totalmente posicionado no interior do círculo de convergência.

O teorema afirma que

$$\int_C \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C (z-z_0)^k\, dz$$

sempre que $C$ estiver no interior de $|z-z_0| = R$. Integração indefinida também pode ser efetuada termo a termo:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int (z-z_0)^k dz$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \text{constante}.$$

O teste da razão dado no Teorema 6.1.4 pode ser usado para provar que as duas séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$$

têm o mesmo círculo de convergência $|z-z_0| = R$.

**Série de Taylor** Suponhamos que uma série de potências represente uma função $f$ no interior de $|z - z_0| = R$, ou seja,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots . \tag{1}$$

Segundo o Teorema 6.2.2, as derivadas de $f$ são as séries

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(z - z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots , \tag{2}$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(z - z_0)^{k-2} = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3(z - z_0) + \cdots , \tag{3}$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3 + \cdots , \tag{4}$$

e assim por diante. Como a série de potências (1) representa uma função diferenciável $f$ no interior de seu círculo de convergência $|z - z_0| = R$, sendo $R$ um número positivo ou infinito, concluímos que uma *série de potências representa uma função analítica* no interior de seu círculo de convergência.

Importante. ➡

Existe uma relação entre os coeficientes $a_k$ em (1) e as derivadas de $f$. O cálculo de (1), (2), (3) e (4) em $z = z_0$ fornece

$$f(z_0) = a_0, \; f'(z_0) = 1!a_1, \; f''(z_0) = 2!a_2, \quad \text{e} \quad f'''(z_0) = 3!a_3,$$

respectivamente. Em geral, $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$, ou

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \; n \geq 0. \tag{5}$$

Quando $n = 0$ em (5), interpretamos a derivada de ordem zero como $f(z_0)$ e $0! = 1$, de modo que a fórmula fornece $a_0 = f(z_0)$. Substituindo (5) em (1), obtemos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \tag{6}$$

Esta série é denominada **série de Taylor** para $f$, centrada em $z_0$. Uma série de Taylor com centro $z_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \tag{7}$$

é referida como **série de Maclaurin**.

Acabamos de ver que uma série de potências com raio de convergência $R$ não nulo representa uma função analítica. Contudo, cabe a pergunta:

***Pergunta***

*Se nos for dada uma função $f$ que é analítica em algum domínio $D$, podemos representá-la por uma série de potências da forma* (6) *ou* (7)?

Como uma série de potências converge em um domínio circular e, em geral, um domínio $D$ não é circular, a pergunta se torna: podemos expandir $f$ em uma ou mais séries de potências que sejam *válidas* — isto é, séries de potências que convirjam em $z$ e o número a que as séries convergem seja $f(z)$ — em domínios circulares que estejam todos contidos em $D$? Esta pergunta é respondida na asserção do próximo teorema.

**Teorema 6.2.4 Teorema de Taylor**

Seja $f$ uma função analítica em um domínio $D$ e seja $z_0$ um ponto em $D$. Então, $f$ tem a seguinte representação em série

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \tag{8}$$

válida para o maior círculo $C$ com centro em $z_0$ e raio $R$ que esteja totalmente contido em $D$.

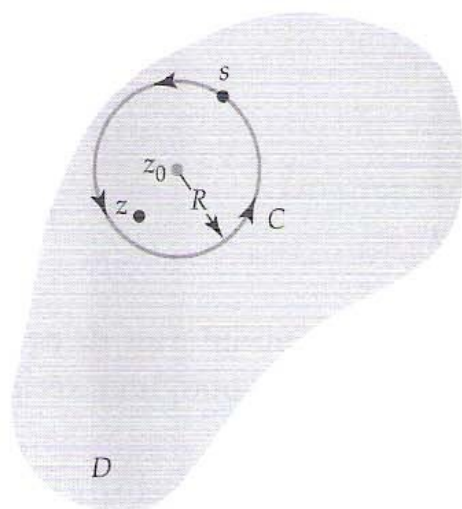



Figura 6.2.1 Contorno para a prova do Teorema 6.2.4

**Prova** Seja $z$ um ponto fixo no interior do círculo $C$ e seja $s$ a variável de integração. O círculo $C$ é descrito por $|s-z_0|=R$ (Figura 6.2.1). Inicialmente, usemos a fórmula integral de Cauchy para calcular o valor de $f$ em $z$:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{s-z}ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)-(z-z_0)}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)}\left\{\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}\right\}ds. \tag{9}$$

Substituindo $z$ por $(z-z_0)/(s-z_0)$ em (8) da Seção 6.1, obtemos

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}=1+\frac{z-z_0}{s-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{n-1}+\frac{(z-z_0)^n}{(s-z)(s-z_0)^{n-1}},$$

de modo que (9) passa a

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{s-z_0}ds+\frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}ds\\&+\frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)^3}ds+\cdots+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)^n}ds\\&+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}ds.\end{aligned} \tag{10}$$

Usando a fórmula integral de Cauchy para derivadas, (6) da Seção 5.5, podemos reescrever (10) como

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}+R_n(z), \tag{11}$$

onde
$$R_n(z)=\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}ds.$$

A equação (11) é conhecida como fórmula de Taylor com resto $R_n$. Agora, desejamos mostrar que $R_n(z)\to 0$ quando $n\to\infty$. Isto pode ser feito mostrando que $|R_n(z)|\to 0$ quando $n\to\infty$. Como $f$ é analítica em $D$, o Teorema 5.5.8 nos diz que $|f(z)|$ tem um valor máximo $M$ no contorno $C$. Além disso, como $z$ está no interior de $C$, $|z-z_0|<R$ e, consequentemente,

$$|s-z|=|s-z_0-(z-z_0)|\geq|s-z_0|-|z-z_0|=R-d,$$

onde $d=|z-z_0|$ é a distância de $z$ a $z_0$. A desigualdade $ML$ fornece

$$|R_n(z)|=\left|\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}ds\right|\leq\frac{d^n}{2\pi}\cdot\frac{M}{(R-d)R^n}\cdot 2\pi R=\frac{MR}{R-d}\left(\frac{d}{R}\right)^n.$$

Como $d < R$, $(d/R)^n \to 0$ quando $n \to \infty$, concluímos que $|R_n(z)| \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, a série infinita

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

converge a $f(z)$. Em outras palavras, o resultado em (8) é válido para qualquer ponto $z$ no interior de $C$. ❑

Podemos determinar o raio de convergência de uma série de Taylor exatamente da mesma forma ilustrada nos Exemplos 5–7 da seção anterior. No entanto, podemos simplificar as coisas ainda mais se notarmos que *o raio de convergência $R$ é a distância do centro da série $z_0$ à* ***singularidade isolada*** *de $f(z)$ mais próxima*. Singularidade isolada, cujo conceito detalharemos na próxima seção, é um ponto em que $f$ deixa de ser analítica, mas $f$ é analítica em todos os outros pontos em *alguma* vizinhança desse ponto. Por exemplo, $z = 5i$ é uma singularidade isolada de $f(z) = 1/(z - 5i)$. Se a função $f$ for inteira, o raio de convergência de uma série de Taylor centrada em qualquer ponto $z_0$ é necessariamente $R = \infty$. Usando (8) e este fato, podemos dizer que as seguintes representações de em série de Maclaurin são válidas para todo $z$, ou seja, para $|z| < \infty$.

### *Algumas Importantes Séries de Maclaurin*

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{12}$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{13}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{14}$$

---

**EXEMPLO 1 Raio de Convergência**

Suponhamos que a função $f(z) = \dfrac{3 - i}{1 - i + z}$ seja expandida em uma série de Taylor com centro $z_0 = 4 - 2i$. Qual é o raio de convergência $R$?

**Solução** Observemos que a função é analítica em todo ponto, exceto em $z = -1 + i$, que é uma singularidade isolada de $f$. A distância de $z = -1 + i$ a $z_0 = 4 - 2i$ é

$$|z - z_0| = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{34}.$$

Este último número é o raio de convergência $R$ da série de Taylor centrada em $4 - 2i$. ❑

Se duas séries de potências com centro $z_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \qquad e \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$$

representarem a mesma função $f$ e tiverem o mesmo raio de convergência $R$ não nulo, então

$$a_k = b_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

*Nota*: em geral, a fórmula em (8) é usada como último recurso. ➡

Dizendo de outra maneira, a expansão de uma função em série de potências com centro $z_0$ é *única*. Na prática, isso significa que uma expansão de uma função analítica em série de potências centrada em $z_0$, independentemente do método usado para obtê-la, é *a* expansão em série de Taylor da função. Por exemplo, podemos obter (14) diferenciando (13) termo a termo. A série de Maclaurin para $e^{z^2}$ pode ser obtida substituindo o símbolo $z$ em (12) por $z^2$.

**EXEMPLO 2 Série de Maclaurin**

Determinemos a expansão de $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ em série de Maclaurin.

**Solução** Poderíamos iniciar usando (8) para calcular os coeficientes. Contudo, recordemos de (6) da Seção 6.1, que, para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \tag{15}$$

Se diferenciarmos os dois lados deste último resultado em relação a $z$, temos

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz}1 + \frac{d}{dz}z + \frac{d}{dz}z^2 + \frac{d}{dz}z^3 + \cdots$$

ou

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k\, z^{k-1}. \tag{16}$$

Como estamos usando o Teorema 6.2.2, o raio de convergência da última série de potências é igual ao da série original: $R = 1$. ❑

Muitas vezes, resultados como (16) podem ser úteis para obter outros. Por exemplo, se quisermos a expansão de $f(z) = \dfrac{z^3}{(1-z)^2}$ em série de Maclaurin, basta que multipliquemos (16) por $z^3$:

$$\frac{z^3}{(1-z)^2} = z^3 + 2z^4 + 3z^5 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k\, z^{k+2}.$$

O raio de convergência da última série ainda é $R = 1$.

**EXEMPLO 3 Série de Taylor**

Calculemos a expansão de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ em uma série de Taylor com centro em $z_0 = 2i$.

**Solução** Mais uma vez usaremos a série geométrica (5). Somando e subtraindo $2i$ ao denominador de $1/(1-z)$, podemos escrever

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z+2i-2i} = \frac{1}{1-2i-(z-2i)} = \frac{1}{1-2i}\frac{1}{1-\dfrac{z-2i}{1-2i}}.$$

Agora usamos (15) e substituímos o símbolo $z$ pela expressão $\dfrac{z-2i}{1-2i}$ para escrever $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-2i}{1-2i}}$ como uma série de potências:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i}\left[1 + \frac{z-2i}{1-2i} + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^3 + \cdots\right]$$

ou

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{(1-2i)^2}(z-2i) + \frac{1}{(1-2i)^3}(z-2i)^2 + \frac{1}{(1-2i)^4}(z-2i)^3 + \cdots \tag{17}$$

Como a distância entre o centro $z_0 = 2i$ e a singularidade isolada mais próxima $z = 1$ é $\sqrt{5}$, concluímos que o círculo de convergência para (17) é $|z - 2i| = \sqrt{5}$. Isso pode ser comprovado pelo teste da razão da seção anterior. ❑

Em (15) e (17) representamos a mesma função $f(z) = 1/(1-z)$ por duas séries de potências diferentes. A primeira série (15) tem centro $z_0 = 0$ e raio de convergência $R = 1$. A segunda série (17) tem centro $z_0 = 2i$ e raio de convergência $R = \sqrt{5}$. Os dois círculos de convergência são ilustrados na Figura 6.2…

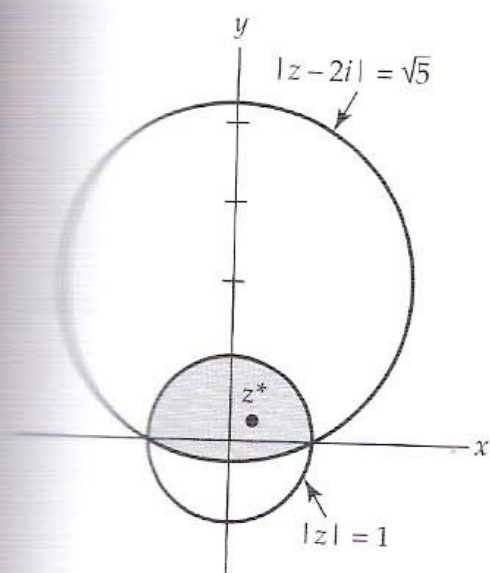



Figura 6.2.2 As séries (15) e (17) convergem na região cinza-escuro

O interior da interseção dos dois círculos, mostrada em cinza-escuro, é a região em que *ambas* as séries convergem; em outras palavras, em um dado ponto $z^*$ nesta região as duas séries convergem ao mesmo valor $f(z^*) = 1/(1 - z^*)$. Fora da região cinza-escuro, pelo menos uma das duas séries diverge.

**Observações** *Comparação com Análise Real*

(*i*) Como uma consequência do Teorema 5.5.3, sabemos que uma função analítica $f$ é infinitamente diferenciável. Como uma consequência do Teorema 6.2.4, sabemos que uma função analítica $f$ sempre pode ser expandida em uma série de potências com um raio de convergência $R$ não nulo. Na análise real uma função $f$ pode ser infinitamente diferenciável, mas pode ser impossível representá-la por uma série de potências (Problema 51 do Conjunto de Exercício 6.2).

(*ii*) Vale notar que os resultados em (6), (7), (12), (13) e (14) são idênticos em forma aos respectivos análogos do cálculo elementar.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.2 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–12, use resultados conhecidos para expandir a função dada em uma série de Maclaurin. Dê o raio de convergência $R$ de cada série.

**1.** $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$

**2.** $f(z) = \dfrac{1}{4-2z}$

**3.** $f(z) = \dfrac{1}{(1+2z)^2}$

**4.** $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^3}$

**5.** $f(z) = e^{-2z}$

**6.** $f(z) = ze^{-z^2}$

**7.** $f(z) = \operatorname{senh} z$

**8.** $f(z) = \cosh z$

**9.** $f(z) = \cos \dfrac{z}{2}$

**10.** $f(z) = \operatorname{sen} 3z$

**11.** $f(z) = \operatorname{sen} z^2$

**12.** $f(z) = \cos^2 z$ [*Sugestão*: use uma identidade trigonométrica.]

Nos Problemas 13 e 14, use a série de Maclaurin para $e^z$ e expanda a função dada em uma série de Taylor centrada no ponto $z_0$ indicado. [*Sugestão*: $z = z - z_0 + z_0$.]

**13.** $f(z) = e^z,\ z_0 = 3i$

**14.** $f(z) = (z-1)e^{-3z},\ z_0 = 1$

Nos Problemas 15–22, expanda a função dada em uma série de Taylor centrada no ponto $z_0$ indicado. Dê o raio de convergência $R$ de cada série.

**15.** $f(z) = \dfrac{1}{z},\ z_0 = 1$

**16.** $f(z) = \dfrac{1}{z},\ z_0 = 1+i,$

**17.** $f(z) = \dfrac{1}{3-z},\ z_0 = 2i$

**18.** $f(z) = \dfrac{1}{1+z},\ z_0 = -i,$

**19.** $f(z) = \dfrac{z-1}{3-z},\ z_0 = 1$

**20.** $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z},\ z_0 = i$

**21.** $f(z) = \cos z,\ z_0 = \pi/4$

**22.** $f(z) = \operatorname{sen} z,\ z_0 = \pi/2$

Nos Problemas 23 e 24, use (7) para determinar os três primeiros termos não nulos da série de Maclaurin para a função dada.

**23.** $f(z) = \tan z$

**24.** $f(z) = e^{1/(1+z)}$

Nos Problemas 25 e 26, use frações parciais para auxiliar a determinação da série de Maclaurin para a função dada. Dê o raio de convergência $R$ da série.

**25.** $f(z) = \dfrac{i}{(z-i)(z-2i)}$

**26.** $f(z) = \dfrac{z-7}{z^2-2z-3}$

Nos Problemas 27 e 28, sem efetuar a expansão, determine o raio de convergência $R$ da série de Taylor da função dada, centrada no ponto indicado.

**27.** $f(z) = \dfrac{4+5z}{1+z^2}$, $z_0 = 2 + 5i$ **28.** $f(z) = \cot z$, $z_0 = \pi i$

**29.** Qual é o raio de convergência $R$ da série de Maclaurin no Problema 23?

**30.** Qual é o raio de convergência $R$ da série de Maclaurin no Problema 24?

Nos Problemas 31 e 32, expanda a função dada em uma série de Taylor centrada em cada um dos pontos indicados. Dê o raio de convergência $R$ de cada série. Faça uma ilustração da região em que as duas séries convergem.

**31.** $f(z) = \dfrac{1}{2+z}$, $z_0 = -1$, $z_0 = i$ **32.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 1 + i$, $z_0 = 3$

Nos Problemas 33 e 34, use resultados desta seção para determinar a soma da série de potências dada.

**33.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 3^k z^k$ **34.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^2}{k!}$

**35.** Determine a série de Maclaurin (14) diferenciando a série de Maclaurin (13).

**36.** A **função erro** erf($z$) é definida pela integral $\text{erf}(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-t^2} dt$ . Determine uma série de Maclaurin para erf($z$) integrando a série de Maclaurin para $e^{-t^2}$.

Nos Problemas 37 e 38, aproxime o valor da expressão dada usando o número indicado de termos de uma série de Maclaurin.

**37.** $e^{(1+i)/10}$, três termos **38.** $\text{sen}\left(\dfrac{1+i}{10}\right)$, dois termos

## Foco em Conceitos

**39.** Toda função $f$ tem um domínio de definição. Descreva, em palavras, o domínio da função $f$ definida por uma série de potências centrada em $z_0$.

**40.** Se $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ e $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, o **produto de Cauchy** de $f$ e $g$ é dado por

$$f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{onde} \quad c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}.$$

Escreva os primeiros cinco termos da série de potências de $f(z)g(z)$.

**41.** Use o Problema 40, (12) desta seção e (6) da Seção 6.1 e determine os primeiros quatro termos não nulos da série de Maclaurin de $e^z/(1-z)$. Qual é o raio de convergência $R$ da série?

**42.** Use o Problema 40 e (13) e (14) desta seção e determine os primeiros quatro termos não nulos da série de Maclaurin de sen $z$ cos $z$. Você imagina outra maneira de obter esta série?

**43.** A função $f(z) = \sec z$ é analítica em $z = 0$ e, portanto, possui uma representação em série de Maclaurin. É claro que podemos usar (7), mas existem várias maneiras alternativas de obter os coeficientes da série

$$\sec z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots.$$

Uma consiste em igualar coeficientes nos dois lados da identidade $1 = (\sec z)\cos z$ ou

$$1 = \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right).$$

Determine os quatro primeiros termos não nulos da série de Maclaurin de $f$. Qual é o raio de convergência $R$ da série?

**44.** (a) Usando a definição $\sec z = 1/\cos z$ e divisão longa, obtenha os três primeiros termos não nulos da série de Maclaurin no Problema 43.

(b) Usando $f(z) = \csc z = 1/\text{sen } z$ e divisão longa, obtenha os três primeiros termos não nulos de uma série infinita. Esta é uma série de Maclaurin?

**45.** Suponha que uma função complexa $f$ seja analítica em um domínio $D$ que contém $z_0 = 0$ e que $f$ satisfaz $f'(z) = 4z + f^2(z)$. Suponha, ainda, que $f(0) = 1$.

(a) Calcule $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

(b) Determine os primeiros seis termos da expansão de $f$ em série de Maclaurin.

**46.** Determine uma forma para obter os três primeiros termos não nulos da série de Maclaurin para $f(z) = \tan z$ (veja o Problema 23) com base:

(a) na identidade $\tan z = \text{sen } z \sec z$ e nos Problemas 42 e 43,

(b) no Problema 44(a),

(c) no Problema 45. [*Sugestão*: $f'(z) = \sec^2 z = 1 + \tan^2 z$.]

**47.** Vimos, no Problema 34 do Conjunto de Exercícios 1.3, que a fórmula de de Moivre pode ser usada para obter identidades trigonométricas para $\cos 3\theta$ e $\text{sen } 3\theta$. Como estas identidades podem ser utilizadas para obter séries de Maclaurin para $\text{sen}^3 z$ e $\cos^3 z$? [*Sugestão*: simplifique sua resposta ao Problema 34. Por exemplo, $\cos^2 \theta \text{ sen } \theta = (1 - \text{sen}^2 \theta) \text{ sen } \theta$.]

**48.** (a) Suponha que o valor principal do logaritmo $\text{Ln } z = \log_e|z| + i\text{Arg}(z)$ seja expandido em uma série de Taylor com centro em $z_0 = -1 + i$. Explique por que $R = 1$ é o raio do maior círculo centrado em $z_0 = -1 + i$ no interior do qual a função considerada é analítica.

(b) Mostre que, no interior do círculo $|z - (-1 + i)| = 1$, a série de Taylor para esta função é

$$\text{Ln } z = \frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{3\pi}{4}i - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1+i}{2}\right)^k (z + 1 - i)^k.$$

(c) Mostre que o raio de convergência para a série de potências na parte (b) é $R = \sqrt{2}$. Explique por que isso não contradiz o resultado da parte (a).

**49.** (a) Considere a função $\text{Ln}(1 + z)$. Qual é o raio do maior círculo centrado na origem no interior do qual esta função é analítica?

(b) Expanda esta função em uma série de Maclaurin. Qual é o raio de convergência desta série?

(c) Use o resultado da parte (b) para determinar uma série de Maclaurin para $\text{Ln}(1 - z)$.

(d) Determine uma série de Maclaurin para $\text{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

**50.** Vimos, no Teorema 3.1.3, que a regra de L'Hôpital é válida na análise complexa.

No Problema 33 do Conjunto de Exercícios 3.1, com base na definição de derivada, você foi guiado nos primeiros passos de uma prova da seguinte asserção:

*Se as funções $f$ e $g$ forem analíticas em um ponto $z_0$ e se $f(z_0) = 0$,*

$$g(z_0) = 0, \text{ e } g'(z_0) \neq 0, \text{ então } \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Agora, prove a asserção substituindo $f(z)$ e $g(z)$ por suas séries de Taylor centradas em $z_0$.

## Projetos

**51.** (a) Você se deparará com a seguinte função real na maioria de antigos livros de cálculo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Consulte tais livros de cálculo a respeito desta função e mostre que $f$ é infinitamente diferenciável em todo valor de $x$. Mostre, ainda, que $f$ não pode ser representada por uma série de Maclaurin em qualquer valor de $x \neq 0$.

(b) Investigue se o análogo complexo da função real na parte (a),

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

é infinitamente diferenciável em $z = 0$.

## 6.3 Série de Laurent

Caso uma função complexa $f$ deixe de ser analítica em um ponto $z = z_0$, este ponto é denominado **sin-gularidade** ou **ponto singular** da função. Por exemplo, os números complexos $z = 2i$ e $z = -2i$ são sin-gularidades da função $f(z) = z/(z^2 + 4)$, pois $f$ é descontínua em cada um desses pontos. Recordemos da Seção 4.1, que a função valor principal do logaritmo, Ln $z$, é analítica em todos os pontos, exceto aqueles no corte de ramo, que é o eixo $x$ não positivo; ou seja, o ponto $z = 0$ e todos os números reais negativos são pontos singulares de Ln $z$.

Nesta seção, voltaremos a atenção para um novo tipo de expansão em "série de potências" de $f$ em torno de uma **singularidade isolada** $z_0$. Este novo tipo de série envolve potências inteiras negativas e não negativas de $z - z_0$.

**Singularidades Isoladas** Suponhamos que $z = z_0$ seja uma singularidade da função complexa $f$. O ponto $z = z_0$ é uma **singularidade isolada** da função $f$ se existir *alguma* vizinhança deletada, ou disco aberto perfurado, $0 < |z - z_0| < R$ de $z_0$ em que $f$ é analítica. Por exemplo, acabamos de ver que $z = 2i$ e $z = -2i$ são singularidades de $f(z) = z/(z^2 + 4)$. Tanto $2i$ como $-2i$ são singularidades isoladas, pois $f$ é analítica em todos os pontos na vizinhança definida por $|z - 2i| < 1$, exceto em $z = 2i$, e em todos os pontos na vizinhança definida por $|z - (-2i)| < 1$, exceto em $z = -2i$. Em outras palavras, $f$ é analítica nas vizinhanças deletadas $0 < |z - 2i| < 1$ e $0 < |z + 2i| < 1$. O ponto de ramo $z = 0$, por sua vez, não é uma singularidade isolada de Ln $z$, pois toda vizinhança de $z = 0$ deve conter pontos no eixo $x$ negativo. Dizemos que um ponto singular $z = z_0$ de uma função $f$ é **não isolado** se *toda* vizinhança de $z_0$ contém pelo menos uma singularidade de $f$ que seja diferente de $z_0$. Por exemplo, o ponto de ramo $z = 0$ é uma singularidade não isolada de Ln $z$.

**Um Novo Tipo de Série** Se $z = z_0$ for uma singularidade de uma função $f$, certamente $f$ não pode ser expandida em uma série de potências que tenha $z_0$ como centro. Contudo, em torno de uma singularidade isolada $z = z_0$ é possível representar $f$ por uma série que envolve potências inteiras negativas e não nega-tivas de $z - z_0$; ou seja,

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots.$$

Como um exemplo *muito* simples de (1), consideremos a função $f(z) = 1/(z - 1)$. Como podemos [illegible] o ponto $z = 1$ é uma singularidade isolada de $f$ e, consequentemente, a função não pode ser expandida em uma série de Taylor centrada neste ponto. No entanto, $f$ pode ser expandida em uma série da forma em (1) que seja válida para todo $z$ *próximo* de 1:

$$f(z) = \cdots + \frac{0}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + 0 + 0 \cdot (z-1) + 0 \cdot (z-1)^2 + \cdots$$

A representação em série em (2) é válida para $0 < |z - 1| < \infty$.

Usando a notação de somatório, podemos escrever (1) como a soma de duas séries:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

As duas séries no lado direito de (3) recebem nomes especiais. A parte com potências negativas de $z - z_0$, isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

é denominada **parte principal** da série (1) e converge para $|1/(z - z_0)| < r^*$ ou, de modo equivalente, $|z - z_0| > 1/r^* = r$. A parte que consiste em potências não negativas de $z - z_0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k,$$

é denominada **parte analítica** da série (1) e converge para $|z - z_0| < R$. Portanto, a soma de (4) e (5) converge quando $z$ satisfaz as duas desigualdades $|z - z_0| > r$ e $|z - z_0| < R$; ou seja, quando $z$ é um ponto no domínio anelar definido por $r < |z - z_0| < R$.

Efetuando a soma nos inteiros negativos e não negativos, (1) pode ser escrita de forma compacta como

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

A parte principal da série (2) tem exatamente um termo não nulo, enquanto todos os termos da parte analítica da série (2) são nulos. O próximo exemplo ilustra uma série da forma (1) onde a parte principal da série também consiste em um número finito de termos não nulos, e a parte analítica em um número infinito de termos não nulos.

---

**EXEMPLO 1 Série da Forma Dada em (1)**

A função $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ não é analítica na singularidade isolada $z = 0$ e, portanto, não pode ser expandida em uma série de Maclaurin. No entanto, $\operatorname{sen} z$ é uma função inteira e, de (13) da Seção 6.2, sabemos que sua série de Maclaurin,

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \cdots,$$

converge para $|z| < \infty$. Dividindo esta série de potências por $z^4$, obtemos a série para $f$, com potências negativas e positivas de $z$:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \overbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!\,z}}^{\text{parte principal}} + \overbrace{\frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^5}{9!} - \cdots}^{\text{parte analítica}}. \tag{6}$$

A parte analítica da série em (6) converge para $|z| < \infty$. (Comprove.) A parte principal é válida para $|z| > 0$. Por conseguinte, (6) converge para todo $z$, exceto $z = 0$; ou seja, a representação em série é válida para $0 < |z| < \infty$. ❑

A representação em série de uma função $f$ que tem a forma em (1), da qual (2) e (6) são exemplos, é denominada **série de Laurent** ou **expansão de Laurent** de $f$ em torno de $z_0$ na região anelar $r < |z - z_0| < R$.

**Teorema 6.3.1 Teorema de Laurent**

Seja $f$ uma função analítica no domínio anelar $D$ definido por $r < |z - z_0| < R$. Então, $f$ tem a representação em série

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{7}$$

válida para $r < |z - z_0| < R$. Os coeficientes $a_k$ são dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{8}$$

onde $C$ é uma curva fechada simples totalmente posicionada em $D$ e que tem $z_0$ em seu interior (Figura 6.3.1).

**Prova** Sejam $C_1$ e $C_2$ círculos concêntricos, com centro $z_0$ e raios $r_1$ e $R_2$, respectivamente, onde $r < r_1 < R_2 < R$. Seja $z$ um ponto fixo em $D$ que também satisfaz a desigualdade $r_1 < |z - z_0| < R_2$ (Figura 6.3.2). Introduzindo um corte entre $C_1$ e $C_2$, a fórmula integral de Cauchy fornece

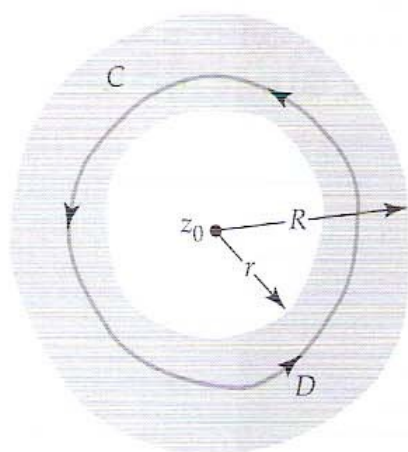



Figura 6.3.1 Contorno para o Teorema 6.3.1

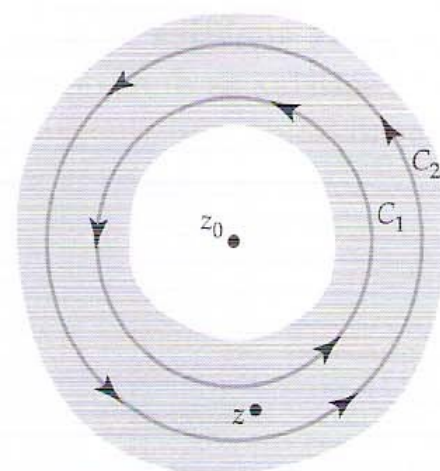



Figura 6.3.2 $C_1$ e $C_2$ são círculos concêntricos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\,ds. \tag{9}$$

Como na prova do Teorema 6.2.4, podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \tag{10}$$

onde
$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Podemos, então, proceder de modo similar a (9) da Seção 6.2:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{(z-z_0)-(s-z_0)}\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{z-z_0}\left\{\frac{1}{1-\dfrac{s-z_0}{z-z_0}}\right\} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{z-z_0}\left\{1 + \frac{s-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^{n-1} + \frac{(s-z_0)^n}{(z-s)(z-z_0)^{n-1}}\right\} ds \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + R_n(z),
\end{aligned} \tag{12}$$

onde
$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-k+1}}\,ds, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ , \tag{13}$$

e
$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i(z-z_0)^n}\oint_{C_1} \frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s}\,ds.$$

Agora, seja $d$ a distância de $z$ a $z_0$, isto é, $|z - z_0| = d$, e seja $M$ o valor máximo de $|f(z)|$ no contorno $C_1$. Usando $|s - z_0| = r_1$ e a desigualdade (10) da Seção 1.2, temos

$$|z-s| = |z - z_0 - (s - z_0)| \geq |z - z_0| - |s - z_0| = d - r_1.$$

A desigualdade $ML$ fornece

$$|R_n(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^n}\oint_{C} \frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s}\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi d^n}\cdot\frac{Mr_1^n}{d-r_1}\cdot 2\pi r_1$$

$$= \frac{Mr_1}{d-r_1}\left(\frac{r_1}{d}\right)^n.$$

Como $r_1 < d$, $(r_1/d)^n \to 0$ quando $n \to \infty$, de modo que $|R_n(z)| \to 0$ quando $n \to \infty$. Com isso, mostramos que

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}, \tag{14}$$

onde os coeficientes $a_{-k}$ são dados em (13). Combinando (14) e (10), vemos que (9) fornece

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{15}$$

Por fim, efetuando a soma nos inteiros negativos e positivos, (15) pode ser reescrita como $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Além disso, (11) e (12) podem ser escritas como uma única integral:

$$a_k = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

onde usamos (5) da Seção 5.3 para substituir os contornos $C_1$ e $C_2$ por um contorno fechado simples qualquer $C$ em $D$ com $z_0$ em seu interior. ❑

No caso em que $a_{-k} = 0$, para $k = 1, 2, 3, \dots$, a parte principal (4) é zero e a série de Laurent (7) se reduz à série de Taylor. Portanto, uma expansão de Laurent pode ser considerada como uma generalização de uma série de Taylor.

O domínio anelar no Teorema 6.3.1, definido por $r < |z - z_0| < R$, não precisa ter a forma de "anel" ilustrada na Figura 6.3.2. Aqui estão outros possíveis domínios anelares:

$$(i)\ r = 0,\ R \text{ finito}, \quad (ii)\ r \neq 0,\ R = \infty, \quad \text{e} \quad (iii)\ r = 0,\ R = \infty.$$

No primeiro caso, a série converge no domínio anelar definido por $0 < |z - z_0| < R$. Este é o interior do círculo $|z - z_0| = R$, exceto o ponto $z_0$; em outras palavras, o domínio é um disco perfurado. No segundo caso, o domínio anelar é definido por $r < |z - z_0|$ e consiste em todos os pontos exteriores ao círculo $|z - z_0| = r$. No terceiro caso, o domínio é definido por $0 < |z - z_0|$. Isso representa todo o plano complexo, exceto o ponto $z_0$. As séries de Laurent em (2) e (6) são válidas neste último tipo de domínio.

[...cientes definidos ... (8) são raramente ... (ii) ... Observações ... desta seção.] ⇒

A fórmula integral em (8) para os coeficientes da série de Laurent é raramente usada na prática. Em consequência, a determinação da série de Laurent de uma função em um domínio anelar especial não é, em geral, uma tarefa simples. Contudo, isso não é tão grave como pode parecer. Em muitas situações, podemos obter uma desejada série de Laurent empregando, primeiro, uma expansão conhecida em série de potências de uma função (como fizemos no Exemplo 1) ou uma manipulação criativa de séries geométricas (como fizemos no Exemplo 2 da Seção 6.2). O próximo exemplo ilustra, mais uma vez, o uso de séries geométricas.

---

**EXEMPLO 2 Quatro Expansões de Laurent**

...ura 6.3.3 Domínios anelares ... o Exemplo 2

Expandamos $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ em uma série de Laurent que seja válida nos seguintes domínios anelares:

**(a)** $0 < |z| < 1$ **(b)** $1 < |z|$ **(c)** $0 < |z - 1| < 1$ **(d)** $1 < |z - 1|$

**Solução** Os quatro domínios anelares especificados são ilustrados na Figura 6.3.3. Os pontos pretos em cada figura representam as duas singularidades isoladas de $f$, $z = 0$ e $z = 1$. Nas partes (a) e (b), desejamos expandir $f$ em uma série que envolva apenas potências inteiras negativas e não negativas de $z$; nas partes (c) e (d), desejamos expandir $f$ em uma série que envolva potências inteiras negativas e não negativas de $z - 1$.

(a) Escrevendo

$$f(z) = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1 - z},$$

podemos usar (6) da Seção 6.1 para escrever $1/(1 - z)$ como uma série:

$$f(z) = -\frac{1}{z}\left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right].$$

A série infinita entre colchetes converge para $|z| < 1$; mas depois que essa expressão é multiplicada por $1/z$, a série resultante

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \cdots$$

converge para $0 < |z| < 1$.

**(b)** Para obter uma série com convirja para $1 < |z|$, primeiro construímos uma série que convirja para $|1/z| < 1$. Para isso, escrevemos a função $f$ dada como

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{z}}$$

e, mais uma vez, usamos (6) da Seção 6.1, com $z$ substituído por $1/z$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right].$$

A série entre colchetes converge para $|1/z| < 1$ ou, o que é equivalente, $1 < |z|$. Por conseguinte, a procurada série de Laurent é

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \dots$$

**(c)** Este é basicamente o mesmo problema da parte (a), exceto que, agora, desejamos usar todas as potências de $z - 1$. Para isso, adicionamos e subtraímos 1 do denominador e usamos (7) da Seção 6.1, com $z$ substituído por $z - 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1 - 1 + z)(z - 1)} \\ &= \frac{1}{z-1} \frac{1}{1 + (z - 1)} \\ &= \frac{1}{z-1}\,[1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots] \\ &= \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

A exigência $z \neq 1$ é equivalente a $0 < |z - 1|$; com isso, a série geométrica entre colchetes converge para $|z - 1| < 1$. Consequentemente, a última série converge para $z$, que satisfaz $0 < |z - 1|$ e $|z - 1| < 1$, ou seja, $0 < |z - 1| < 1$.

**(d)** Procedendo da mesma forma que na parte (b), escrevemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} \frac{1}{1 + (z - 1)} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\left[1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \frac{1}{(z-1)^5} + \cdots . \end{aligned}$$

Como a série entre colchetes converge para $|1/(z - 1)| < 1$, a série final converge para $1 < |z - 1|$.

---

EXEMPLO 3 **Expansões de Laurent**

Expandamos $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ em uma série de Laurent que seja válida para **(a)** $0 < |z - 1| < 2$ **(b)** $0 < |z - 3| < 2$.

**Solução**

**(a)** Como nas partes (c) e (d) do Exemplo 2, desejamos apenas potências de $z - 1$, de modo que precisamos expressar $z - 3$ em termos de $z - 1$. Isso pode ser feito escrevendo

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2}\,\frac{1}{-2+(z-1)} = \frac{-1}{2(z-1)^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}$$

e, a seguir, usando (6) da Seção 6.1, com $z$ substituído por $(z-1)/2$,

$$f(z) = \frac{-1}{2(z-1)^2}\left[1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{2^3} + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \cdots \qquad (16)$$

(**b**) Para obter potências de $z-3$, escrevemos $z-1 = 2+(z-3)$ e

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{z-3}\overbrace{[2+(z-3)]^{-2}}^{\text{Agora, fatoramos 2 desta expressão}}$$

$$= \frac{1}{4(z-3)}\left[1+\frac{z-3}{2}\right]^{-2}.$$

Neste ponto, podemos obter uma série de potências para $\left[1+\dfrac{z-3}{2}\right]^{-2}$ fazendo uso da expansão binomial,*

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)}\left[1 + \frac{(-2)}{1!}\left(\frac{z-3}{2}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^3 + \cdots\right].$$

A série binomial entre colchetes é válida para $|(z-3)/2| < 1$ ou $|z-3| < 2$. A multiplicação dessa série por $\dfrac{1}{4(z-3)}$ fornece uma série de Laurent que é válida para $0 < |z-3| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + \cdots.$$

❑

---

EXEMPLO 4 **Uma Expansão de Laurent**

Expandamos $f(z) = \dfrac{8z+1}{z(1-z)}$ em série de Laurent que seja válida para $0 < |z| < 1$.

**Solução** Usando frações parciais, podemos reescrever $f$ como

$$f(z) = \frac{8z+1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{9}{1-z}.$$

A seguir, usamos (6) da Seção 6.1 e obtemos

$$\frac{9}{1-z} = 9 + 9z + 9z^2 + \cdots.$$

Esta série geométrica converge para $|z| < 1$; mas depois que adicionamos o termos $1/z$ a esta série, a resultante série de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z} + 9 + 9z + 9z^2 + \cdots$$

é válida para $0 < |z| < 1$.

❑

*Para $\alpha$ real, a série binomial $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots$ é válida para $|z| < 1$.

Nos exemplos anteriores, o ponto no centro do domínio anelar de validade de cada série de Laurent era uma singularidade isolada da função $f$. Um reexame do Teorema 6.3.1 mostra que isso não é necessário.

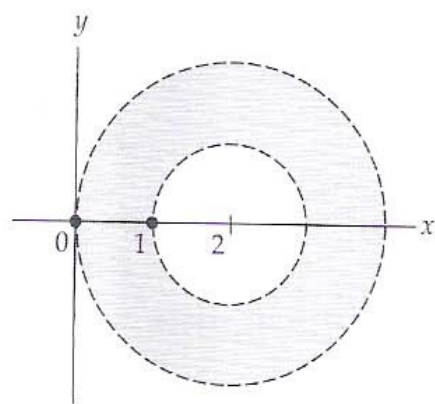



**Figura 6.3.4** Domínio anelar para o Exemplo 5

---

EXEMPLO 5 **Uma Expansão de Laurent**

Expandamos $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ em uma série de Laurent que seja válida para $1 < |z-2| < 2$.

**Solução** O domínio anelar especificado é ilustrado na Figura 6.3.4. O centro desse domínio, $z = 2$, é o ponto de analiticidade da função $f$. Agora, nosso objetivo é determinar duas séries que envolvam potências inteiras de $z - 2$, sendo que uma deve convergir para $1 < |z-2|$ e a outra para $|z-2| < 2$. Para isso, procedamos como no último exemplo e decomponhamos $f$ em frações parciais:

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = f_1(z) + f_2(z). \tag{17}$$

Seja,

$$\begin{aligned} f_1(z) = -\frac{1}{z} &= -\frac{1}{2+z-2} \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{z-2}{2} + \frac{(z-2)^2}{2^2} - \frac{(z-2)^3}{2^3} + \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \frac{(z-2)^3}{2^4} - \cdots \end{aligned}$$

Esta série converge para $|(z-2)/2| < 1$ ou $|z-2| < 2$. Seja, agora,

$$\begin{aligned} f_2(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2} &= \frac{1}{z-2}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}} \\ &= \frac{1}{z-2}\left[1 - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^4} + \cdots \end{aligned}$$

Esta série converge para $|1/(z-2)| < 1$ ou $1 < |z-2|$. Substituindo esses dois resultados em (17), obtemos

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{(z-2)^4} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \frac{(z-2)^3}{2^4} - \cdots$$

Esta representação é válida para $z$ que satisfaça $|z-2| < 2$ e $1 < |z-2|$; em outras palavras, $1 < |z-2| < 2$.

---

EXEMPLO 6 **Uma Expansão de Laurent**

Expandamos $f(z) = e^{3/z}$ em uma série de Laurent que seja válida para $0 < |z| < \infty$.

**Solução** De (12) da Seção 6.2, sabemos que, para todo $z$ finito, ou seja, para $|z| < \infty$,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Para obter a série de Laurent para $f$, basta substituir $z$ em (18) por $3/z$, $z \neq 0$,

$$e^{3/z} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots . \tag{19}$$

A série (19) é válida para $z \neq 0$, ou seja, para $0 < |z| < \infty$. ❑

**Observações**

(*i*) Para concluir, ressaltamos um resultado que será de especial interesse nas Seções 6.5 e 6.6. Na fórmula (8) para os coeficientes da série de Laurent, substituindo a variável complexa $s$ pelo símbolo usual $z$, vemos que, para $k = -1$, $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$, ou, o que é mais importante,

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,a_{-1}. \tag{20}$$

(*ii*) Independentemente de como uma expansão de Laurent para uma função $f$ é obtida em um domínio anelar, esta é *a* série de Laurent; ou seja, a série obtida é única.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.3 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–6, expanda a função dada em uma série de Laurent que seja válida no domínio anelar especificado.

**1.** $f(z) = \frac{\cos z}{z}$, $0 < |z|$

**2.** $f(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^5}$, $0 < |z|$

**3.** $f(z) = e^{-1/z^2}$, $0 < |z|$

**4.** $f(z) = \frac{1 - e^z}{z^2}$, $0 < |z|$

**5.** $f(z) = \frac{e^z}{z - 1}$, $0 < |z - 1|$

**6.** $f(z) = z\cos\frac{1}{z}$, $0 < |z|$

Nos Problemas 7–12, expanda $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ em uma série de Laurent que seja válida no domínio anelar especificado.

**7.** $0 < |z| < 3$

**8.** $|z| > 3$

**9.** $0 < |z - 3| < 3$

**10.** $|z - 3| > 3$

**11.** $1 < |z - 4| < 4$

**12.** $1 < |z + 1| < 4$

Nos Problemas 13–16, expanda $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ em uma série de Laurent que seja válida no domínio anelar especificado.

**13.** $1 < |z| < 2$

**14.** $|z| > 2$

**15.** $0 < |z - 1| < 1$

**16.** $0 < |z - 2| < 1$

Nos Problemas 17–20, expanda $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$ em uma série de Laurent que seja válida no domínio anelar especificado.

**17.** $0 < |z + 1| < 3$

**18.** $|z + 1| > 3$

**19.** $1 < |z| < 2$

**20.** $0 < |z - 2| < 3$

Nos Problemas 21 e 22, expanda $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$ em uma série de Laurent que seja válida no domínio anelar especificado.

**21.** $0 < |z| < 1$

**22.** $|z| > 1$

Nos Problemas 23 e 24, expanda $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3}$ em uma série de Laurent que seja válida no domínio anelar especificado.

**23.** $0 < |z - 2| < 1$

**24.** $0 < |z - 1| < 1$

Nos Problemas 25 e 26, expanda $f(z) = \frac{7z-3}{z(z-1)}$ em uma série de Laurent que seja válida no domínio anelar especificado.

**25.** $0 < |z| < 1$

**26.** $0 < |z - 1| < 1$ [*Sugestão:* $\frac{7z-3}{z} = \frac{7(z-1)+4}{1+(z-1)}$.]

Nos Problemas 27 e 28, expanda $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 2}{z - 2}$ em uma série de Laurent que seja válida no domínio anelar especificado.

**27.** $1 < |z - 1|$

**28.** $0 < |z - 2|$

Nos Problemas 29 e 30, use $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots$, $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots$ e divisão longa para determinar os três primeiros termos não nulos de uma série de Laurent da função dada que seja válida para $0 < |z| < \pi$.

**29.** $f(z) = \csc z$

**30.** $f(z) = \cot z$

## Foco em Conceitos

**31.** A função $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-4i)}$ possui uma série de Laurent $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z+2)^k$, válida no domínio anelar $r < |z + 2| < R$. Determine os valores de $r$ e $R$.

**32.** Considere a função $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{(z+1)^2}$. Use (7) para determinar a parte principal de uma expansão de $f$ em série de Laurent em torno de $z_0 = -1$ que seja válida no domínio anelar $0 < |z + 1| < \infty$.

**33.** Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-5)^3}$. Determine uma expansão de $f$ em série de Laurent em torno de $z_0 = 5$ que seja válida no domínio anelar $0 < |z - 5| < \infty$.

**34.** Considere a função $f(z) = e^{(\alpha/2)(z-1/z)}$, onde $\alpha$ é uma constante real.

(a) Use (8) para mostrar que a expansão de $f$ em série de Laurent em torno de $z_0 = 0$ é

$$e^{(\alpha/2)(z-1/z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\alpha) z^k$$

onde

$$J_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{(\alpha/2)(s-1/s)}}{s^{k+1}}\, ds$$

e $C$ é a circunferência unitária.

(b) Parametrize $C$ por $s(\theta) = e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$, e mostre que

$$J_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha \operatorname{sen}(\theta) - k\theta)\, d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}(\theta) - k\theta)\, d\theta.$$

(c) Usando as propriedades integrais de funções pares e ímpares, simplifique o resultado da parte (b) e obtenha

$$J_k(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\theta - \alpha \operatorname{sen}\theta)\, d\theta.$$

As funções $J_k(\alpha k)$ são denominadas **funções de Bessel** de primeira espécie e ordem $k$, e são soluções de certas equações diferenciais que ocorrem com frequência em matemática aplicada.

## 6.4 Zeros e Polos

Suponhamos que $z = z_0$ seja uma singularidade isolada de uma função complexa $f$ e que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{1}$$

seja a representação de $f$ em série de Laurent, válida para o disco aberto perfurado $0 < |z - z_0| < R$. Vimos, na seção anterior, que uma série de Laurent (1) consiste em duas partes. A parte da série em (1) com potências negativas de $z - z_0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} \tag{2}$$

é a parte principal da série. Na discussão a seguir, adotaremos diferentes nomes para a singularidade isolada $z = z_0$, dependendo do número de termos na parte principal.

**Classificação de Pontos Singulares Isolados** A classificação de ponto singular isolado $z = z_0$ de uma função complexa $f$ depende se o número de termos da parte principal (2) da correspondente expansão de Laurent (1) é zero, finito ou infinito.

(*i*) Se a parte principal for zero, ou seja, se *todos* os coeficientes $a_{-k}$ em (2) forem zero, $z = z_0$ é denominado **singularidade removível**.

(*ii*) Se a parte principal contiver um número finito de termos não nulos, $z = z_0$ é denominado **polo**. Se neste caso o último coeficiente não nulo em (2) for $a_{-n}$, $n \geq 1$, dizemos que $z = z_0$ é um **polo de ordem $n$**. Se $z = z_0$ for um polo de ordem 1, a parte principal (2) contém exatamente um termo não nulo, com coeficiente $a_{-1}$. Um polo de ordem 1 é comumente denominado **polo simples**.

(*iii*) Se a parte principal (2) contiver um número infinito de termos não nulos, $z = z_0$ é denominado **singularidade essencial**.

A Tabela 6.4.1 resume a forma de uma série de Laurent para uma função $f$ quando $z = z_0$ é um dos três tipos anteriores de singularidade isolada. É claro que, nesta tabela, $R$ pode ser $\infty$.

| $z = z_0$ | **Série de Laurent para $0 < \|z - z_0\| < R$** |
|---|---|
| Singularidade removível | $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$ |
| Polo de ordem $n$ | $\dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dfrac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$ |
| Polo simples | $\dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$ |
| Singularidade essencial | $\cdots + \dfrac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$ |

**Tabela 6.4.1** Formas de séries de Laurent

---

EXEMPLO 1 **Singularidade Removível**

Procedendo como no Exemplo 1 da Seção 6.3 e dividindo a série de Maclaurin para sen $z$ por $z$, de

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \tag{3}$$

vemos que todos os coeficientes na parte principal da série de Laurent são nulos. Portanto, $z = 0$ é uma singularidade removível da função $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$. ❑

grafo importante. rimos que seja repetidas vezes. ➡

Se uma função $f$ tiver uma singularidade no ponto $z = z_0$, sempre podemos fornecer uma definição adequada para o valor de $f(z_0)$ de modo que $f$ se torne analítica em $z = z_0$. Por exemplo, como o lado direito de (3) é 1 quando fixamos $z = 0$, faz sentido *definir* $f(0) = 1$. Com isso, a função $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$, dada por (3), passa a ser definida e contínua em todo número complexo $z$. Na verdade, $f$ também é analítica em $z = 0$, pois é representada por uma série de Taylor $1 - z^2/3! + z^4/5! - \ldots$ centrada em 0 (uma série de Maclaurin).

---

EXEMPLO 2 **Polos e Singularidade Essencial**

(**a**) Dividindo os termos de $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots$ por $z^2$, mostremos que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \overbrace{\frac{1}{z}}^{\text{parte principal}} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots$$

para $0 < |z| < \infty$. Desta série, vemos que $a_{-1} \neq 0$, de modo que $z = 0$ é um polo simples da função $f(z) = (\text{sen } z)/z^2$. De modo similar, vemos que $z = 0$ é um polo de ordem 3 da função $f(z) = (\text{sen } z)/z^4$ considerada no Exemplo 1 da Seção 6.3.

**(b)** No Exemplo 3 da Seção 6.3, mostramos que a expansão de Laurent de $f(z) = 1/(z-1)^2(z-3)$, válida para $0 < |z-1| < 2$, era

$$f(z) = \overbrace{-\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}}^{\text{parte principal}} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - \cdots .$$

Como $a_{-2} = -\frac{1}{2} \neq 0$, concluímos que $z = 1$ é um polo de ordem 2.

**(c)** No Exemplo 6 da Seção 6.3, vimos de (19) que a parte principal da expansão de Laurent da função $f(z) = e^{3/z}$, válida para $0 < |z| < \infty$, continha um número infinito de termos não nulos. Isso mostra que $z = 0$ é uma singularidade essencial de $f$. ☐

**Zeros** Recordemos que um número $z_0$ é um **zero** de uma função $f$ se $f(z_0) = 0$. Dizemos que uma função analítica $f$ tem um **zero de ordem $n$** em $z = z_0$ se

$$\overbrace{f(z_0) = 0, \;\; f'(z_0) = 0, \;\; f''(z_0) = 0, \;\; \ldots, \;\; f^{(n-1)}(z_0) = 0}^{z_0 \text{ é um zero de } f \text{ e de suas primeiras } n-1 \text{ derivadas}}, \text{ mas } f^{(n)}(z_0) \neq 0. \tag{4}$$

Um zero de ordem $n$ também é denominado **zero de multiplicidade $n$.** Por exemplo, para $f(z) = (z-5)^3$, vemos que $f(5) = 0$, $f'(5) = 0$, $f''(5) = 0$, mas $f'''(5) = 6 \neq 0$. Portanto, $f$ tem um zero de ordem (ou multiplicidade) 3 em $z_0 = 5$. Um zero de ordem 1 é denominado **zero simples**.

O próximo teorema é uma consequência de (4).

**Teorema 6.4.1 Zero de Ordem $n$**

Uma função $f$ que seja analítica em algum disco $|z - z_0| < R$ tem um zero de ordem $n$ em $z = z_0$ se e somente se $f$ puder ser escrita como

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z), \tag{5}$$

onde $\phi$ é analítica em $z = z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$.

**Prova Parcial** Mostraremos apenas a parte "somente se" do teorema. Dado que $f$ é analítica em $z_0$, é possível expandi-la em uma série de Taylor centrada em $z_0$ e que converge para $|z - z_0| < R$. Como os coeficientes em uma série de Taylor $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ são $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, segue de (4) que os primeiros $n$ termos na série são nulos, de modo que a expansão deve ter a forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z - z_0)^{n+2} + \cdots \\ &= (z - z_0)^n \left[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Identificando a série de potências

$$\phi(z) = a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

concluímos que $\phi$ é uma função analítica e que $\phi(z_0) = a_n \neq 0$, pois, de (4), $a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \neq 0$. ☐

**EXEMPLO 3 Ordem de um Zero**

A função analítica $f(z) = z \text{ sen } z^2$ tem um zero em $z = 0$. Se, em (13) da Seção 6.2, substituirmos $z$ por $z^2$, obtemos a expansão de Maclaurin

$$\text{sen } z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \cdots$$

Agora, fatorando $z^2$ desta série, podemos reescrever $f$ como

$$f(z) = z\,\text{sen}\,z^2 = z^3\phi(z) \qquad \text{onde} \qquad \phi(z) = 1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \cdots \tag{6}$$

e $\phi(0) = 1$. Comparado com (5), o resultado em (6) mostra que $z = 0$ é um zero de ordem 3 de $f$. ❑

**Polos** Podemos caracterizar um polo de ordem $n$ de maneira análoga a (5).

**Teorema 6.4.2 Polo de Ordem $n$**

Uma função $f$ analítica em um disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$ tem um polo de ordem $n$ em $z = z_0$ se e somente se puder ser escrita como

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}, \tag{7}$$

onde $\phi$ é analítica em $z = z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$.

**Prova Parcial** Como na prova de (5), mostraremos apenas a parte "somente se" da asserção anterior. Como é assumido que $f$ tem um polo de ordem $n$ em $z_0$, é possível expandi-la em uma série de Laurent

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots, \tag{8}$$

válida no disco $0 < |z - z_0| < R$. Fatorando $1/(z - z_0)^n$, (8) confirma que $f$ pode ser escrita na forma $\phi(z)/(z - z_0)^n$. Agora, identificamos

$$\phi(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots, \tag{9}$$

como uma série de potências válida para o disco aberto $|z - z_0| < R$. Assumindo que $z = z_0$ é um polo de ordem $n$ de $f$, devemos ter $a_{-n} \neq 0$. Se definirmos $\phi(z_0) = a_{-n}$, de (9), temos que $\phi$ é uma função analítica em todo o disco $|z - z_0| < R$. ❑

**Zeros, de Novo** Um zero $z = z_0$ de uma função analítica $f$ é *isolado* caso exista alguma vizinhança de $z_0$ para a qual $f(z) \neq 0$ em todo ponto $z$ nessa vizinhança, exceto $z = z_0$. Em consequência, se $z_0$ for um zero de uma função analítica não trivial $f$, então a função $1/f(z)$ tem uma singularidade isolada no ponto $z = z_0$.

O próximo resultado nos permite, em certas circunstâncias, determinar os polos de uma função por inspeção.

**Teorema 6.4.3 Polos de Ordem $n$**

Se as funções $g$ e $h$ forem analíticas em $z = z_0$, $h$ tiver um zero de ordem $n$ em $z = z_0$ e $g(z_0) \neq 0$, a função $f(z) = g(z)/h(z)$ tem um polo de ordem $n$ em $z = z_0$.

**Prova** Como a função $h$ tem um zero de ordem $n$, (5) fornece $h(z) = (z - z_0)^n\phi(z)$, onde $\phi$ é analítica em $z = z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$. Portanto, $f$ pode ser escrita como

$$f(z) = \frac{g(z)/\phi(z)}{(z - z_0)^n}. \tag{10}$$

Como $g$ e $\phi$ são analíticas em $z = z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$, a função $g/\phi$ é analítica em $z_0$. Além disso, $g(z_0) \neq 0$ implica $g(z_0)/\phi(z_0) \neq 0$. Concluímos, do Teorema 6.4.2, que a função $f$ tem um polo de ordem $n$ em $z_0$. ❑

Quando $n = 1$ em (10), vemos que um zero de ordem 1, ou um zero simples, no denominador $h$ de $f(z) = g(z)/h(z)$ corresponde a um polo simples de $f$.

EXEMPLO 4 **Ordens de Polos**

(a) Inspeção da função racional

$$f(z) = \frac{2z+5}{(z-1)(z+5)(z-2)^4}$$

mostra que o denominador tem zeros de ordem 1 em $z = 1$ e $z = -5$, e um zero de ordem 4 em $z = 2$. Como o numerador não é zero em qualquer desses pontos, o Teorema 6.4.3 e (10) indicam que $f$ tem polos simples em $z = 1$ e $z = -5$, e um polo de ordem 4 em $z = 2$.

(b) No Exemplo 3, vimos que $z = 0$ é um zero de ordem 3 de $z \operatorname{sen} z^2$. Do Teorema 6.4.3 e de (10), concluímos que a função recíproca $f(z) = 1/(z \operatorname{sen} z^2)$ tem um polo de ordem 3 em $z = 0$. ❑

**Observações**

(*i*) Da discussão anterior deve ter ficado claro que se uma função $f$ tiver um polo em $z = z_0$, então $|f(z)| \to \infty$ quando $z \to z_0$ ao longo de qualquer direção. De (*i*) das Observações ao final da Seção 2.6, podemos escrever $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

(*ii*) Ao consultar outros livros sobre variáveis complexas, e encorajamos que faça isso, o leitor pode se deparar com o termo *meromorfa*. Uma função $f$ é **meromorfa** se for analítica em todo um domínio $D$, exceto possivelmente por polos em $D$. Pode ser provado que uma função meromorfa pode ter no máximo um número finito de polos em $D$. Por exemplo, a função racional $f(z) = 1/(z^2 + 1)$ é meromorfa no plano complexo.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.4 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–4, mostre que $z = 0$ é uma singularidade removível da função dada. Forneça uma definição de $f(0)$, de modo que $f$ seja analítica em $z = 0$.

**1.** $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{z}$

**2.** $f(z) = \dfrac{z^3 - 4z^2}{1 - e^{z^2/2}}$

**3.** $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} 4z - 4z}{z^2}$

**4.** $f(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}z^{10} - \cos z^5}{\operatorname{sen} z^2}$

Nos Problemas 5–10, determine os zeros e suas ordens para a função dada.

**5.** $f(z) = (z + 2 - i)^2$

**6.** $f(z) = z^4 - 16$

**7.** $f(z) = z^4 + z^2$

**8.** $f(z) = \operatorname{sen}^2 z$

**9.** $f(z) = e^{2z} - e^z$

**10.** $f(z) = ze^z - z$

Nos Problemas 11–14, o número indicado é um zero da função dada. Use uma série de Maclaurin ou de Taylor para determinar a ordem do zero.

**11.** $f(z) = z(1 - \cos^2 z)$; $z = 0$

**12.** $f(z) = z - \operatorname{sen} z$; $z = 0$

**13.** $f(z) = 1 - e^{z-1}$; $z = 1$

**14.** $f(z) = 1 - \pi i + z + e^z$; $z = \pi i$

Nos Problemas 15–26, determine a ordem dos polos da função dada.

**15.** $f(z) = \dfrac{3z - 1}{z^2 + 2z + 5}$

**16.** $f(z) = 5 - \dfrac{6}{z^2}$

**17.** $f(z) = \dfrac{1 + 4i}{(z+2)(z+i)^4}$

**18.** $f(z) = \dfrac{z - 1}{(z+1)(z^3+1)}$

**19.** $f(z) = \tan z$

**20.** $f(z) = \dfrac{\cot \pi z}{z^2}$

**21.** $f(z) = \dfrac{1 - \cosh z}{z^4}$

**22.** $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$

**23.** $f(z) = \dfrac{1}{1 + e^z}$

**24.** $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$

**25.** $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2 - z}$

**26.** $f(z) = \dfrac{\cos z - \cos 2z}{z^6}$

Nos Problemas 27 e 28, mostre que o número indicado é uma singularidade essencial da função dada.

**27.** $f(z) = z^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right);\ z = 0$

**28.** $f(z) = (z-1)\cos\left(\dfrac{1}{z+2}\right);\ z = -2$

**29.** Determine se $z = 0$ é uma singularidade essencial de $f(z) = e^{z+1/z}$.

**30.** Determine se $z = 0$ é uma singularidade isolada ou não isolada de $f(z) = \tan(1/z)$.

### Foco em Conceitos

**31.** Na parte (a) do Exemplo 2 da Seção 6.3, mostramos que a série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$, válida para $|z| > 1$, é

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots .$$

O ponto $z = 0$ é uma singularidade infinita de $f$ e a série de Laurent contém um número infinito de termos que envolvem potências inteiras negativas de $z$. Isso significa que $z = 0$ é uma singularidade essencial de $f$? Justifique sua resposta matematicamente.

**32.** Suponha que $f$ e $g$ sejam funções analíticas, que $f$ tenha um zero de ordem $m$ e que $g$ tenha um zero de ordem $n$ em $z = z_0$. Qual é a ordem do zero de $fg$ em $z_0$? E de $f + g$ em $z_0$?

**33.** Um teorema interessante, conhecido como **teorema de Picard**, afirma que em qualquer pequena vizinhança arbitrária de uma singularidade essencial $z_0$ uma função analítica $f$ assume, com *uma* exceção, *todos* os valores complexos finitos infinitas vezes. Como $z = 0$ é uma singularidade isolada de $f(z) = e^{1/z}$, determine infinitos valores de $z$ em qualquer vizinhança de $z = 0$ para a qual $f(z) = i$. Qual é a exceção? Ou seja, qual é o único valor que $f(z) = e^{1/z}$ não assume?

**34.** Suponha que $|f(z)|$ seja limitada em uma vizinhança deletada de uma singularidade isolada $z_0$. Classifique $z_0$ como um dos três tipos de singularidades isoladas listadas na Tabela 6.4.1. Justifique sua resposta matematicamente.

**35.** Suponha que a função analítica $f(z)$ tenha um zero de ordem $n$ em $z = z_0$. Prove que a função $|f(z)|^m$, sendo $m$ um inteiro positivo, tem um zero de ordem $mn$ em $z = z_0$.

**36.** Este problema o guia nos passos iniciais da prova da asserção:

*As únicas singularidades isoladas de uma função racional f são polos ou singularidades removíveis.*

**Prova** Iniciamos com a hipótese de $f$ ser uma função racional, isto é, $f(z) = p(z)/q(z)$, onde $p$ e $q$ são polinômios. Sabemos que $f$ é analítica para todo $z$, exceto nos zeros de $q$. Suponhamos que $z_0$ seja um zero de $q$, mas não de $p$. Então, o Teorema 6.4.1 afirma que existe um inteiro positivo $n$ tal que $q(z) = (z - z_0)^n Q(z)$, onde $Q$ é um polinômio e $Q(z_0) \neq 0$. Agora, invoque o Teorema 6.4.2. Considere mais um caso e complete a prova.

## 6.5 Resíduos e Teorema de Resíduos

Na seção anterior vimos que se a função complexa $f$ tiver uma *singularidade isolada* em um ponto $z_0$, então $f$ tem uma representação em série de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots ,$$

que converge para todo $z$ *próximo* de $z_0$. Mais precisamente, a representação é válida em alguma vizinhança deletada de $z_0$ ou disco aberto perfurado $0 < |z - z_0| < R$. Nesta seção, focaremos a atenção no coeficiente $a_{-1}$ e sua importância no cálculo de integrais de contorno.

**Resíduo** O coeficiente $a_{-1}$ de $1/(z - z_0)$ na série de Laurent anterior é denominado **resíduo** da função $f$ na singularidade isolada $z_0$. Usaremos a notação

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z),\ z_0)$$

para representar o resíduo de $f$ em $z_0$. Recordemos que se a parte principal da série de Laurent válida para $0 < |z - z_0| < R$ contiver um número finito de termos, sendo $a_{-n}$ o último coeficiente não nulo, então $z_0$ é um polo de ordem $n$; se a parte principal da série contiver um número infinito de termos com coeficientes não nulos, $z_0$ é uma singularidade isolada.

---

EXEMPLO 1 **Resíduos**

(a) Na parte (b) do Exemplo 2 da Seção 6.4 vimos que $z = 1$ é um polo de ordem dois da função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$. Da série de Laurent obtida naquele exemplo e válida para a vizinhança deletada de $z = 1$ definida por $0 < |z - 1| < 2$,

$$f(z) = \frac{-1/2}{(z-1)^2} + \overbrace{\frac{-1/4}{z-1}}^{a_{-1}} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - \cdots$$

vemos que o coeficiente de $1/(z - 1)$ é $a_{-1} = \text{Res}(f(z), 1) = -\frac{1}{4}$.

(b) No Exemplo 6 da Seção 6.3 vimos que $z = 0$ é uma singularidade isolada de $f(z) = e^{3/z}$. Inspeção da série de Laurent obtida naquele exemplo,

$$e^{3/z} = 1 + \overbrace{\frac{3}{z}}^{a_{-1}} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots,$$

$0 < |z| < \infty$, mostra que o coeficiente de $1/z$ é $a_{-1} = \text{Res}(f(z), 0) = 3$. ❑

Veremos posteriormente, ainda nesta seção, por que o coeficiente $a_{-1}$ é tão importante. Por ora, examinaremos formas de obter esse número complexo quando $z_0$ é um *polo* de uma função $f$ sem necessidade de expandi-la em uma série de Laurent em $z_0$. Iniciamos com o resíduo em um polo simples.

**Teorema 6.5.1 Resíduo em um Polo Simples**

Se $f$ tiver um polo simples em $z = z_0$,

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{1}$$

**Prova** Como $f$ tem um polo simples em $z = z_0$, sua expansão de Laurent convergente no disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$ tem a forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0) + \cdots,$$

onde $a_{-1} \neq 0$. Multiplicando os dois lados desta série por $z - z_0$ e tomando o limite quando $z \to z_0$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \to z_0} [a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots] \\ &= a_{-1} = \text{Res}(f(z), z_0).\end{aligned}$$ ❑

**Teorema 6.5.2 Resíduo em um Polo de Ordem $n$**

Se $f$ tiver um polo de ordem $n$ em $z = z_0$,

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big[(z - z_0)^n f(z)\Big]. \tag{2}$$

**Prova** Como $f$ tem um polo de ordem $n$ em $z = z_0$, sua expansão de Laurent convergente em um disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$ deve ter a forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

onde $a_{-n} \neq 0$. Multiplicamos a última expressão por $(z - z_0)^n$,

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{n-2} + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \cdots$$

e diferenciamos os dois lados da igualdade $n - 1$ vezes:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big[(z-z_0)^n f(z)\Big] = (n-1)!a_{-1} + n!a_0(z-z_0) + \cdots. \tag{3}$$

Como todos os termos no lado direito, após o primeiro, envolvem potências inteiras positivas de $z - z_0$, o limite de (3) quando $z \to z_0$ é

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big[(z-z_0)^n f(z)\Big] = (n-1)!a_{-1}.$$

Resolvendo esta última equação para $a_{-1}$, obtemos (2). ❑

Notemos que (2) se reduz a (1) quando $n = 1$.

---

EXEMPLO 2 **Resíduo em um Polo**

A função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ tem um polo simples em $z = 3$ e um polo de ordem 2 em $z = 1$. Usemos os Teoremas 6.5.1 e 6.5.2 para determinar os resíduos.

**Solução** Como $z = 3$ é um polo simples, usamos (1)

$$\operatorname{Res}(f(z), 3) = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Para o polo de ordem 2, o resultado em (2) fornece:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), 1) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\Big[(z-1)^2 f(z)\Big]\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{1}{z-3}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

❑

Quando $f$ não é uma função racional, o cálculo de resíduos por (1) ou (2) pode ser trabalhoso. Existem fórmulas alternativas. Em particular, suponhamos que $f$ possa ser escrita como um quociente $f(z) = g(z)/h(z)$, sendo $g$ e $h$ funções analíticas em $z = z_0$. Se $g(z_0) \neq 0$ e se a função $h$ tiver um zero de ordem 1 em $z_0$, $f$ terá um polo simples em $z = z_0$ e

Método alternativo para o cálculo do resíduo em um polo simples. ➡

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{4}$$

Para deduzir esta fórmula usaremos a definição de um zero de ordem 1, a definição de uma derivada e (1). Primeiro, como a função $h$ tem um zero de ordem 1 em $z_0$, devemos ter $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$. Segundo, usando a definição de derivada dada em (12) da Seção 3.1,

$$h'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{h(z) - \overbrace{h(z_0)}^{0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{h(z)}{z-z_0}.$$

A seguir, substituímos os dois últimos resultados em (1) da seguinte forma:

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\dfrac{h(z)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Há diferentes maneiras de chegar à fórmula (4). Por exemplo, a fórmula pode ser obtida com uma aplicação da regra de L'Hôpital; o Problema 40 do Conjunto de Exercícios 6.5 pede a dedução de (4) com o uso de (5) da Seção 6.4. Fórmulas para resíduos de polos de ordens maiores que 1 são mais elaboradas do que (4) e não serão apresentadas aqui. Por outro lado, a dedução de uma dessas fórmulas de ordens superiores oferece uma oportunidade de rever conceitos importantes (Problema 41 do Conjunto de Exercícios 6.5).

---

EXEMPLO 3 **Uso de (4) para Calcular Resíduos**

O polinômio $z^4 + 1$ pode ser fatorado como $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, onde $z_1$, $z_2$, $z_3$ e $z_4$ são as quatro raízes distintas da equação $z^4 + 1 = 0$ (ou, o que é equivalente, as quatro raízes quartas de $-1$). O Teorema 6.4.3 indica que a função

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

tem quatro polos simples. Agora, de (4) da Seção 1.4, temos $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{5\pi i/4}$ e $z_4 = e^{7\pi i/4}$. Para calcular os resíduos, usamos (4) desta seção e a fórmula de Euler (6) da Seção 1.6:

$$\text{Res}(f(z), z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i$$

$$\text{Res}(f(z), z_2) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i$$

$$\text{Res}(f(z), z_3) = \frac{1}{4z_3^3} = \frac{1}{4}e^{-15\pi i/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i$$

$$\text{Res}(f(z), z_4) = \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4}e^{-21\pi i/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i.$$

É claro que poderíamos ter calculado cada resíduo no Exemplo 3 usando a fórmula (1). No entanto, nesse caso o procedimento exigiria mais contas. Por exemplo, primeiro usaríamos a fatoração de $z^4 + 1$ para escrever $f$ como:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}.$$

Usando (1), o resíduo no polo $z_1$ seria dado por

$$\text{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1)\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}$$

$$= \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

$$= \frac{1}{(e^{\pi i/4} - e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4} - e^{5\pi i/4})(e^{\pi i/4} - e^{7\pi i/4})}.$$

A seguir, teríamos a assustadora tarefa de simplificar o denominador da última expressão. Por fim, o processo seria repetido outras três vezes.

**Teorema de Resíduos** Agora, discutiremos por que o conceito de resíduo é tão importante. O próximo teorema afirma que, em dadas circunstâncias, podemos calcular integrais complexas $\oint_C f(z)\, dz$ somando os resíduos em singularidades isoladas de $f$ no interior do contorno fechado $C$.

**Teorema 6.5.3 Teorema de Resíduos de Cauchy**

Seja $D$ um domínio simplesmente conexo e seja $C$ um contorno fechado simples totalmente posicionado em $D$. Se uma função $f$ for analítica em $C$ e no interior de $C$, exceto em um número finito de singularidades isoladas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ no interior de $C$,

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k). \tag{5}$$

**Figura 6.5.1** $n$ pontos singulares no interior do contorno $C$

**Prova** Suponhamos que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sejam circunferências centradas em $z_1, z_2, \ldots, z_n$, respectivamente. Suponhamos, ainda, que cada circunferência $C_k$ tenha um raio $r_k$ suficientemente pequeno, de modo que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sejam mutuamente desconexas e interiores à curva fechada simples $C$ (Figura 6.5.1). De (20) da Seção 6.3, vemos que $\oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z_k), z_k)$; segundo o Teorema 5.3.2, devemos ter

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k).$$

❑

---

EXEMPLO 4 **Cálculo com o Teorema de Resíduos**

Calculemos $\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$, onde o contorno $C$ é

(**a**) o retângulo definido por $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$ e $y = 1$,
(**b**) a circunferência $|z| = 2$.

**Solução**

(**a**) Como $z = 1$ e $z = 3$ são polos no interior do retângulo, de (5), temos

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i\,[\operatorname{Res}(f(z), 1) + \operatorname{Res}(f(z), 3)]$$

Calculamos estes resíduos no Exemplo 2. Logo,

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i\left[\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\right] = 0.$$

(**b**) Como o polo $z = 1$ está no interior da circunferência $|z| = 2$, de (5), temos

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 1) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i.$$

❑

---

EXEMPLO 5 **Cálculo com o Teorema de Resíduos**

Calculemos $\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz$, onde o contorno $C$ é a circunferência $|z - i| = 2$.

**Solução** Fatorando o denominador como $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$, vemos que o integrando tem polos simples em $-2i$ e em $2i$. Como $2i$ está no interior do contorno $C$, de (5), temos

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 2i).$$

Mas,

$$\operatorname{Res}(f(z), 2i) = \lim_{z \to 2i} (z - 2i)\frac{2z+6}{(z-2i)(z+2i)}$$

$$= \frac{6+4i}{4i} = \frac{3+2i}{2i}.$$

Logo, $$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left(\frac{3+2i}{2i}\right) = \pi(3+2i).$$ □

**EXEMPLO 6 Cálculo com o Teorema de Resíduos**

Calculemos $\oint_C \frac{e^z}{z^4+5z^3}\,dz$, onde o contorno $C$ é a circunferência $|z| = 2$.

**Solução** Escrevendo o denominador como $z^4 + 5z^3 = z^3(z+5)$, vemos que o integrando tem um polo de ordem 3 em $z = 0$ e um polo simples em $z = -5$. Como apenas o polo $z = 0$ está no interior do contorno especificado, de (5) e de (2), temos

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4+5z^3}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),0) = 2\pi i\,\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\cdot\frac{e^z}{z^3(z+5)}\right]$$
$$= \pi i \lim_{z\to 0}\frac{(z^2+8z+17)e^z}{(z+5)^3} = \frac{17\pi}{125}i.$$ □

**EXEMPLO 7 Cálculo com o Teorema de Resíduos**

Calculemos $\oint_C \tan z\,dz$, onde o contorno $C$ é a circunferência $|z| = 2$.

**Solução** O integrando $f(z) = \tan z = (\operatorname{sen} z)/(\cos z)$ tem polos simples em pontos onde $\cos z = 0$. Vimos, em (21) da Seção 4.3, que os zeros de $\cos z$ são os números reais $z = (2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Como apenas $-\pi/2$ e $\pi/2$ estão no interior da circunferência $|z| = 2$, temos

$$\oint_C \tan z\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Identificando $g(z) = \operatorname{sen} z$, $h(z) = \cos z$ e $h'(z) = -\operatorname{sen} z$, de (4), temos

$$\mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(-\pi/2)}{-\operatorname{sen}(-\pi/2)} = -1$$

e $$\mathrm{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{-\operatorname{sen}(\pi/2)} = -1.$$

Logo, $$\oint_C \tan z\,dz = 2\pi i[-1-1] = -4\pi i.$$ □

O Teorema 6.5.3 é aplicável em uma singularidade essencial. ➡

Embora não exista uma fórmula simpática como (1), (2) ou (4) para o cálculo do resíduo em uma singularidade essencial $z_0$, o próximo exemplo mostra que o Teorema 6.5.3 é aplicável em $z_0$.

**EXEMPLO 8 Cálculo com o Teorema de Resíduos**

Calculemos $\oint_C e^{3/z}dz$, onde o contorno $C$ é a circunferência $|z| = 1$.

**Solução** Como vimos, $z = 0$ é uma singularidade essencial do integrando $f(z) = e^{3/z}$, de modo que nenhuma das fórmulas (1) e (2) pode ser aplicada para calcular o resíduo de $f$ nesse ponto. No entanto, vimos no Exemplo 1 que a série de Laurent de $f$ em $z = 0$ fornece $\mathrm{Res}(f(z), 0) = 3$. Portanto, de (5), temos,

$$\oint_C e^{3/z}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),0) = 2\pi i\,(3) = 6\pi i.$$ □

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.5 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–6, use uma série de Laurent adequada e calcule o resíduo indicado.

**1.** $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z+4)}$; $\text{Res}(f(z), 1)$

**2.** $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)^3}$; $\text{Res}(f(z), 0)$

**3.** $f(z) = \dfrac{4z-6}{z(2-z)}$; $\text{Res}(f(z), 0)$

**4.** $f(z) = (z+3)^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{z+3}\right)$; $\text{Res}(f(z), -3)$

**5.** $f(z) = e^{-2/z^2}$; $\text{Res}(f(z), 0)$

**6.** $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-2)^2}$; $\text{Res}(f(z), 2)$

Nos Problemas 7–16, use (1), (2) ou (4) para calcular o resíduo em cada polo da função dada.

**7.** $f(z) = \dfrac{z}{z^2+16}$

**8.** $f(z) = \dfrac{4z+8}{2z-1}$

**9.** $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^3-2z^2}$

**10.** $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z+2)^2}$

**11.** $f(z) = \dfrac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$

**12.** $f(z) = \dfrac{2z-1}{(z-1)^4(z+3)}$

**13.** $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$

**14.** $f(z) = \dfrac{e^z}{e^z-1}$

**15.** $f(z) = \sec z$

**16.** $f(z) = \dfrac{1}{z \operatorname{sen} z}$

Nos Problemas 17–20, use o teorema de resíduos de Cauchy, onde for apropriado, para calcular a integral indicada ao longo do contorno especificado.

**17.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}\,dz$ **(a)** $|z| = \frac{1}{2}$ **(b)** $|z| = \frac{3}{2}$ **(c)** $|z| = 3$

**18.** $\displaystyle\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2i)}\,dz$ **(a)** $|z| = 1$ **(b)** $|z-2i| = 1$ **(c)** $|z-2i| = 4$

**19.** $\displaystyle\oint_C z^3 e^{-1/z^2}\,dz$ **(a)** $|z| = 5$ **(b)** $|z+i| = 2$ **(c)** $|z-3| = 1$

**20.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z \operatorname{sen} z}\,dz$ **(a)** $|z-2i| = 1$ **(b)** $|z-2i| = 3$ **(c)** $|z| = 5$

Nos Problemas 21–34, use o teorema de resíduos de Cauchy para calcular a integral indicada ao longo do contorno especificado.

**21.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}\,dz$, $C$: $|z-3i| = 3$

**22.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^4}\,dz$, $C$: $|z-2| = \frac{3}{2}$

**23.** $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^4-1}\,dz$, $C$: $|z| = 2$

**24.** $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)}\,dz$, $C$: $16x^2+y^2 = 4$

**25.** $\displaystyle\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}\,dz$, $C$: $|z| = 2$

**26.** $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^3+2z^2}\,dz$, $C$: $|z| = 3$

**27.** $\oint_C \frac{\tan z}{z}\, dz$, $C$: $|z-1| = 2$

**28.** $\oint_C \frac{\cot \pi z}{z^2}\, dz$, $C$: $|z| = \frac{1}{2}$

**29.** $\oint_C \cot \pi z\, dz$, $C$ é o retângulo definido por $x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$, $y = -1$, $y = 1$

**30.** $\oint_C \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)}\, dz$, $C$ é o retângulo definido por $x = -2$, $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $y = 1$

**31.** $\oint_C \left(z^2 e^{1/\pi z} + \frac{ze^z}{z^4 - \pi^4}\right) dz$, $C$: $4x^2 + y^2 = 16$

**32.** $\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^2(z^2+9)}\, dz$, $C$: $|z-1| = 1$

**33.** $\oint_C \frac{1}{z^6+1}\, dz$, $C$ é a semicircunferência definida por $y = 0$, $y = \sqrt{4 - x^2}$

**34.** $\oint_C e^{4/(z-2)}\, dz$, $C$: $|z-1| = 3$

## Foco em Conceitos

**35.** (a) Use séries para mostrar que $z = 0$ é um zero de ordem 2 de $1 - \cos z$.

(b) Pelo resultado na parte (a), $z = 0$ é um polo de ordem dois da função $f(z) = e^z/(1 - \cos z)$; portanto, $f$ tem uma série de Laurent

$$f(z) = \frac{e^z}{1 - \cos z} = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

válida para $0 < |z| < 2\pi$. Use séries para $e^z$ e para $1 - \cos z$ e iguale os coeficientes no produto

$$e^z = (1 - \cos z)\left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \cdots\right)$$

para determinar $a_{-2}$, $a_{-1}$ e $a_0$.

(c) Calcule $\oint_C e^{1/z} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz$, onde $C$ é $|z| = 1$.

**36.** Discuta o cálculo de $\oint_C e^{1/z} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz$, onde $C$ é $|z| = 1$. Implemente suas ideias.

**37.** Considere a função $f(z) = z^4/(1 - z^{1/2})$, onde $z^{1/2}$ denota o ramo principal da função raiz quadrada. A função $f$ tem um polo em $z = 1$? Em caso afirmativo, determine $\operatorname{Res}(f(z), 1)$.

**38.** Resíduos podem ser usados no cálculo de coeficientes em decomposições em frações parciais de funções racionais. Suponha que $p(z)$ seja um polinômio de grau $\leq 2$ e que $z_1$, $z_2$ e $z_3$ sejam números complexos distintos e não sejam zeros de $p(z)$. Então,

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2} + \frac{C}{z-z_3}.$$

(a) Use (1) para mostrar

$$A = \operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{p(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$$

$$B = \operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{p(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}$$

$$C = \operatorname{Res}(f(z), z_3) = \frac{p(z_3)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}.$$

(b) Use uma série de Laurent para provar que $A = \operatorname{Res}(f(z), z_1)$. [*Sugestão*: os segundo e terceiro termos $B/(z - z_2)$ e $C/(z - z_3)$, respectivamente, são analíticos em $z_1$. Veja, ainda, (3) e (4) da Seção 6.4.]

**39.** Use o Problema 38 para determinar a decomposição em frações parciais de $f(z) = \frac{5z^2 - z + 2}{z(z+1)(z-i)}$.

**40.** Se $h(z)$ tiver um zero de ordem 1, (5) da Seção 6.4 indica que $h(z) = (z - z_0)\phi(z)$, onde $\phi$ é analítica em $z = z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$. Com $f(z) = g(z)/h(z)$, use (1) para obter:

$$\text{Res}\Big(f(z), z_0\Big) = \frac{g(z_0)}{\phi(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

**41.** Se $h(z)$ tiver um zero de ordem 2, (5) da Seção 6.4 indica que $h(z) = (z - z_0)^2\phi(z)$, onde $\phi$ é analítica em $z = z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$. Com $f(z) = g(z)/h(z)$, use (2) com $n = 2$ para obter uma fórmula, análoga a (4), para o cálculo de $\text{Res}(f(z), z_0)$ em um polo de ordem 2 em $z = z_0$.

**42.** Seja $f(z) = 1/[p(z)]^2$, onde $p(z)$ tem um zero de ordem 1 em $z = z_0$.

(a) Use o Problema 41 para obter a fórmula $\text{Res}(f(z), z_0) = -\dfrac{p''(z_0)}{[p'(z_0)]^3}$.

(b) Use a parte (a) para determinar o resíduo de $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 - z)^2}$ em $z = 0$.

## 6.6 Algumas Consequências do Teorema de Resíduos

Nesta seção veremos como a teoria de resíduos pode ser usada para calcular integrais *reais* da forma

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)\, d\theta, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}\,\alpha x\, dx, \tag{3}$$

onde $F$, em (1), e $f$, em (2) e (3), são funções racionais. Para funções racionais $f(x)= p(x)/q(x)$ em (2) e (3), assumiremos que os polinômios $p$ e $q$ não têm fatores comuns.

Além de calcular estas três integrais reais, demonstraremos como usar resíduos para calcular integrais reais impróprias que exigem integração ao longo de um corte de ramo.

A discussão se encerra com a relação entre a teoria de resíduos e os zeros de uma função analítica, e com uma discussão de como resíduos podem, em alguns casos, ser usados para calcular a soma de séries infinitas.

### 6.6.1 Cálculo de Integrais Trigonométricas Reais

**Integrais da Forma $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)d\theta$** A ideia básica consiste em converter uma integral trigonométrica real da forma (1) em uma integral complexa, onde o contorno $C$ é a circunferência unitária $|z| = 1$, centrada na origem. Para isso, iniciamos com (10) da Seção 2.2 e parametrizamos este contorno por $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Podemos, então, escrever

$$dz = ie^{i\theta}d\theta, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

As duas últimas expressões resultam de (2) e (3) da Seção 4.3. Como $dz = ie^{i\theta}d\theta$ e $z^{-1} = 1/z = e^{-i\theta}$, estas três grandezas são equivalentes a

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \text{sen}\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}). \tag{4}$$

A conversão da integral (1) em uma integral de contorno é completada com a substituição de $d\theta$, $\cos\theta$ e $\text{sen}\,\theta$ pelas respectivas expressões em (4):

$$\oint_C F\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right)\frac{dz}{iz},$$

onde $C$ é a circunferência unitária $|z| = 1$.

EXEMPLO 1 **Integral Trigonométrica Real**

Calculemos $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,d\theta$.

**Solução** Quando usamos as substituições em (4), a dada integral trigonométrica se torna a integral de contorno

$$\oint_C \frac{1}{\left(2+\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{1}{\left(2+\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz}.$$

Efetuando simplificações algébricas no integrando, obtemos

$$\frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz.$$

Usando a fórmula quadrática, podemos fatorar o polinômio $z^2+4z+1$ como $z^2+4z+1=(z-z_1)(z-z_2)$, onde $z_1=-2-\sqrt{3}$ e $z_2=-2+\sqrt{3}$. Com isso, o integrando pode ser escrito como

$$\frac{z}{(z^2+4z+1)^2} = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}.$$

Como apenas $z_2$ está no interior da circunferência unitária $C$, temos

$$\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), z_2).$$

Para calcular o resíduo, primeiro notamos que $z_2$ é um polo de ordem 2, de modo que podemos usar (2) da Seção 6.5:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f(z), z_2) &= \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left[(z-z_2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_1)^2} \\ &= \lim_{z\to z_2}\frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)}\,dz = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i\mathrm{Res}(f(z), z_1) = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}}$$

e, por fim,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

## 6.6.2 Cálculo de Integrais Impróprias Reais

**Integrais da Forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$** Suponhamos que $y=f(x)$ seja uma função real definida e contínua no intervalo $[0, \infty)$. No cálculo elementar, a integral imprópria $I_1=\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ é definida como o limite

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Se o limite existir, dizemos que a integral $I_1$ **converge**; caso contrário, que **diverge**. A integral imprópria $I_2=\int_{-\infty}^{0} f(x)$ é definida de modo similar:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Por fim, se $f$ for contínua em $(-\infty, \infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ é definida como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2, \qquad (7)$$

desde que *as duas* integrais $I_1$ e $I_2$ convirjam. Caso uma das integrais, $I_1$ ou $I_2$, divirja, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge. É importante ressaltar que o lado direito de (7) *não* é o mesmo que

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{R} f(x)\,dx\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{8}$$

Para que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ convirja, os limites (5) e (6) devem existir independentemente um do outro. *Contudo*, caso saibamos (*a priori*) que uma integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge, podemos calculá-la empregando o processo de limite dado em (8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{9}$$

No entanto, o limite simétrico em (9) pode existir mesmo que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ divirja. Por exemplo, a integral $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ diverge, pois $\lim_{R\to\infty}\int_0^R x\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}R^2 = \infty$. Mas, (9) resulta em

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}[R^2-(-R)^2] = 0. \tag{10}$$

O limite em (9), caso exista, é denominado **valor principal** (V.P.) **de Cauchy** da integral, e é escrito como

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{11}$$

Em (10) mostramos que V.P.$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = 0$. Resumindo,

## *Valor Principal de Cauchy*

*Quando uma integral da forma (2) converge, seu valor principal de Cauchy é igual ao valor da integral. Se a integral divergir, ainda é possível que tenha um valor principal de Cauchy (11).*

Observação importante a respeito de funções pares. ➡

Uma última observação sobre o valor principal de Cauchy: suponhamos que $f(x)$ seja contínua em $(-\infty, \infty)$ e seja uma função *par*, isto é, $f(-x) = f(x)$. Neste caso, o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo $y$ e, em consequência,

$$\int_{-R}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{R} f(x)\,dx \tag{12}$$

e

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{R} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{R} f(x)\,dx. \tag{13}$$

De (12) e (13) concluímos que *se* o valor principal de Cauchy (11) existir, $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ convergem. Os valores dessas integrais são

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Figura 6.6.1 Contorno semicircular

Para calcular uma integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ usando a teoria de resíduos, sendo $f$ uma função racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contínua em $(-\infty, \infty)$, substituímos $x$ pela variável complexa $z$ e integramos a função complexa $f$ em um contorno fechado $C$ que consiste no intervalo $[-R, R]$ no eixo real e uma semicircunferência $C_R$ de raio suficientemente grande para envolver todos os polos de $f(z) = p(z)/q(z)$ que ocorrerem no semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$ (Figura 6.6.1). Segundo o Teorema 6.5.3 da Seção 6.5, temos

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f(z), z_k),$$

onde $z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, denota os polos no semiplano superior. Se pudermos mostrar que a integral $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ quando $R \to \infty$, teremos

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f(z), z_k). \tag{14}$$

**EXEMPLO 2 V.P. de Cauchy de uma Integral Imprópria**

Calculemos o valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$.

**Solução** Seja $f(z) = 1/(z^2+1)(z^2+9)$. Como

$$(z^2+1)(z^2+9) = (z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i),$$

**Figura 6.6.2** Contorno para o Exemplo 2

tomamos $C$ como o contorno fechado que consiste no intervalo $[-R, R]$ no eixo $x$ e a semicircunferência $C_R$ de raio $R > 3$, como ilustrado na Figura 6.6.2.

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx + \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = I_1 + I_2.$$

Contudo, segundo o Teorema de Resíduos, temos:

$$I_1 + I_2 = 2\pi i\,[\text{Res}(f(z), i) + \text{Res}(f(z), 3i)].$$

Nos polos simples $z = i$ e $z = 3i$, calculamos, respectivamente,

$$\text{Res}(f(z),\ i) = \frac{1}{16i} \quad \text{e} \quad \text{Res}(f(z),\ 3i) = -\frac{1}{48i},$$

de modo que,

$$I_1 + I_2 = 2\pi i\left[\frac{1}{16i} + \left(-\frac{1}{48i}\right)\right] = \frac{\pi}{12}. \tag{15}$$

Agora, desejamos fazer $R \to \infty$ em (15). Antes disso, usemos a desigualdade (8) da Seção 1.2 e notemos que, no contorno $C_R$,

$$|(z^2+1)(z^2+9)| = |z^2+1|\cdot|z^2+9| \geq \big||z^2|-1\big|\cdot\big||z^2|-9\big| = (R^2-1)(R^2-9).$$

Como o comprimento $L$ da semicircunferência é $\pi R$, a desigualdade $ML$, Teorema 5.2.3 da Seção 5.2, implica

$$|I_2| = \left|\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-9)}.$$

Este último resultado mostra que $|I_2| \to 0$ quando $R \to \infty$, e concluímos que $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$. (12) mostra que $\lim_{R\to\infty} I_1 = \pi/12$; em outras palavras,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{12} \quad \text{ou V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{12}.$$

□

Como o integrando no Exemplo 2 é uma função par, a existência do valor principal de Cauchy significa que a integral original converge a $\pi/12$.

Muitas vezes é trabalhoso mostrar que a integral de contorno ao longo de $C_R$ tende a zero quando $R \to \infty$. O próximo teorema fornece condições suficientes para que este comportamento seja sempre verdadeiro.

**Teorema 6.6.1 Comportamento de Integrais Quando $R \to \infty$**

Seja $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ uma função racional, onde o grau de $p(z)$ é $n$ e o de $q(z)$, $m \geq n + 2$. Se $C_R$ for um contorno semicircular parametrizado por $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, então $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ quando $R \to \infty$.

Em outras palavras, a integral ao longo de $C_R$ tende a zero quando $R \to \infty$ quando a potência do denominador de $f$ for pelo menos 2 graus maior que a do numerador. A prova desse fato segue o procedimento do Exemplo 2. Naquele exemplo as condições estipuladas no Teorema 6.6.1 são satisfeitas, pois o grau de $p(z) = 1$ é 0 e o grau de $q(z) = (z^2 + 1)(z^2 + 9)$ é 4.

---

**EXEMPLO 3 V.P. de Cauchy de uma Integral Imprópria**

Calculemos o valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$.

**Solução** Inspecionando o integrando, vemos que as condições estipuladas no Teorema 6.6.1 são satisfeitas. Além disso, sabemos do Exemplo 3 da Seção 6.5 que $f(z) = 1/(z^4 + 1)$ tem polos simples no semiplano superior, em $z_1 = e^{\pi i/4}$ e em $z_2 = e^{3\pi i/4}$. Também vimos no exemplo que os resíduos nesses polos são

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i \quad \text{e} \quad \operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i.$$

Portanto, de (14),

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = 2\pi i\,[\operatorname{Res}(f(z), z_1) + \operatorname{Res}(f(z), z_2)] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Como o integrando é uma função par, a integral original converge para $\pi/\sqrt{2}$. ☐

**Integrais das Formas $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\,dx$** Como integrais impróprias das formas $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\,dx$ ocorrem em aplicações de análise de Fourier, recebem a denominação de **integrais de Fourier**. Integrais de Fourier aparecem como as partes real e imaginária da integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$.* Usando a fórmula de Euler $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\operatorname{sen}\alpha x$, sendo $\alpha$ um número real positivo, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\,dx \tag{16}$$

sempre que as duas integrais no lado direito convergirem. Suponhamos que $f(x) = p(x)/q(x)$ seja uma função racional contínua em $(-\infty, \infty)$. Então, as duas integrais de Fourier em (10) podem ser calculadas simultaneamente considerando a integral complexa $\int_C f(z)e^{i\alpha z}dz$, sendo $\alpha > 0$ e o contorno $C$, mais uma vez, consistindo no intervalo $[-R, R]$ no eixo real e um contorno semicircular $C_R$ com raio suficientemente grande para envolver os polos de $f(z)$ que ocorrerem no semiplano superior.

Antes de prosseguir daremos, sem provar, as condições suficientes para que a integral de contorno ao longo de $C_R$ tenda a zero quando $R \to \infty$.

**Teorema 6.6.2 Comportamento de Integrais Quando $R \to \infty$**

Suponhamos que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ seja uma função racional, sendo $n$ e $m$ os graus de $p(z)$ de $q(z)$, respectivamente, com $m \geq n + 2$. Se $C_R$ for um contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, e $\alpha > 0$, então $\int_C f(z)e^{i\alpha z}dz \to 0$ quando $R \to \infty$.

---

**EXEMPLO 4 Uso de Simetria**

Calculemos o valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}x}{x^2+9}\,dx$.

*Seção 6.7.

**Solução** Primeiro, notemos que os limites de integração na integral dada não são de $-\infty$ a $\infty$, como exige o método que acabamos de descrever. Isso pode ser remediado observando que o integrando é uma função par de $x$ (o que deve ser comprovado) e escrevendo

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+9}\,dx. \tag{17}$$

Como $\alpha = 1$, formamos a integral de contorno

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,e^{iz}dz,$$

onde $C$ é o contorno mostrado na Figura 6.6.2. Segundo o Teorema 6.5.3,

$$\int_{C_R} \frac{z}{z^2+9}e^{iz}dz + \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+9}e^{ix}\,dx = 2\pi i\,\text{Res}(f(z)e^{iz}, 3i),$$

onde $f(z) = z/(z^2 + 9)$; de (4) da Seção 6.5, temos

$$\text{Res}\Big(f(z)e^{iz},\ 3i\Big) = \frac{ze^{iz}}{2z}\bigg|_{z=3i} = \frac{e^{-3}}{2}$$

Usando o Teorema 6.6.2, concluímos que $\int_{C_R} f(z)e^{iz}dz \to 0$ quando $R \to \infty$, de modo que

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9}\,e^{ix}\,dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{2}\right) = \frac{\pi}{e^3}i.$$

No entanto, de (16),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9}\,e^{ix}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{e^3}i.$$

Igualando as partes imaginárias da última linha, obtemos o resultado adicional,

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9}\,dx = 0 \qquad \text{e} \qquad \text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{e^3}. \tag{18}$$

Por fim, usando o fato de o integrando ser uma função par, calculamos o valor da integral desejada:

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{2e^3}.$$

❑

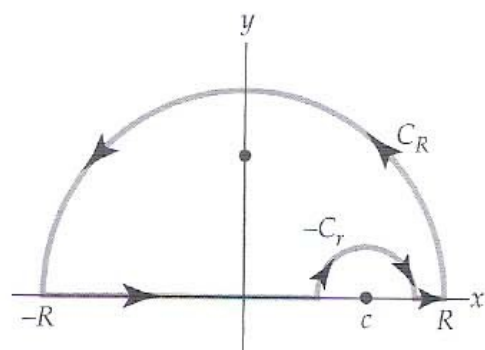



**Figura 6.6.3** Contorno indentado

**Contornos Indentados** As integrais impróprias das formas (2) e (3) consideradas até aqui envolviam integrandos contínuos no intervalo $(-\infty, \infty)$. Em outras palavras, a função complexa $f(z) = p(z)/q(z)$ não tinha polos no eixo real. Caso $f$ tenha polos no eixo real, devemos modificar o procedimento ilustrado nos Exemplos 2–4. Por exemplo, se $f$ tiver um polo em $z = c$, sendo $c$ um número real, para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ por resíduos, devemos usar um **contorno indentado** ou **denteado**, como ilustrado na Figura 6.6.3. O símbolo $C_r$ denota um contorno semicircular centrado em $z = c$ e orientado no sentido *positivo*. O próximo teorema é importante para este cálculo.

**Teorema 6.6.3 Comportamento de Integrais quando $r \to 0$**

Suponhamos que $f$ tenha um polo simples em $z = c$ no eixo real. Seja $C_r$ um contorno definido por $z = c + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, então

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,dz = \pi i\,\text{Res}(f(z), c).$$

**Prova** Como $f$ tem um polo simples em $z = c$, sua série de Laurent é

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + g(z),$$

onde $a_{-1} = \text{Res}(f(z), c)$ e $g$ é analítica no ponto $c$. Usando a série de Laurent e a parametrização para $C_r$ temos

$$\int_{C_r} f(z)\,dz = a_{-1}\int_0^{\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\,d\theta + ir\int_0^{\pi} g(c+re^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta = I_1 + I_2. \tag{19}$$

Primeiro, notemos que

$$I_1 = a_{-1}\int_0^{\pi} i\,d\theta = \pi i a_{-1} = \pi i\,\text{Res}(f(z), c).$$

Por ser analítica em $c$, $g$ é contínua neste ponto e, também, limitada em uma vizinhança do ponto; ou seja, existe um $M > 0$ para o qual $|g(c + re^{i\theta})| \leq M$. Logo,

$$|I_2| = \left| ir\int_0^{\pi} g(c+re^{i\theta})\,d\theta \right| \leq r\int_0^{\pi} M\,d\theta = \pi r M.$$

Esta desigualdade implica $\lim_{r\to 0}|I_2| = 0$ e, consequentemente, $\lim_{r\to 0} I_2 = 0$. Tomando o limite de (19) quando $r \to 0$, o teorema fica provado. ❑

---

**EXEMPLO 5 Uso de um Contorno Indentado**

Calculemos o valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x(x^2-2x+2)}\,dx$.

**Solução** Como a integral é do tipo dado em (3), consideraremos a integral de contorno

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}\,dz.$$

Figura 6.6.4 Contorno indentado para o Exemplo 5

A função $f(z) = 1/z(z^2 - 2z + 2)$ tem polos em $z = 0$ e em $z = 1 + i$ no semiplano superior. O contorno $C$ mostrado na Figura 6.6.4 é indentado na origem. Adotando uma notação concisa intuitiva, temos

$$\oint_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R = 2\pi i\,\text{Res}(f(z)e^{iz}, 1+i), \tag{20}$$

onde $\int_{-C_r} = -\int_{C_r}$. Se tomarmos o limite de (20) quando $R \to \infty$ e quando $r \to 0$, os Teoremas 6.6.2 e 6.6.3 resultam em

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}\,dx - \pi i\,\text{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = 2\pi i\,\text{Res}(f(z)e^{iz}, 1+i).$$

Mas,

$$\text{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{Res}(f(z)e^{iz}, 1+i) = -\frac{e^{-1+i}}{4}(1+i).$$

Logo,

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}\,dx = \pi i\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi i\left(-\frac{e^{-1+i}}{4}(1+i)\right).$$

Usando $e^{-1+i} = e^{-1}(\cos 1 + i\,\text{sen}\,1)$, simplificando e igualando partes reais e imaginárias nos dois lados da igualdade, obtemos

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2-2x+2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-1}(\text{sen}\,1 + \cos 1)$$

e

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x(x^2-2x+2)}\,dx = \frac{\pi}{2}[1 + e^{-1}(\text{sen}1 - \cos 1)].$$ ❑

### 6.6.3 Integração ao Longo de um Corte de Ramo

**Ponto de Ramo em $z = 0$** A seguir, examinaremos integrais da forma $\int_0^\infty f(x)\,dx$, em que o integrando $f(x)$ é uma função algébrica. Como no Exemplo 5, estas integrais exigem um tipo especial de contorno, pois quando $f(x)$ é convertida em uma função complexa o resultante integrando $f(z)$ tem, além de polos, uma singularidade não isolada em $z = 0$. Antes de prosseguir, sugerimos uma revisão da discussão sobre cortes de ramos nas Seções 2.6 e 4.1.

No exemplo a seguir, consideraremos um caso especial da integral real

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx, \tag{21}$$

onde $\alpha$ é uma constante real restrita ao intervalo $0 < \alpha < 1$. Observemos que quando $\alpha = \frac{1}{2}$ e $x$ é substituído por $z$, o integrando em (21) se torna a função multivalente

$$\frac{1}{z^{1/2}(z+1)}. \tag{22}$$

A origem é um ponto de ramo de (22), pois $z^{1/2}$ tem dois valores para qualquer $z \neq 0$. Se imaginarmos um caminho ao longo de uma circunferência em torno da origem $z = 0$, partindo de um ponto $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, retornaremos ao ponto inicial $z$, mas $\theta$ terá aumentado de $2\pi$. Por conseguinte o valor de $z^{1/2}$ passa de $z^{1/2} = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ a um valor ou ramo diferente:

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\,e^{i(\theta+2\pi)/2} = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}e^{i\pi} = -\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}.$$

Podemos forçar que $z^{1/2}$ seja unívoca restringindo os valores de $\theta$ a um certo intervalo de comprimento $2\pi$. No caso de (22), se escolhermos o eixo $x$ positivo como um corte de ramo, ou seja, se restringirmos os valores de $\theta$ a $0 < \theta < 2\pi$, garantiremos que $z^{1/2} = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ é unívoca (Seção 2.6).

**EXEMPLO 6 Integração ao Longo de um Corte de Ramo**

Calculemos $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx.$

**Solução** Primeiro, observemos que a integral real é imprópria por dois motivos: uma descontinuidade em $x = 0$ e o limite infinito de integração. Além disso, como o integrando se comporta como $x^{-1/2}$ nas proximidades da origem e como $x^{-3/2}$ quando $x \to \infty$, notamos que a integral converge.

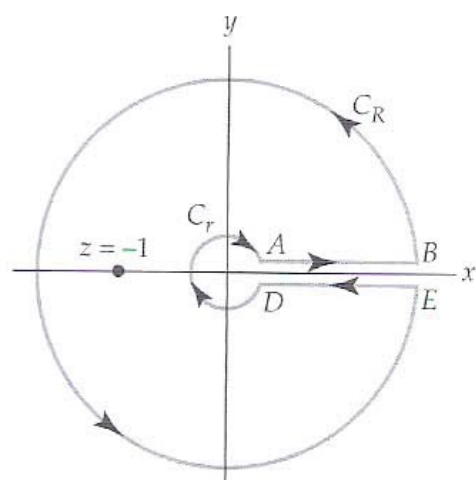



Figura 6.6.5 Contorno para o Exemplo 6

Formamos a integral $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^{1/2}(z+1)}\,dz$, onde $C$ é o contorno fechado mostrado na Figura 6.6.5 e que consiste em quatro componentes: $C_r$ e $C_R$ são porções de circunferências, $AB$ e $ED$ são segmentos de retas horizontais ao longo de lados opostos do corte de ramo. O integrando $f(z)$ da integral de contorno é unívoco e analítico em $C$ e no interior de $C$, exceto pelo polo simples em $z = -1 = e^{\pi i}$. Portanto, podemos escrever

$$\oint_C \frac{1}{z^{1/2}(z+1)}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), -1)$$

ou

$$\int_{C_R} + \int_{ED} + \int_{C_r} + \int_{AB} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), -1). \tag{23}$$

Apesar do ilustrado na Figura 6.6.5, podemos imaginar que os segmentos de retas $AB$ e $ED$ estão posicionados no eixo real positivo e, mais precisamente, $AB$ coincide com o *lado superior* do eixo real positivo, para o qual $\theta = 0$, enquanto $ED$ coincide com o *lado inferior* do eixo real positivo, para o qual $\theta = 2\pi$. Em $AB$, $z = xe^{0i}$ e em $ED$, $z = xe^{(0+2\pi)i} = xe^{2\pi i}$, de modo que

$$\int_{ED} = \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{-1/2}}{xe^{2\pi i}+1}(e^{2\pi i}dx) = -\int_R^r \frac{x^{-1/2}}{x+1}\,dx = \int_r^R \frac{x^{-1/2}}{x+1}\,dx \tag{24}$$

e

$$\int_{AB} = \int_r^R \frac{(xe^{0i})^{-1/2}}{xe^{0i}+1}(e^{0i}dx) = \int_r^R \frac{x^{-1/2}}{x+1}\,dx. \tag{25}$$

Com $z = re^{i\theta}$ e $z = Re^{i\theta}$ em $C_r$ e em $C_R$, respectivamente, por meio de uma análise similar à usada no Exemplo 2 e na prova do Teorema 6.6.1, podemos mostrar que $\int_{C_r} \to 0$ quando $r \to 0$, e $\int_{C_R} \to 0$ quando $R \to 0$. Com isso, de (23), (24) e (25) vemos que

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left[\int_{C_R} + \int_{ED} + \int_{C_r} + \int_{AB} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -1)\right]$$

é igual a

$$2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -1). \tag{26}$$

Por fim, usando (4) da Seção 6.5, temos

$$\operatorname{Res}(f(z), -1) = z^{-1/2}\Big|_{z=e^{\pi i}} = e^{-\pi i/2} = -i$$

e (26) fornece o resultado

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = \pi.$$

□

## 6.6.4 Princípio do Argumento e Teorema de Rouché

**Princípio do Argumento** Em contraste com a discussão focada no cálculo de integrais reais, a seguir aplicaremos a teoria de resíduos à localização de zeros de uma função analítica. Contudo, antes disso precisamos considerar dois importantes teoremas.

No primeiro teorema precisamos contar o número de zeros e de polos de uma função $f$ localizados no interior de um contorno fechado simples $C$; nesta contagem, incluímos a ordem ou multiplicidade de cada zero ou polo. Por exemplo, se

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-9)^4(z+i)^2}{(z^2-2z+2)^2(z-i)^6(z+6i)^7} \tag{27}$$

e $C$ for tomado como a circunferência $|z| = 2$, uma inspeção do numerador de $f$ revela que os zeros interiores a $C$ são $z = 1$ (zero simples) e $z = -i$ (zero de ordem ou multiplicidade 2). Portanto, o número $N_0$ de zeros no interior de $C$ é $N_0 = 1 + 2 = 3$. De modo similar, a inspeção do denominador de $f$ mostra, após fatoração de $z_2 - 2z + 2$, que os polos no interior de $C$ são $z = 1 - i$ (polo de ordem 2), $z = 1 + i$ (polo de ordem 2) e $z = i$ (polo de ordem 6). Desta forma, o número de polos no interior de $C$ é $N_p = 2 + 2 + 6 = 10$.

**Teorema 6.6.4 Princípio do Argumento**

Seja $C$ um contorno fechado simples totalmente posicionado em um domínio $D$. Seja $f$ uma função analítica em $D$, exceto em um número finito de polos no interior de $C$, e $f(z) \neq 0$ em $C$. Então,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_0 - N_p, \tag{28}$$

onde $N_0$ é o número total de zeros de $f$ no interior de $C$ e $N_p$ o número total de polos de $f$ no interior de $C$. Na determinação de $N_0$ e $N_p$, zeros e polos são contados segundo suas ordens ou multiplicidades.

**Prova** Primeiro, ressaltamos que quando usamos o símbolo $\oint_C$ para um contorno está implícito que a integração é feita no sentido positivo ao longo da curva fechada $C$.

O integrando $f'(z)/f(z)$ em (28) é analítico no contorno $C$ e em seu interior, exceto nos pontos no interior de $C$ em que $f$ tem um zero ou um polo. Seja $z_0$ um zero de ordem $n$ de $f$ no interior de $C$; usando (5) da Seção 6.4, podemos escrever $f(z) = (z - z_0)^n\phi(z)$, onde $\phi$ é analítica em $z_0$ e $\phi(z_0) \neq 0$. Diferenciando $f$ segundo a regra para o produto, obtemos

$$f'(z) = (z - z_0)^n \phi'(z) + n(z - z_0)^{n-1}\phi(z),$$

e, a seguir, dividimos esta expressão por $f$. Em algum disco perfurado centrado em $z_0$, temos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^n \phi'(z) + n(z - z_0)^{n-1}\phi(z)}{(z - z_0)^n \phi(z)} = \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{n}{z - z_0}. \quad (29)$$

O resultado em (29) mostra que o integrando $f'(z)/f(z)$ tem um polo simples em $z_0$, e o resíduo nesse ponto é

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},\ z_0\right) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\left[\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{n}{z - z_0}\right] \\ &= \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + n\right] = 0 + n = n, \end{aligned} \quad (30)$$

que é a ordem do zero $z_0$.

Seja, agora, $z_p$ um polo de ordem $m$ de $f$ no interior de $C$; usando (7) da Seção 6.4, podemos escrever $f(z) = g(z)/(z - z_p)^m$, onde $g$ é analítica em $z_p$ e $g(z_p) \neq 0$. Diferenciando $f(z) = g(z)/(z - z_p)^m$, obtemos

$$f'(z) = (z - z_p)^{-m} g'(z) - m(z - z_p)^{-m-1} g(z).$$

Por conseguinte, em algum disco perfurado centrado em $z_p$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_p)^{-m} g'(z) - m(z - z_p)^{-m-1} g(z)}{(z - z_p)^{-m} g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{-m}{z - z_p}. \quad (31)$$

Vemos, de (31), que o integrando $f'(z)/f(z)$ tem um polo simples em $z_p$. Procedendo como em (30), vemos que o resíduo em $z_p$ é igual a $-m$, o negativo da ordem do polo de $f$.

Por fim, sejam $z_{0_1}, z_{0_2}, \ldots, z_{0_r}$ e $z_{p_1}, z_{p_2}, \ldots, z_{p_s}$ zeros e polos de $f$, respectivamente, no interior de $C$; sejam $n_1, n_2, \ldots, n_r$ as ordens dos zeros e $m_1, m_2, \ldots, m_s$ as ordens dos polos. Cada um desses pontos é um polo simples do integrando $f'(z)/f(z)$, cujos correspondentes resíduos são $n_1, n_2, \ldots, n_r$ e $-m_1, -m_2, \ldots, -m_s$. Segundo o teorema de resíduos (Teorema 6.5.3), $\oint_C [f'(z)/f(z)]\, dz$ é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nos polos:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{r} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},\ z_{0_k}\right) + \sum_{k=1}^{s} \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},\ z_{p_k}\right)\right] \\ &= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{r} n_k + \sum_{k=1}^{s} (-m_k)\right] = 2\pi i [N_0 - N_p]. \end{aligned}$$

Dividindo este resultado por $2\pi i$, obtemos (28). □

Para ilustrar o Teorema 6.6.4, suponhamos que o contorno fechado simples seja $|z| = 2$ e que a função $f$ seja aquela dada em (27). O resultado em (28) indica que, no cálculo de $\oint_C [f'(z)/f(z)]\, dz$, cada zero de $f$ no interior de $C$ contribui com $2\pi i$ vezes sua ordem ou multiplicidade e cada polo contribui com $2\pi i$ vezes o negativo de sua ordem:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \overbrace{[2\pi i(1) + 2\pi i(2)]}^{\text{contribuição dos zeros de } f} + \overbrace{[2\pi i(-2) + 2\pi i(-2) + 2\pi i(-6)]}^{\text{contribuição dos polos de } f} = -14\pi i.$$

**Por que Princípio do Argumento?** Por que o Teorema 6.6.4 é denominado *princípio do argumento*? Esta pergunta é pertinente, pois na prova do teorema nenhuma referência é feita a qualquer argumento de grandezas complexas. Contudo, na verdade existe uma relação entre o número $N_0 - N_p$ no Teorema 6.6.4 e $\arg(f(z))$. Mais precisamente,

$$N_0 - N_p = \frac{1}{2\pi}\ [\text{mudança em } \arg(f(z)) \text{ quando } z \text{ percorre } C \text{ uma vez no sentido positivo}].$$

Este princípio pode ser facilmente comprovado considerando a simples função $f(z) = z^2$ e a circunferência unitária $|z| = 1$ como o contorno fechado simples $C$ no plano $z$. Como a função $f$ tem um zero de multiplicidade 2 e nenhum polo no interior de $C$, $N_0 - N_p = 2$. Caso $C$ seja parametrizado por $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sua imagem $C'$ no plano $w$ sob a transformação $w = z^2$ é $w = e^{i2\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que é a circunferência unitária $|w| = 1$. À medida que $z$ percorre $C$ a partir de $z = 1$ $(\theta = 0)$ até $z = 1$ $(\theta = 2\pi)$, vemos que $\arg(f(z)) = \arg(w) = 2\theta$ aumenta de 0 para $4\pi$. Em outras palavras, $w$ percorre a circunferência $|w| = 1$ duas vezes. Logo,

$$\frac{1}{2\pi}\,[\text{mudança em } \arg(f(z)) \text{ quando } z \text{ percorre } C \text{ uma vez no sentido positivo}] = \frac{1}{2\pi}[4\pi - 0] = 2.$$

**Teorema de Rouché** O próximo resultado é uma consequência do princípio do argumento. O teorema é útil na determinação do número de zeros de uma função analítica.

**Teorema 6.6.5 Teorema de Rouché**

Seja $C$ um contorno fechado simples totalmente posicionado em um domínio $D$. Sejam $f$ e $g$ funções analíticas em $D$. Se a desigualdade estrita $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ for válida para todo $z$ em $C$, então $f$ e $g$ têm o mesmo número de zeros (levando em conta a ordem ou multiplicidade de cada um) no interior de $C$.

**Prova** Primeiro, observamos que a hipótese "se a desigualdade estrita $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ for válida para todo $z$ em $C$" indica que nem $f$ nem $g$ têm zeros no contorno $C$. Como $|f(z) - g(z)| = |g(z) - f(z)|$, se dividirmos a desigualdade por $|f(z)|$ obtemos, para todo $z$ em $C$:

Figura 6.6.6 Imagem de C está no interior do disco $|w - 1| < 1$

$$|F(z) - 1| < 1, \tag{32}$$

onde $F(z) = g(z)/f(z)$. A desigualdade em (32) mostra que a imagem da curva $C$ no plano $w$ $(C')$ sob a transformação $w = F(z)$ é um percurso fechado e deve estar posicionado no interior do disco unitário aberto $|w - 1| < 1$, centrado em $w = 1$ (Figura 6.6.6). Em consequência, a curva $C'$ não envolve $w = 0$ e, portanto, $1/w$ é analítica em $C'$ e no interior de $C'$. Usando o teorema de Cauchy-Goursat, obtemos

$$\int_{C'} \frac{1}{w}\,dw = 0 \qquad \text{ou} \qquad \oint_C \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = 0, \tag{33}$$

pois $w = F(z)$ e $dw = F'(z)dz$. A regra para diferenciação do quociente

$$F'(z) = \frac{f(z)g'(z) - g(z)f'(z)}{[f(z)]^2},$$

resulta em

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Usando a última expressão na segunda integral em (33), obtemos

$$\oint_C \left[\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right] dz = 0 \qquad \text{ou} \qquad \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Aplicando (28) do Teorema 6.6.4 com $N_p = 0$, temos que o número de zeros de $g$ no interior de $C$ é igual ao número de zeros de $f$ no interior de $C$. ❑

---

**EXEMPLO 7 Localização de Zeros**

Localizemos os zeros da função polinomial $g(z) = z^9 - 8z^2 + 5$.

**Solução** Iniciamos escolhendo $f(z) = z^9$, pois tem o mesmo número de zeros que $g$. Como $f$ tem um zero de ordem 9 na origem $z = 0$, começamos a busca pelos zeros de $g$ examinando circunferências centradas

em $z = 0$. Em outras palavras, *se* conseguirmos mostrar que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo $z$ em *alguma* circunferência $|z| = R$, o Teorema 6.6.5 garante que $f$ e $g$ têm o mesmo número de zeros no interior do disco $|z| < R$. A seguir, usando a desigualdade triangular (9) da Seção 1.2, temos

$$|f(z) - g(z)| = \left|z^9 - (z^9 - 8z^2 + 5)\right| = \left|8z^2 - 5\right| \leq 8|z|^2 + 5.$$

Além disso, $|f(z)| = |z|^9$. Notemos que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ ou $8|z|^2 + 5 < |z|^9$ *não* é válida para todo $z$ na circunferência $|z| = 1$, de modo que nada podemos concluir. No entanto, expandindo a busca à circunferência de raio maior $|z| = \frac{3}{2}$ vemos que

$$|f(z) - g(z)| \leq 8|z|^2 + 5 = 8\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 5 = 23 < \left(\tfrac{3}{2}\right)^9 = |f(z)| \tag{34}$$

pois $(\frac{3}{2})^9 \approx 38{,}44$. Concluímos de (34) que, como $f$ tem um zero de ordem 9 no interior do disco $|z| < \frac{3}{2}$, todos os zeros de $g$ ocorrem no interior do mesmo disco. □

Seguindo um raciocínio um pouco mais sutil, podemos demonstrar que a função $g$ no Exemplo 7 tem *alguns* zeros no interior do disco unitário $|z| < 1$. Para ver isso, podemos escolher $f(z) = -8z^2 + 5$. Com isso, para todo $z$ em $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = \left|(-8z^2 + 5) - (z^9 - 8z^2 + 5)\right| = \left|-z^9\right| = |z|^9 = (1)^9 = 1. \tag{35}$$

No entanto, de (10) da Seção 1.2 temos, para todo $z$ em $|z| = 1$,

$$|f(z)| = |-f(z)| = \left|8z^2 - 5\right| \geq \left|8|z|^2 - |5|\right| = |8 - 5| = 3. \tag{36}$$

Os valores em (35) e (36) mostram que para todo $z$ em $|z| = 1$, $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Como $f$ tem dois zeros no interior de $|z| < 1$ ($\pm\sqrt{\frac{5}{8}} \approx \pm 0{,}79$), podemos concluir, usando o Teorema 6.6.5, que dois zeros de $g$ também ocorrem no interior desse disco.

Podemos prosseguir com este raciocínio. Escolhamos, agora, $f(z) = 5$ e $|z| = \frac{1}{2}$. Então, para todo $z$ em $|z| = \frac{1}{2}$,

$$|f(z) - g(z)| = \left|5 - (z^9 - 8z^2 + 5)\right| = \left|-z^9 + 8z^2\right| \leq |z|^9 + 8|z|^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^9 + 2 \approx 2{,}002.$$

Assim, vemos que $|f(z) - g(z)| < |f(z)| = 5$ para todo $z$ em $|z| = \frac{1}{2}$. Como $f$ não tem zeros no interior do disco $|z| < \frac{1}{2}$, $g$ também não tem. Concluímos, então, que todos os nove zeros de $g(z) = z^9 - 8z + 5$ estão na região anelar $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$; dois desses zeros estão em $\frac{1}{2} < |z| < 1$.

## 6.6.5 Soma de Séries Infinitas

**Uso de $\cot \pi z$** Em algumas circunstâncias específicas os resíduos em polos simples da função trigonométrica $\cot \pi z$ permitem que determinemos a soma de uma série infinita.

Na Seção 4.3 vimos que os zeros de $\operatorname{sen} z$ eram números reais $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Assim, a função $\cot \pi z$ tem polos simples nos zeros de $\operatorname{sen} \pi z$, que são $\pi z = k\pi$ ou $z = k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Se uma função polinomial $p(z)$ tiver ($i$) coeficientes reais, ($ii$) grau $n \geq 2$ e ($iii$) não tiver zeros *inteiros*, então a função

$$f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{p(z)} \tag{37}$$

tem um número infinito de polos simples em $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de $\cot \pi z$, e um número finito de polos $z_{p_1}, z_{p_2}, \ldots, z_{p_r}$ dos zeros de $p(z)$. O contorno retangular fechado $C$ mostrado na Figura 6.6.7 tem vértices $(n + ½) + ni$, $-(n + ½) + ni$, $-(n + ½) - ni$ e $(n + ½) - ni$, onde $n$ é tomado como suficientemente grande para que $C$ envolva os polos simples $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ e *todos* os polos $z_{p_1}, z_{p_2}, \ldots, z_{p_r}$. Aplicando o teorema de resíduos, temos,

**Figura 6.6.7** Contorno retangular $C$ envolvendo polos de (37)

$$\oint_C \frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}\, dz = 2\pi i \left[\sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)},\, k\right) + \sum_{j=1}^{r} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)},\, z_{p_j}\right)\right]. \tag{38}$$

Seguindo procedimento similar ao usado várias vezes na Subseção 6.6.2, podemos mostrar que $\oint_C \pi \cot \pi z\, dz/p(z) \to 0$ quando $n \to \infty$, de modo que (38) passa a $0 = \sum_k$ resíduos $+ \sum_j$ resíduos. Ou seja,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}, k\right) = -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}, z_{p_j}\right). \tag{39}$$

Usando, agora, (4) da Seção 6.5 (com $g(z) = \pi\cos \pi z/p(z)$, $h(z) = \operatorname{sen} \pi z$, $h'(z) = \pi\cos \pi z$), o cálculo dos resíduos nos polos simples $0, \pm1, \pm2,...$, se torna uma tarefa simples:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}, k\right) = \frac{\pi \cos k\pi/p(k)}{\pi \cos k\pi} = \frac{1}{p(k)}. \tag{40}$$

Combinando (40) e (39), chegamos ao resultado desejado

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p(k)} = -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}, z_{p_j}\right). \tag{41}$$

**Uso de csc $\pi z$** Existem várias fórmulas como (41) para soma de séries. Se $p(z)$ for uma função polinomial que satisfaça os requisitos anteriores $(i)$–$(iii)$, a função

$$f(z) = \frac{\pi \csc \pi z}{p(z)} \tag{42}$$

tem um número infinito de polos simples $z = 0, \pm1, \pm2,...$, de csc $\pi z$, e um número finito de polos $z_{p_1}$, $z_{p_2},..., z_{p_r}$, dos zeros de $p(z)$. Neste caso, pode ser mostrado que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p(k)} = -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \csc \pi z}{p(z)}, z_{p_j}\right). \tag{43}$$

No próximo exemplo mostramos como usar o resultado em (41) para calcular a soma de uma série infinita.

---

EXEMPLO 8 **Soma de uma Série Infinita**

Determinemos a soma da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$.

**Solução** Se escolhermos $p(z) = z^2 + 4$, os três requisitos $(i)$–$(iii)$ que precedem (37) são atendidos. Os zeros de $p(z)$ são $\pm 2i$ e correspondem a polos simples de $f(z) = \cot \pi z/(z^2 + 4)$. Usando a fórmula em (41),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = -\left[\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2+4}, -2i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2+4}, 2i\right)\right]. \tag{44}$$

Agora, usando (4) da Seção 6.5, temos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2+4}, -2i\right) = \frac{\pi \cot 2\pi i}{4i} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2+4}, 2i\right) = \frac{\pi \cot 2\pi i}{4i}.$$

A soma dos resíduos é $(\pi/2\pi)\cot 2\pi i$. Esta soma é uma grandeza real, pois de (27) da Seção 4.3:

$$\frac{\pi}{2i}\cot 2\pi i = \frac{\pi}{2i}\frac{\cosh(-2\pi)}{(\ -i\operatorname{senh}(-2\pi))} = -\frac{\pi}{2}\coth 2\pi.$$

Com isso, (44) passa a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \frac{\pi}{2}\coth 2\pi. \tag{45}$$

Este ainda não é o resultado desejado. Para obtê-lo, devemos manipular a soma $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ para escrevê-la na forma $\sum_{k=0}^{\infty}$. Notemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{k^2+4} + \overbrace{\frac{1}{4}}^{\substack{\text{termo} \\ k=0}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-k)^2+4} + \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} + \frac{1}{4} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} - \frac{1}{4}. \qquad (46)$$

Para obter a soma da série original, combinamos (45) e (46),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \coth 2\pi,$$

e resolvemos para $\sum_{k=0}^{\infty}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \frac{1}{8} + \frac{\pi}{4} \coth 2\pi. \qquad (47)$$

Com a ajuda de uma calculadora, obtemos o valor do lado direito aproximadamente como 0,9104. ❑

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.6 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

### 6.6.1 Cálculo de Integrais Trigonométricas Reais

Nos Problemas 1–12, calcule a integral trigonométrica dada.

**1.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+0{,}5\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta$

**2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{10-6\cos\theta}\,d\theta$

**3.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\text{sen}\,\theta}\,d\theta$

**4.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2\theta}\,d\theta$

**5.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\cos\theta}\,d\theta$ [*Sugestão*: seja $t = 2\pi - \theta$.]

**6.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\text{sen}^2\,\theta}\,d\theta$

**7.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2\,\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta$

**8.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{3-\text{sen}\,\theta}\,d\theta$

**9.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

**10.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta+2\,\text{sen}\,\theta+3}\,d\theta$

**11.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\text{sen}\,\theta}\,d\theta$

**12.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

Nos Problemas 13 e 14, deduza o resultado geral dado. Use o Problema 13 para comprovar a resposta do Exemplo 1. Use o Problema 14 para comprovar a resposta do Problema 7.

**13.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{a\pi}{(\sqrt{a^2-1})^3},\ a>1$

**14.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2\,\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right),\ a>b>0$

### 6.6.2 Cálculo de Integrais Impróprias Reais

Nos Problemas 15–26, calcule o valor principal de Cauchy da integral imprópria indicada.

15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$

16. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25} dx$

17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$

18. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$

19. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx$

20. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4)^3} dx$

21. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$

22. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)} dx$

23. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

24. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx$

25. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$

26. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)^2} dx$

Nos Problemas 27–38, calcule o valor principal de Cauchy da integral imprópria indicada.

27. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$

28. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx$

29. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} dx$

30. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2} dx$

31. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} dx$

32. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 5} dx$

33. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4 + 1} dx$

34. $\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4 + 1} dx$

35. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$

36. $\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$

37. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x + i} dx$ [*Sugestão*: primeiro, substitua $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$, $x$ real.]

38. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} dx$ [*Sugestão*: considere $e^{iz}/(z - i)$.]

Nos Problemas 39–42, use um contorno indentado e resíduos para determinar o valor principal de Cauchy da integral imprópria especificada.

39. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi$

40. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + 1)} dx = \pi(1 - e^{-1})$

41. $\int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

42. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 3x + 2} dx = \pi[\operatorname{sen} 1 - 2 \operatorname{sen} 2]$

### 6.6.3 Integração ao Longo de um Corte de Ramo

Nos Problemas 43–46, proceda como no Exemplo 6 e determine o valor principal de Cauchy da integral imprópria especificada.

43. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

44. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x + 1)(x + 4)} dx = \frac{\pi}{3}$

45. $\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

46. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{1/3}}{(x + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Nos Problemas 47 e 48, determine o valor principal de Cauchy da integral imprópria especificada. Use o Problema 47 para comprovar a resposta do Exemplo 6. Use o Problema 48 para comprovar a resposta ao Problema 45.

47. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha - 1}}{x + 1} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha\pi}, \; 0 < \alpha < 1,$

48. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi(1 - \alpha)}{4\cos(\alpha\pi/2)}, \; -1 < \alpha < 3, \; \alpha \neq 1$

## Integrais Reais Variadas

**49.** Use o contorno $C$ mostrado na Figura 6.6.8 e mostre que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha\pi}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

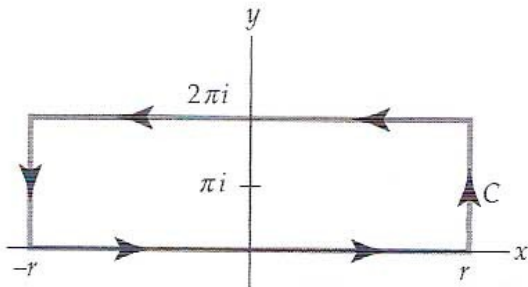



**Figura 6.6.8** Figura para o Problema 49

**50.** O resultado da integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ pode ser obtido com cálculo elementar e coordenadas polares. Use este resultado, a integral de contorno $\oint_C e^{-z^2} e^{i\alpha z} dz$ e o contorno $C$ mostrado na Figura 6.6.9 para mostrar que

$$\text{V.P.} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2/4}.$$

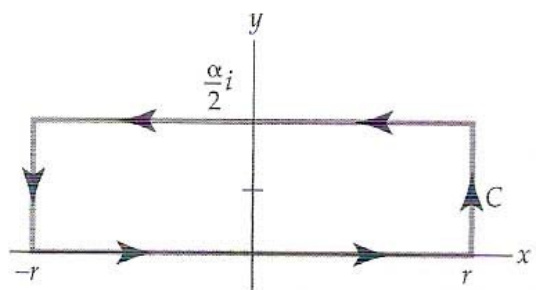



**Figura 6.6.9** Figura para o Problema 50

**51.** Imagine como calcular o valor principal de Cauchy de

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x-1} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Implemente suas ideias.

**52.** (a) Use uma calculadora com facilidades gráficas ou um programa de computador para desenhar, no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de sen $\theta$ e $2\theta/\pi$ no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Explique, em termos gráficos, a validade da desigualdade sen $\theta \geq 2\theta/\pi$, no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Use esta desigualdade e prove que, para $R > 0$,

$$\int_{0}^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta < \frac{\pi}{2R}.$$

(b) Explique como o resultado na parte (a) leva à conclusão que, para $R > 0$,

$$\int_{0}^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta < \frac{\pi}{R}. \quad (48)$$

O resultado em (48) é conhecido como **desigualdade de Jordan** e é útil no cálculo de integrais das formas $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx$.

**53.** Reconsidere a integral do Problema 39 juntamente com o contorno indentado da Figura 6.6.4. Use a desigualdade de Jordan do Problema 52 para mostrar que $\int_{C_R} \to 0$ quando $R \to \infty$.

**54.** Como base no procedimento de cálculo delineado na Subseção 6.6.1, investigue a integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - \operatorname{sen}\theta} d\theta$, $|a| \leq 1$.

**55.** Use a fórmula de Euler como ponto de partida para o cálculo da integral

$$\int_{0}^{2\pi} e^{\cos\theta} [\cos(\operatorname{sen}\theta - n\theta) + i \operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta - n\theta)] \, d\theta, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

**56.** Com base no trabalho feito no Problema 55, deduza os valores das integrais reais

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta \qquad \text{e} \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta.$$

**57.** Seja $f$ uma função real contínua no intervalo $[a,\ b]$, exceto em um dado ponto $c$ no intervalo. O **valor principal** da integral é definido como

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right],\ \varepsilon > 0.$$

Calcule o valor principal de $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$.

**58.** Determine se a integral no Problema 57 converge.

## 6.6.4 Princípio do Argumento e Teorema de Rouché

Nos Problemas 59 e 60, use o princípio do argumento em (28) do Teorema 6.6.4 e calcule a integral $\displaystyle\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ para a função $f$ e contorno fechado $C$ dados.

**59.** $f(z) = z^6 - 2iz^4 + (5-i)z^2 + 10$, $C$ envolve todos os zeros de $f$

**60.** $f(z) = \dfrac{(z-3iz-2)^2}{z(z^2-2z+2)^5}$, $C$ é $|z| = \frac{3}{2}$

Nos Problemas 61–64, use o princípio do argumento em (28) do Teorema 6.6.4 e calcule a integral dada no contorno fechado $C$ indicado. Você deve identificar $f(z)$ e $f'(z)$.

**61.** $\displaystyle\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z}\,dz$, $C$ é $|z| = 2$

**62.** $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^2+4}\,dz$, $C$ é $|z| = 3$

**63.** $\displaystyle\oint_C \cot z\,dz$, $C$ é o contorno retangular com vértices $10+i$, $-4+i$, $-4-i$ e $10-i$.

**64.** $\displaystyle\oint_C \tan \pi z\,dz$, $C$ é $|z-1| = 2$.

**65.** Use o teorema de Rouché (Teorema 6.6.5) e mostre que todos os sete zeros de $g(z) = z^7 + 10z + 14$ estão no interior da região anelar $1 < |z| < 2$.

**66.** (a) Use o teorema de Rouché (Teorema 6.6.5) e mostre que todos os quatro zeros de $g(z) = 4z^4 + 2(1-i)z + 1$ estão no interior do disco $|z| < 1$.

(b) Mostre que três zeros da função $g$ na parte (a) estão na região anelar $\frac{1}{2} < |z| < 1$.

**67.** Na prova do Teorema 6.6.5, explique como a hipótese "se a desigualdade estrita $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ for válida para todo $z$ em $C$" implica que $f$ e $g$ não podem ter zeros em $C$.

## 6.6.5 Soma de Séries Infinitas

**68.** (a) Use o procedimento ilustrado no Exemplo 8 e deduza o resultado geral

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\coth a\pi.$$

(b) Use a parte (a) e comprove (47) com $a = 2$.

(c) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

Nos Problemas 69 e 70, use (41) e calcule a soma da série dada.

**69.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

**70.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16k^2+16k+3}$

Nos Problemas 71 e 72, use (43) e calcule a soma da série dada.

**71.** $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)^2}$

**72.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

**73.** (**a**) Use (41) e obtenha o resultado geral

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k-a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

onde $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

(**b**) Use a parte (a) e comprove sua resposta ao Problema 69.

**74.** (**a**) Use (43) e calcule o resultado geral

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a},$$

onde $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

(**b**) Use a parte (a) e comprove sua resposta ao Problema 71.

## 6.7 Aplicações

Cursos de matemática e engenharia usam a **transformada de Laplace** de uma função real $f$, definida para $t \geq 0$, como

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Quando a integral em (1) converge, o resultado é uma função de $s$. É comum o uso de uma nomenclatura que enfatize a relação entre a função e sua transformada: a função é representada em letra minúscula e sua transformada de Laplace em letra maiúscula. Por exemplo, $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$, e assim por diante.

Ao aplicar (1), nos deparamos com dois problemas:

($i$) *Problema direto*: dada a função $f(t)$ que satisfaz certas condições, determinar sua transformada de Laplace.
($ii$) *Problema inverso*: determinar a função $f(t)$ que tem uma dada transformada $F(s)$.

A função $f(t)$ é denominada **transformada inversa de Laplace** e denotada por $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

A transformada de Laplace é uma ferramenta muito útil na solução de certos tipos de problemas aplicados que envolvem equações diferenciais. Nesses problemas, trabalhamos com a transformada $Y(s)$ de uma função desconhecida $y(t)$. A determinação de $y(t)$ exige o cálculo de $\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$. Quando $Y(s)$ é uma função racional de $s$, podemos usar frações parciais, propriedades operacionais ou tabelas de transformadas para determinar sua inversa.

Nesta seção veremos que a transformada inversa de Laplace não é simplesmente um símbolo, mas outra transformada integral. A razão de não usarmos essa transformada integral inversa em cursos iniciais se deve ao fato de ser um tipo especial de integral de contorno complexa.

Iniciamos a seção com uma revisão da noção de pares de transformadas integrais, e a encerramos com uma breve introdução à **transformada de Fourier**.

**Transformadas Integrais** Seja $f(x, y)$ uma função de valor real de duas variáveis reais. Uma integral definida de $f$ em relação a uma das variáveis resulta em uma função da outra variável. Por exemplo, se mantivermos $y$ constante o resultado da integral na variável real $x$ $\int_1^2 4xy^2 dx = 6y^2$ é a função $6y^2$. Assim, uma integral definida da forma $F(\alpha) = \int_a^b f(x)K(\alpha, x)\, dx$ transforma a função $f$ da variável $x$ na função $F$ da variável $\alpha$. Dizemos que

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x)K(\alpha, x)\, dx \tag{2}$$

é uma **transformada integral** da função $f$. Transformadas integrais ocorrem em **pares de transformadas**. Isso significa que a função original $f$ pode ser recuperada por meio de outra transformada integral

$$f(x) = \int_c^d F(\alpha)H(\alpha, x)\,d\alpha, \tag{3}$$

denominada **transformada inversa**. A função $K(\alpha, x)$ em (2) e a função $H(\alpha, x)$ em (3) representam os **núcleos** (*kernels*) das respectivas transformadas. Notamos que se $\alpha$ representar uma variável complexa, a integral definida em (3) é substituída por uma integral de contorno.

**Transformada de Laplace** Suponhamos que em (2) o símbolo $\alpha$ seja substituído pelo símbolo $s$ e que $f$ represente uma função real* definida no intervalo ilimitado $[0, \infty)$. Neste caso (2) é uma integral imprópria, definida como o limite

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)\,dt. \tag{4}$$

Se o limite em (4) existir, dizemos que a integral existe ou converge; se o limite não existir, a integral não existe e dizemos que diverge. A escolha de $K(s, t) = e^{-st}$, sendo $s$ uma variável complexa, para o núcleo de (4) resulta na transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f(t)\}$ definida em (1). A integral que define a transformada de Laplace pode não convergir para certas funções $f$. Por exemplo, $\mathscr{L}\left\{e^{t^2}\right\}$ e $\mathscr{L}\{1/t\}$ não existem. É possível, ainda, que o limite em (4) exista apenas para certos valores da variável $s$.

---

**EXEMPLO 1 Existência de uma Transformada de Laplace**

A transformada de Laplace de $f(t) = 1,\ t \geq 0$ é

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1-e^{-sb}}{s}. \tag{5}$$

Se $s$ for uma variável complexa $s = x + iy$,

$$e^{-sb} = e^{-bx}(\cos by + i\,\text{sen}\,by). \tag{6}$$

Usando (6), vemos que, em (5), $e^{-sb} \to 0$ quando $b \to \infty$, se $x > 0$. Em outras palavras, (5) fornece $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, desde que $\text{Re}(s) > 0$. ❑

**Figura 6.7.1** Continuidade por partes em $[0, \infty)$

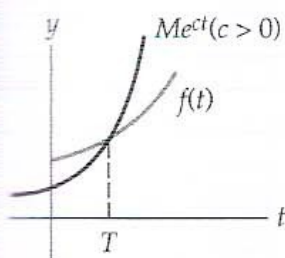



**Figura 6.7.2** Ordem exponencial

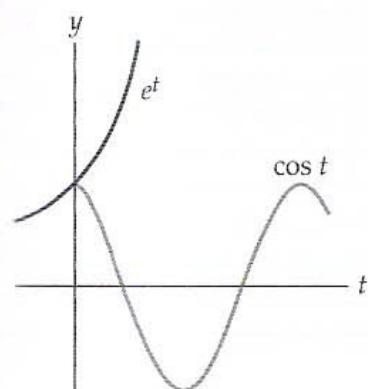



**Figura 6.7.3** $f(t) = \cos t$ é de ordem exponencial $c = 0$

**Existência de $\mathscr{L}\{f(t)\}$** As seguintes condições são *suficientes* para garantir a existência de $\mathscr{L}\{f(t)\}$: $f$ deve ser contínua por partes em $[0, \infty)$ e $f$ deve ser de ordem exponencial. Recordemos do cálculo elementar que **continuidade por partes** em $[0, \infty)$ significa que, em qualquer intervalo, existe no máximo um número finito de pontos $t_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $t_{k-1} < t_k$, nos quais $f$ tem descontinuidades finitas e é contínua em cada intervalo aberto $t_{k-1} < t < t_k$ (Figura 6.7.1). Uma função $f$ é **de ordem exponencial** $c$ caso existam constantes $c$, $M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, para $t > T$. A condição $|f(t)| \leq Me^{ct}$, para $t > T$ afirma que o gráfico de $f$ no intervalo $(T, \infty)$ não cresce mais rapidamente do que o gráfico da função exponencial $Me^{ct}$ (Figura 6.7.2). De modo alternativo, $e^{-ct}|f(t)|$ é limitada; ou seja, $e^{-ct}|f(t)| \leq M$ para $t > T$. Como podemos ver na Figura 6.7.3, a função $f(t) = \cos t$, $t \geq 0$, é de ordem exponencial $c = 0$, para $t > 0$. De fato, toda função limitada é necessariamente de ordem exponencial $c = 0$.

---

*A função $f(t)$ também pode ser uma função de valor complexo da variável real $t$.

**Teorema 6.7.1 Condições Suficientes para a Existência**

Seja $f$ uma função contínua por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial $c$ para $t > T$. Então, $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $\text{Re}(s) > c$.

**Prova** Segundo a propriedade aditiva de integrais definidas,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt = I_1 + I_2.$$

A integral $I_1$ existe, pois pode ser escrita como a soma de integrais em intervalos em que $e^{-st}f(t)$ é contínua. Para provar a existência de $I_2$, tomemos $s$ como a variável complexa $s = x + iy$. Usando $|e^{-st}| = |e^{-st}(\cos yt + i \text{ sen } yt)| = e^{-xt}$ e a definição de ordem exponencial $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t > T$, obtemos

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{st} f(t)|\, dt \leq M \int_T^\infty e^{-xt} e^{ct} dt$$

$$= M \int_T^\infty e^{-(x-c)t} dt = -M \frac{e^{-(x-c)t}}{x - c}\bigg|_T^\infty = M \frac{e^{-(x-c)T}}{x - c}$$

para $x = \text{Re}(s) > c$. Como $\int_T^\infty Me^{-(x-c)t} dt$ converge, segundo o teste de comparação para integrais impróprias, a integral $\int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt$ converge. Isso, por sua vez, implica que $I_2$ existe para $\text{Re}(s) > c$. A existência de $I_1$ e de $I_2$ implica que $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ existe para $\text{Re}(s) > c$. ❑

Com esse conceito em mente, enunciamos o próximo teorema sem prová-lo.

**Teorema 6.7.2 Analiticidade da Transformada de Laplace**

Seja $f$ uma função contínua por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial $c$ para $t \geq 0$. Então, a transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

é uma função analítica no semiplano direito definido por $\text{Re}(s) > 0$.

**A Transformada Inversa de Laplace** Embora o Teorema 6.7.2 indique que a função complexa $F(s)$ é analítica no semiplano à direita da reta $x = c$ no plano complexo, em geral $F(s)$ terá singularidades à esquerda desta reta. Agora, estamos em condições de apresentar a forma integral da transformada inversa de Laplace.

**Teorema 6.7.3 Transformada Inversa de Laplace**

Se $f$ e $f'$ forem contínuas por partes em $[0, \infty)$, se $f$ for de ordem exponencial $c$ para $t \geq 0$ e se $F(s)$ for uma transformada de Laplace, a **transformada inversa de Laplace** $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ é

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} e^{st} F(s)\, ds, \tag{7}$$

onde $\gamma > c$.

O limite em (7), que define um valor principal da integral, é usualmente escrito como

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds, \tag{8}$$

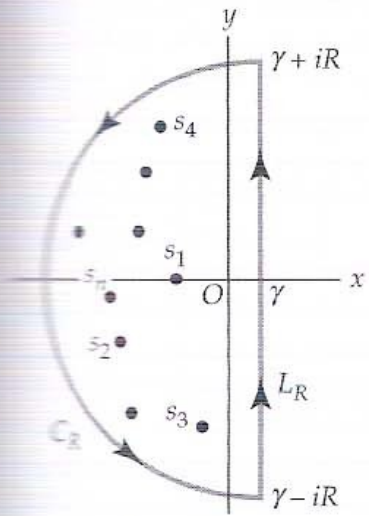



Figura 6.7.4 Possível contorno para o cálculo de (7)

onde os limites de integração indicam que esta é feita ao longo do contorno retilíneo vertical infinito $\text{Re}(s) = x = \gamma$. Aqui, $\gamma$ é uma constante real positiva maior que $c$ e maior que as partes reais de todas as singularidades no semiplano à esquerda de $x = \gamma$. A integral em (8) é conhecida como **integral de contorno de Bromwich**. Comparando (8) e (3), vemos que o núcleo da transformada inversa é $H(s, t) = e^{st}/2\pi i$.

O fato de $F(s)$ ter singularidades $s_1, s_2, \ldots, s_n$ à esquerda da reta $x = \gamma$ permite que calculemos (7) usando um adequado contorno fechado que envolva as singularidades. Um contorno fechado $C$ comumente utilizado consiste em uma semicircunferência $C_R$ de raio $R$ e centro $(\gamma, 0)$ e em um segmento de reta vertical $L_R$ paralelo ao eixo $y$, que passa pelo ponto $(\gamma, 0)$ e se estende de $y = \gamma - iR$ a $y = \gamma + iR$ (Figura 6.7.4). O raio $R$ da semicircunferência deve ser maior que o maior número no conjunto dos módulos das singularidades, $\{|s_1|, |s_2|, \ldots, |s_n|\}$, ou seja, suficientemente grande para que todas as singularidades estejam no interior da semicircunferência. Com o contorno $C$ escolhido dessa forma, (7) pode ser calculada com uso do teorema de resíduos de Cauchy. Se permitirmos que o raio $R$ da semicircunferência tenda a $\infty$, a parte vertical do contorno tende à reta vertical infinita que é o contorno em (8).

O contorno que acabamos de descrever será usado para provar o próximo teorema.

**Teorema 6.7.4 Transformada Inversa de Laplace**

Seja $F(s)$ uma transformada de Laplace que tem um número finito de polos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ à esquerda da reta vertical $\text{Re}(s) = \gamma$ e seja $C$ o contorno ilustrado na Figura 6.7.4. Se $sF(s)$ for limitada em $C_R$ quando $R \to \infty$, então

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(e^{st}F(s), s_k\right). \tag{9}$$

**Prova** Da Figura 6.7.4 e do teorema de resíduos de Cauchy, temos

$$\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds + \int_{L_R} e^{st}F(s)\,ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(e^{st}F(s),\ s_k\right)$$

ou

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} e^{st}F(s)\,ds = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(e^{st}F(s),\ s_k\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds. \tag{10}$$

O teorema é justificado fazendo $R \to \infty$ em (10) e mostrando que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds = 0$. Se a semicircunferência $C_R$ for parametrizada por $s = \gamma + Re^{i\theta}$, $\pi/2 \le \theta \le 3\pi/2$, então $ds = Re^{i\theta}d\theta = (s - \gamma)id\theta$ e

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\gamma t + Rte^{i\theta}} F(\gamma + Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta.$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left|e^{\gamma t + Rte^{i\theta}}\right| \left|F(\gamma + Re^{i\theta})\right| \left|Rie^{i\theta}\right| d\theta. \tag{11}$$

Para determinar um limitante superior para a expressão em (11), examinemos os três módulos do integrando no lado direito da desigualdade. Primeiro,

$$\left|e^{\gamma t + Rte^{i\theta}}\right| = \left|e^{\gamma t}e^{Rt(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}\right| \overset{\downarrow \text{ pois } |e^{iRt\,\text{sen}\,\theta}| = 1}{=} e^{\gamma t}e^{Rt\cos\theta}.$$

A seguir, para $R$ suficientemente grande, podemos escrever

$$\left|Rie^{i\theta}\right| = |s - \gamma|\,|i| \le |s| + |\gamma| < |s| + |s| = 2|s| \quad \text{e} \quad |sF(s)| < M.$$

A primeira dessas duas desigualdades resulta da desigualdade triangular, e a segunda da hipótese de que $sF(s)$ é limitada em $C_R$ quando $R \to \infty$. Assim, a desigualdade em (11) fica escrita como

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds\right| \le \frac{M}{\pi}e^{\gamma t}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt\cos\theta}\,d\theta. \tag{12}$$

Se fizermos $\theta = \phi + \pi/2$, a integral no lado direito de (12) se torna $\int_0^{\pi} e^{-Rt\,\text{sen}\,\phi}d\phi$. Como o integrando é simétrico em relação à reta $\theta = \pi/2$, temos

$$\int_0^{\pi} e^{-Rt\,\text{sen}\,\phi}d\phi = 2\int_0^{\pi/2} e^{-Rt\,\text{sen}\,\phi}d\phi. \tag{13}$$

Como sen $\phi \ge 2\phi/\pi$,*

$$2\int_0^{\pi/2} e^{-Rt\,\text{sen}\,\phi}d\phi \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt\phi/\pi}d\phi = -\frac{\pi}{Rt}e^{-2Rt\phi/\pi}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{Rt}\left[1 - e^{-Rt}\right]. \tag{14}$$

Consequentemente, de (11), (12), (13) e (14), obtemos

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds\right| \le \frac{Me^{\gamma t}}{Rt}\left[1 - e^{-Rt}\right]. \tag{15}$$

Como o lado direito de (15) tende a zero quando $R \to \infty$ para $t > 0$, concluímos que $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds = 0$. Por fim, quando $R \to \infty$, de (10), vemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}F(s)\,ds = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(e^{st}F(s),\ s_k\right).$$

□

Nos exemplos a seguir, assumimos que as hipóteses do Teorema 6.7.4 são satisfeitas.

---

**EXEMPLO 2 Transformada Inversa de Laplace**

Calculemos $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\}$, $\text{Re}(s) > 0$.

**Solução** Considerada uma função da variável complexa $s$, a função $F(s) = 1/s^3$ tem um polo de ordem 3 em $s = 0$. Dessa forma, de (9) e (2) da Seção 6.5 temos:

$$\begin{aligned} f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} &= \text{Res}\left(e^{st}\frac{1}{s^3}, 0\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-0)^3\frac{e^{st}}{s^3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{d^2}{ds^2}e^{st} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\ t^2e^{st} \\ &= \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

□

A resposta no Exemplo 1 é consistente (para $n = 2$) com o resultado $\mathscr{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$ encontrado em todas as tabelas de transformadas de Laplace.

A transformada de Laplace (1) utiliza apenas os valores de uma função $f(t)$ para $t > 0$, de modo que em geral $f$ é tomada como sendo 0 para $t < 0$. Esta não chega a ser uma grande limitação, pois as funções com que lidamos em aplicações são, em sua maior parte, definidas apenas para $t > 0$. Embora não entremos em detalhes, a integral de inversão em (7) pode ser deduzida de um resultado conhecido como fórmula integral de Fourier, segundo a qual

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}F(s)ds = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{16}$$

*Problema 52 do Conjunto de Exercícios 6.6.

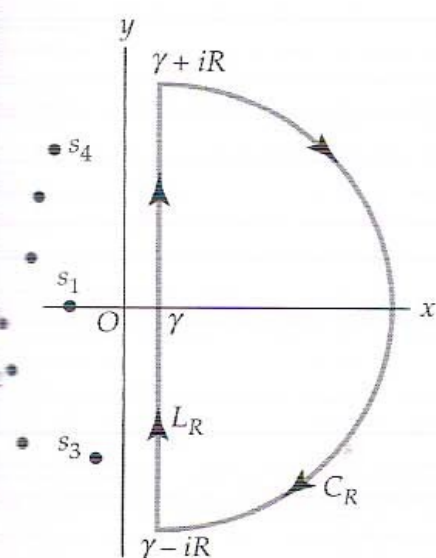



Figura 6.7.5 Contorno para a integral de inversão (7), para $t < 0$

Este resultado está implícito na prova do Teorema 6.7.4. Notamos de (15) que a conclusão $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds = 0$ *não é válida* para $t < 0$. No entanto, se, para $t < 0$, escolhermos o contorno à direita de $x = \gamma$, como mostrado na Figura 6.7.5, temos $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds = 0$, que é consistente com (16). Usaremos esses resultados no próximo exemplo.

---

**EXEMPLO 3 Transformada Inversa de Laplace**

Calculemos $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}\right\}$, $\text{Re}(s) > 3$.

**Solução** Antes de calcularmos os resíduos nos polos simples $s = 1$ e $s = 3$, notemos, depois de combinar as duas funções exponenciais e substituir o símbolo $t$ por $t - 2$, que (16) fornece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{s(t-2)}}{(s-1)(s-3)}ds = \begin{cases} f(t), & t-2>0 \\ 0, & t-2<0. \end{cases} \tag{17}$$

Agora, de (17), (9) e (1) da Seção 6.5, temos

$$\begin{aligned} f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}\right\} &= \text{Res}\left(e^{st}\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}, 1\right) + \text{Res}\left(e^{st}\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}, 3\right) \\ &= \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{e^{s(t-2)}}{(s-1)(s-3)} + \lim_{s\to 3}(s-3)\frac{e^{s(t-2)}}{(s-1)(s-3)} \\ &= -\frac{1}{2}e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{3(t-2)}. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{3(t-2)}, & t > 2 \\ 0, & t < 2. \end{cases} \tag{18}$$

❑

No estudo da transformada de Laplace, a **função degrau unitário**

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

se mostra extremamente útil quando trabalhamos com funções contínuas por partes. A função descontínua em (18) pode ser escrita como

$$f(t) = -\tfrac{1}{2}e^{t-2}\mathscr{U}(t-2) + \tfrac{1}{2}e^{3(t-2)}\mathscr{U}(t-2).$$

**Transformada de Fourier** Suponhamos, agora, que $f(x)$ seja uma função real definida no intervalo $(-\infty, \infty)$. Outro importante par de transformadas é o composto pela **transformada de Fourier**

$$\mathscr{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = F(\alpha) \tag{19}$$

e a **transformada inversa de Fourier**

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = f(x). \tag{20}$$

Comparando (19) e (20) com (2) e (3), vemos que o núcleo da transformada de Fourier é $K(\alpha, x) = e^{i\alpha x}$ e que o núcleo da transformada inversa é $H(\alpha, x) = e^{-i\alpha x}/2\pi$. Em (19) e (20) assumimos que $\alpha$ é uma variável real. Observamos que, ao contrário de (7), a transformada inversa (20) não é uma integral de contorno.

EXEMPLO 4 **Transformada de Fourier**

Determinemos a transformada de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$.

**Solução** O gráfico de $f$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{x}, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}, \qquad (21)$$

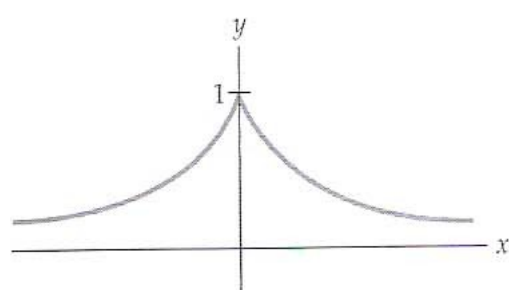



**Figura 6.7.6** Gráfico de $f$ no Exemplo 4

é dado na Figura 6.7.6. Da forma expandida de $f$ em (21) e de (19) obtemos a transformada de Fourier de $f$ como

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{i\alpha x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{i\alpha x} dx = I_1 + I_2. \qquad (22)$$

Iniciaremos pelo cálculo da integral imprópria $I_2$. Uma das diferentes maneiras de proceder consiste em escrever

$$I_2 = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-x(1-\alpha i)} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-x(1-\alpha i)}}{\alpha i - 1}\Bigg|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-b(1-\alpha i)} - 1}{\alpha i - 1}$$
$$= \frac{1}{\alpha i - 1} \lim_{b\to\infty} \left[e^{-b} \cos b\alpha + ie^{-b} \operatorname{sen} b\alpha - 1\right] = \frac{1}{1 - \alpha i}.$$

Aqui, usamos $\lim_{b\to\infty} e^{-b} \cos b\alpha = 0$ e $\lim_{b\to\infty} e^{-b} \operatorname{sen} b\alpha = 0$, para $b > 0$.

A integral $I_1$ pode ser calculada da mesma forma:

$$I_1 = \frac{1}{1 + \alpha i}.$$

Somando $I_1$ e $I_2$, obtemos o valor da transformada de Fourier de (22):

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - \alpha i} + \frac{1}{1 + \alpha i} \quad \text{ou} \quad F(\alpha) = \frac{2}{1 + \alpha^2}.$$

❑

EXEMPLO 5 **Transformada Inversa de Fourier**

Determinemos a transformada de Fourier de $F(\alpha) = \dfrac{2}{1 + \alpha^2}$.

**Solução** O objetivo é recuperar a função $f$ do Exemplo 4 por meio da transformada inversa (20):

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \alpha^2} e^{-i\alpha x}\, d\alpha = f(x). \qquad (23)$$

Para calcular (23), tomemos $z$ como uma variável complexa e introduzamos a integral de contorno $\oint_C \frac{1}{\pi(1 + z^2)} e^{-izx} dz$. Notemos que o integrando tem polos simples em $z = \pm i$. De aqui em diante, o procedimento a ser usado é basicamente o mesmo empregado na seção anterior para calcular integrais trigonométricas pela teoria de resíduos. O contorno $C$ mostrado na Figura 6.7.7 circunda o polo simples $z = i$ que ocorre no semiplano superior; o contorno consiste no intervalo $[-R, R]$ no eixo real e no contorno semicircular $C_R$, onde $R > 1$. Formalmente, temos

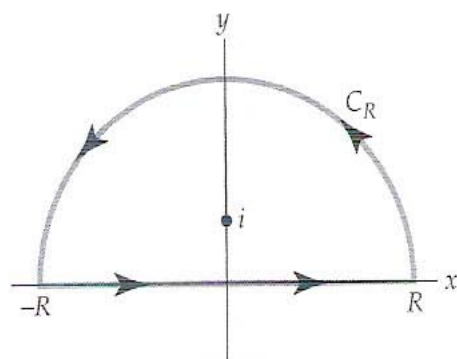



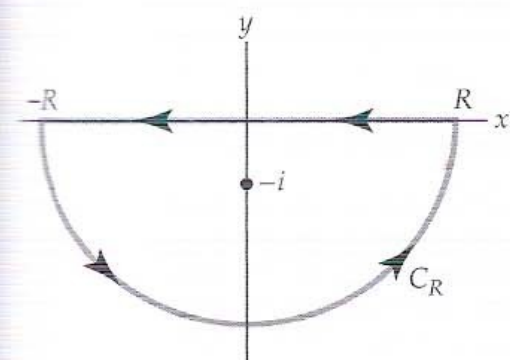
**Figura 6.7.7** Primeiro contorno usado no cálculo de (23)

$$\oint_C \frac{1}{\pi(1 + z^2)} e^{-izx} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\pi(1 + z^2)} e^{-izx}, i\right) = e^{x}. \qquad (24)$$

Obviamente, o resultado de (24) não é a função $f$ com que iniciamos o Exemplo 4. Uma análise detalhada revelará que a integral de contorno ao longo de $C_R$ tende a zero quando $R \to \infty$ apenas se assumirmos que $x < 0$. Em outras palavras, a resposta em (24) é, na verdade, $e^{x}$, $x < 0$.

Se considerarmos $\oint_C \frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-izx} dz$, onde $C$ é o contorno na Figura 6.7.8, podemos mostrar que a integral co longo de $C_R$ tende a zero quando $R \to \infty$ se assumirmos que $x$ é positivo. Ou seja,

$$\oint_C \frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-izx} dz = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-izx},\ -i\right) = e^{-x},\quad x > 0. \tag{25}$$

**Figura 6.7.8** Segundo contorno usado no cálculo de (23)

Notemos o sinal menos adicional que aparece na frente do fator $2\pi i$ no lado direito de (25). Este sinal advém do fato de que, em $C$ na Figura 6.7.8, $\oint_C = \int_{C_R} + \int_R^{-R} = \int_{C_R} - \int_{-R}^{R} =$ $2\pi i\ \operatorname{Res}(z=-i)$. Quando $R \to \infty$, $\int_{C_R} \to 0$ se $x > 0$; então, $-\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} = 2\pi i\ \operatorname{Res}(z=-i)$ ou $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} = -2\pi i\ \operatorname{Res}(z=-i)$. Combinando (23) e (24), obtemos

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+\alpha^2} e^{-i\alpha x}\, d\alpha = \begin{cases} e^{x}, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

que reproduz (21). Notemos que quando $x = 0$ em (23), a integração convencional dá o valor 1, que é $f(0)$ em (21). ❑

## Observações

($i$) As condições que exigem que a função $f$ seja contínua por partes e de ordem exponencial são *suficientes*, mas não *necessárias*, para a existência de $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Por exemplo, a função $f(t) = t^{-1/2}$ não é contínua por partes em $[0, \infty)$ (por quê?); mesmo assim, $\mathscr{L}\{t^{-1/2}\}$ existe.

($ii$) Assumimos que $F(s)$ tem um número finito de polos no plano complexo. Em geral, isso é verdadeiro quando $F(s)$ advém da solução de uma equação diferencial *ordinária*. Na solução de problemas práticos que envolvem uma equação diferencial *parcial* não é incomum obter uma função $F(s)$ com um número infinito de polos. Embora a prova do Teorema 6.7.4 não seja válida quando $F(s)$ tem um número infinito de polos no semiplano esquerdo $\operatorname{Re}(s) < 0$, o resultado indicado pelo teorema é válido. Neste caso, o valor da integral é uma série infinita, obtida da soma infinita dos resíduos.

($iii$) Embora tenhamos ilustrado o uso de (1) quando as singularidades de $F(s)$ são polos, o principal uso de (1) é no cálculo de transformadas inversas de funções mais complicadas, como $F(s) = (s^2 + \alpha^2)^{1/2}$.

($iv$) Não mencionamos condições para a existência da transformada de Fourier (19) de uma função $f$. Estas condições são consideravelmente mais exigentes que as associadas à existência da transformada de Laplace. Por exemplo, $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$, mas $\mathscr{F}\{1\}$ não existe. Para mais informações a respeito de teoria e aplicações da transformada de Fourier, sugerimos a consulta de livros sobre teoria de Fourier ou de matemática avançada para engenharia.*

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 6.7 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–4, determine a transformada de Laplace da função dada. Determine a condição sobre $s$ que é suficiente para garantir a existência de $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

**1.** $f(t) = e^{5t}$

**2.** $f(t) = e^{(-2+3i)t}$

**3.** $f(t) = \operatorname{sen} 3t$

**4.** $f(t) = e^{t} \cos t$

**5.** Generalize o resultado no Problema 1 e determine a condição sobre $s$ que é suficiente para garantir a existência de $\mathscr{L}\{e^{kt}\}$, onde $k$ é uma constante real.

**6.** Generalize o resultado no Problema 2 e determine a condição sobre $s$ que é suficiente para garantir a existência de $\mathscr{L}\{e^{kt}\}$, onde $k$ é uma constante real.

---

*Por exemplo, *Matemática Avançada para Engenharia*, 3ª Edição, de Dennis G. Zill e Michael R. Cullen, Bookman, Porto Alegre – RS, 2009.

**7.** A transformada de Laplace é uma transformação linear, ou seja, para constantes $\alpha$ e $\beta$,

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\}$$

sempre que as duas transformadas existirem. Use esta definição de linearidade e a das funções hiperbólicas

$$\operatorname{senh} kt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}, \quad \cosh kt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2},$$

sendo $k$ uma constante real, e determine $\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\}$ e $\mathscr{L}\{\cosh kt\}$

**8.** Determine a condição sobre $s$ que é suficiente para garantir a existência das transformadas de Laplace no Problema 7.

Nos Problemas 9-18, use a teoria de resíduos para calcular a transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ para a função $F(s)$ dada.

**9.** $\dfrac{1}{s^6}$

**10.** $\dfrac{1}{(s-5)^3}$

**11.** $\dfrac{1}{s^2+4}$

**12.** $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

**13.** $\dfrac{1}{s^2-3}$

**14.** $\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}$

**15.** $\dfrac{e^{-as}}{s^2-5s+6}$, $a > 0$

**16.** $\dfrac{e^{-as}}{(s-a)^2}$, $a > 0$

**17.** $\dfrac{1}{s^4-1}$

**18.** $\dfrac{s+4}{s^2+6s+11}$

Nos Problemas 19 e 20, determine a transformada de Fourier (19) da função dada.

**19.** $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

**20.** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

**21.** Use a transformada inversa de Fourier (20) e a teoria de resíduos para recuperar a função $f$ do Problema 19.

**22.** A transformada de Fourier de uma função $f$ é $F(\alpha) = \dfrac{1}{(1-i\alpha)^2}$. Use a transformada inversa de Fourier (20) e a teoria de resíduos para determinar a função $f$.

## Foco em Conceitos

**23.** Para o resultado obtido no Problema 8, determine valores de $\gamma$ que possam ser usados na transformada inversa (7).

**24.** (a) Se $F(\alpha)$ for a transformada de Fourier de $f(x)$, a função $|F(\alpha)|$ é denominada **amplitude espectral** ou **espectro** de $f$. Determine a amplitude espectral de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Desenhe o gráfico de $|F(\alpha)|$.

(b) Faça uma pesquisa de literatura e determine uma aplicação do conceito de amplitude espectral de uma função.

**25.** Determine a transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0 \text{ or } x > 1 \end{cases}$. Como a transformada inversa de Fourier em (20) pode ser calculada?

## Projetos

**26.** Na aplicação da transformada de Laplace a problemas que envolvem equações diferenciais parciais é comum a ocorrência de inversas como

$$f(x,t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{senh} xs}{(s^2+1)\operatorname{senh} s}\right\}.$$

Investigue como (8) e (9) podem ser usadas para determinar $f(x, t)$.

## Questionário de Revisão do Capítulo 6

*(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–20, responda verdadeiro ou falso. Se a afirmação for falsa, justifique sua resposta explicando por que é falsa ou dê um contraexemplo; se a afirmação for verdadeira, justifique sua resposta provando a afirmação ou cite um resultado pertinente do capítulo.

**1.** Para a sequência $\{z_n\}$, onde $z_n = i^n = x_n + iy_n$, $\text{Re}(z_n) = x_n = \cos(n\pi/2)$ e $\text{Im}(z_n) = y_n = \text{sen}(n\pi/2)$

**2.** A sequência $\{i^n\}$ converge.

**3.** $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{\pi}}\right)^n = 0$.

**4.** $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ se e somente se $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 0$.

**5.** A série de potências $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{z^k}{k^2}$ converge absolutamente em todo ponto em seu círculo de convergência.

**6.** Existe uma série de potências centrada em $z_0 = 1 + i$ que converge em $z = 25 - 4i$ e diverge em $z = 15 + 21i$.

**7.** Uma função $f$ é analítica em um ponto $z_0$ se $f$ puder ser expandida em uma série de potências convergente centrada em $z_0$.

**8.** Suponha que uma função $f$ tenha uma representação em série de Taylor com círculo de convergência $|z - z_0| = R$, $R > 0$. Então, $f$ é analítica em todos os pontos no círculo de convergência.

**9.** Suponha que uma função $f$ tenha uma representação em série de Taylor em $z_0$. Então, $f$ é analítica em todos os pontos no círculo de convergência $|z - z_0| = R$, $R > 0$, e $f$ não é analítica em todos os pontos fora de $|z - z_0| = R$.

**10.** Se a função $f$ for inteira, o raio de convergência de uma expansão de $f$ em série de Taylor centrada em $z_0 = 1 - i$ é necessariamente $R = \infty$.

**11.** As duas séries de potências

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

e

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} - \frac{z-1}{2^2} + \frac{(z-1)^2}{2^3} - \frac{(z-1)^3}{2^4} + \cdots$$

convergem em $z = 0{,}86 - 0{,}52i$.

**12.** Se a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tiver raio de convergência $R$, a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k}$ tem raio de convergência $\sqrt{R}$.

**13.** As séries de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ têm o mesmo raio de convergência $R$.

**14.** O ramo principal $f_1(z)$ do logaritmo complexo não possui uma expansão de Maclaurin.

**15.** Se $f$ for analítica em toda uma vizinhança deletada de $z_0$ e se $z_0$ for um polo de ordem $n$, $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^n f(z) \neq 0$.

**16.** Uma singularidade de uma função racional ou é removível ou é um polo.

**17.** A função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2iaz - 1}$, $a > 1$, tem dois polos simples no interior da circunferência unitária $|z| = 1$.

**18.** $z = 0$ é um polo simples de $f(z) = -\dfrac{1}{z} + \cot z$.

**19.** Se $z_0$ for um polo simples de $f$, é possível que $\text{Res}(f(z), z_0) = 0$.

**20.** A parte principal de uma série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{1 - \cos z}$ válida para $0 < |z| < 2\pi$ contém exatamente dois termos não nulos.

Nos Problemas 21–40, tente preencher as lacunas sem consultar o texto.

**21.** A sequência $\left\{\dfrac{2in}{n+i} - \dfrac{(9-12i)n+2}{3n+1+7i}\right\}$ converge para _______.

**22.** A série $i + 2i + 3i + 4i + \ldots$ diverge, pois _______.

**23.** $5 - i - \dfrac{1}{5} + \dfrac{i}{25} + \dfrac{1}{125} - \cdots =$ _______.

**24.** A igualdade $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^k = \frac{1}{2}(z+1)$ advém de _______ e é válida na região do plano complexo definida por _______.

**25.** A série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}(5+12i)^k(z-2-i)^k$converge absolutamente no interior do círculo _______.

**26.** A série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{4^k}{2k+5}(z-2+3i)^{2k}$ diverge para $|z-2+3i|>$ _______.

**27.** Se a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, $a_k\neq 0$, tiver raio de convergência $R>0$, a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{a_k}$ tem raio de convergência _______.

**28.** Sem determinar a expansão propriamente dita, a série de Taylor de $f(z)=\csc z$ centrada em $z_0=3+2i$ tem raio de convergência $R=$ _______.

**29.** Use a primeira série no Problema 11 para obter os três primeiros termos de uma série de Taylor de $f(z)=\dfrac{z+1}{6+z}$ centrada em $z_0=-1$: _______. O raio de convergência da série é $R=$ _______.

**30.** Uma série de potências para $f(z)=e^z$ centrada em $-5i$ é dada por $e^z=\sum_{k=0}^{\infty}$ ___ $(z+5i)^k$.

**31.** $z=-1$ é uma singularidade isolada de $f(z)=\dfrac{(z+1)^3-2(z+1)^2+4(z+1)+7}{(z+1)^2}$. A série de Laurent válida para $0<|z+1|<\infty$ é _______.

**32.** A função analítica $f(z)=\frac{1}{6}z^9-z^3+\text{sen}\,z^3$ tem um zero de ordem _______ em $z=0$.

**33.** Os zeros da função $f(z)=\text{sen}\,\pi\left(\dfrac{1}{z}-1\right)$ são _______ e são de ordem _______.

**34.** Se $f(z)$ tiver um zero de ordem 5 em $z_0$, a derivada de mais baixa ordem que não é zero é $f^{(___)}(z_0)$.

**35.** A função $f(z)=(z-\text{sen}\,z)/z^3$ tem uma singularidade removível em $z=0$. O valor de $f(0)$ é definido como _______.

**36.** Se $f(z)=z^3e^{-1/z^2}$, $\text{Res}(f(z),0)=$ _______.

**37.** Seja $z=\pi$ um polo simples de $f(z)=\cot z$. Usando uma fórmula de resíduos apropriada, $\text{Res}(f(z),\pi)=$ _______, de modo que a parte principal da série de Laurent em torno de $z=\pi$ é _______ e a série de Laurent é válida para $0<|z-\pi|<$ _______.

**38.** Em $|z|=1$, a integral de contorno $\oint_C\dfrac{\cos z}{z^2-(2+\pi)z+2\pi}\,dz$ é igual a _______ em $|z|=3$, o valor da integral é _______ e em $|z|=4$, _______.

**39.** Em $|z|=1$,

(a) $\oint_C\dfrac{z^2+2iz+1-i}{e^{2z}-1}\,dz=$ _______,

(b) $\oint_C\dfrac{\text{sen}\,z}{z^n}\,dz=$ _______, $n=0,1,2,\ldots$

**40.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta}\,d\theta=$ _______.

Capítulo

# 7

# Transformações Conformes

## Índice do Capítulo



Fluxo bidimensional de um fluido ideal (Figura 7.5.12).

**Introdução** Na Seção 4.5 vimos que transformações analíticas podem ser usadas para resolver certos tipos de problemas de valores de contorno. Neste capítulo apresentaremos o conceito fundamental de transformação conforme e veremos como transformações conformes podem ser usadas para resolver uma gama maior de problemas de valores de contorno. Os métodos que apresentaremos serão aplicados a problemas de fluxo de calor, eletromagnetismo e fluxo fluido.

## 7.1 Transformação Conforme

Na Seção 2.3 vimos que a ação de uma transformação linear não constante sobre pontos no plano complexo pode ser de rotação, dilatação ou translação. Consequentemente, o ângulo entre quaisquer dois arcos que se cruzem no plano $z$ é igual ao ângulo entre as imagens dos arcos no plano $w$ sob uma transformação linear. Transformações complexas que têm esta propriedade de preservar ângulos são denominadas **transformações conformes**. Nesta seção apresentaremos uma definição formal de transformações conformes e as discutiremos. Mostraremos que qualquer função complexa analítica é conforme em pontos onde sua derivada é não nula. Consequentemente, todas as funções elementares estudadas no Capítulo 4 são conformes em algum domínio $D$. Mais adiante, no capítulo, veremos que transformações conformes têm importantes aplicações em problemas de valores de contorno que envolvem a equação de Laplace.

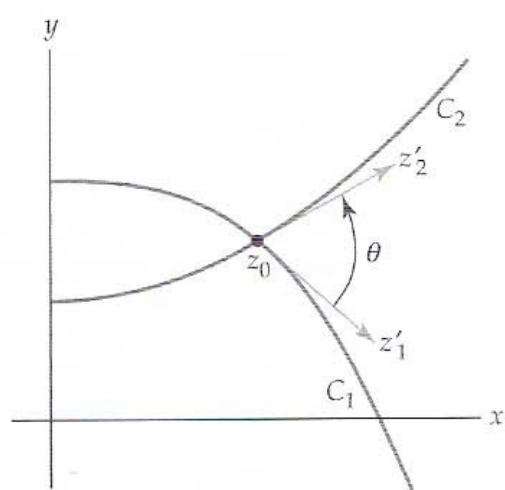



Figura 7.1.1 Ângulo $\theta$ entre $C_1$ e $C_2$

**Transformação Conforme** Seja $w = f(z)$ uma transformação complexa definida em um domínio $D$. A transformação é denominada conforme em um ponto $z_0$ em $D$ se "preservar o ângulo" entre duas curvas quaisquer que se cruzem em $z_0$. Para tornar este conceito mais claro, sejam $C_1$ e $C_2$ curvas suaves em $D$ que se cruzam em $z_0$ e cujas orientações foram fixadas como descrito na Seção 5.1. Sejam $z_1(t)$ e $z_2(t)$ parametrizações de $C_1$ e $C_2$, respectivamente, tais que $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ e cujas orientações correspondam a valores crescentes do parâmetro $t$. Como $C_1$ e $C_2$ são suaves, os vetores tangentes $z'_1 = z'_1(t_0)$ e $z'_2 = z'_2(t_0)$ são ambos não nulos. Definimos o **ângulo** entre $C_1$ e $C_2$ como o ângulo $\theta$ no intervalo $[0, \pi]$ entre os vetores tangentes $z'_1$ e $z'_2$ (Figura 7.1.1). Agora, suponhamos que sob a transformação complexa $w = f(z)$ as curvas $C_1$ e $C_2$ no plano $z$ sejam mapeadas nas curvas $C'_1$ e $C'_2$ no plano $w$, respectivamente. Como $C_1$ e $C_2$ se cruzam em $z_0$, $C'_1$ e $C'_2$ devem se cruzar em $f(z_0)$. Caso $C'_1$ e $C'_2$ sejam suaves, o ângulo entre $C'_1$ e $C'_2$ em $f(z_0)$ é também definido como o ângulo $\phi$ no intervalo $[0, \pi]$ entre os vetores tangentes $w'_1$ e $w'_2$. Dizemos que os ângulos $\theta$ e $\phi$ são **iguais em magnitude** se $\theta = \phi$.

No plano $z$, o vetor $z'_1$, cujo ponto inicial é $z_0$, pode ser girado de um ângulo $\theta$ até coincidir com o vetor $z'_2$. Esta rotação pode ser no sentido trigonométrico ou no sentido horário. De modo similar, no plano $w$ o vetor $w'_1$, cujo ponto inicial é $f(z_0)$, pode ser girado de um ângulo $\phi$ no sentido trigonométrico ou no sentido horário até coincidir com o vetor $w'_2$. Se a rotação no plano $z$ tiver o mesmo sentido da rotação no plano $w$, dizemos que os ângulos $\theta$ e $\phi$ são **iguais em sentido**. O próximo exemplo ilustra esses conceitos.

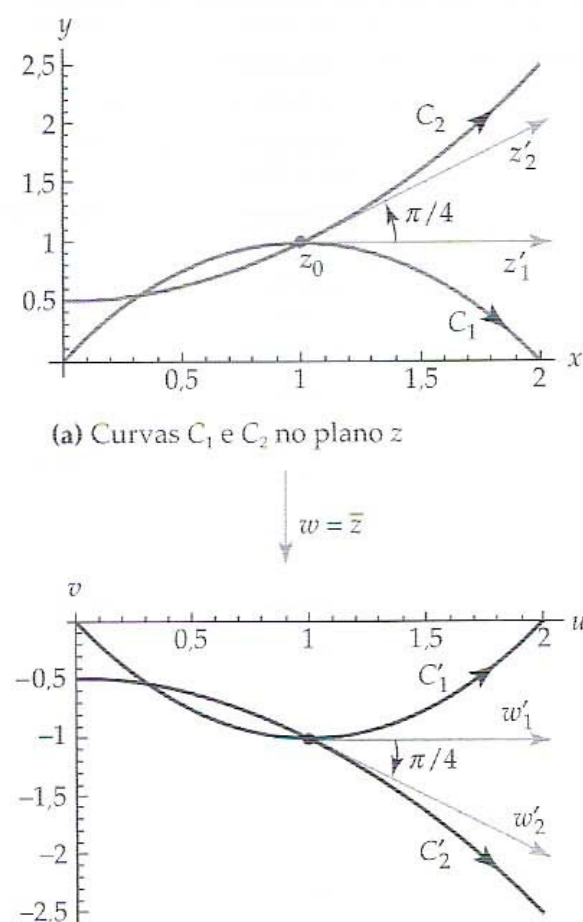



Figura 7.1.2 Figura para o Exemplo 1

**EXEMPLO 1 Magnitude e Sentido de Ângulos**

As curvas suaves $C_1$ e $C_2$ mostradas na Figura 7.1.2(a) são dadas por $z_1(t) = t + (2t - t^2)i$ e $z_2(t) = t + \frac{1}{2}(t^2 + 1)i$, $0 \le t \le 2$, respectivamente. Essas curvas se cruzam no ponto $z_0 = z_1(1) = z_2(1) = 1 + i$. Os vetores tangentes a $z_0$ são $z'_1 = z'_1(1) = 1$ e $z'_2 = z'_2(1) = 1 + i$. Além disso, da Figura 7.1.2(a) vemos que o ângulo entre $C_1$ e $C_2$ em $z_0$ é $\pi/4$. Sob a transformação complexa $w = \bar{z}$ as imagens de $C_1$ e $C_2$ são, respectivamente, as curvas $C'_1$ e $C'_2$ mostradas na Figura 7.1.2(b). As curvas imagens são parametrizadas por $w_1(t) = t - (2t - t^2)i$ e $w_2(t) = t - \frac{1}{2}(t^2 + 1)i$, $0 \le t \le 2$, e se cruzam no ponto $w_0 = f(z_0) = 1 - i$. Em $w_0$, os vetores tangentes a $C'_1$ e $C'_2$ são $w'_1 = w'_1(1) = 1$ e $w'_2 = w'_2(1) = 1 - i$, respectivamente. A inspeção da Figura 7.1.2(b) indica que o ângulo entre $C'_1$ e $C'_2$ em $w_0$ é $\phi = \pi/4$. Portanto, os ângulos $\theta$ e $\phi$ são iguais em magnitude. No entanto, como $z'_1$ deve ser girado de $\pi/4$ no sentido *trigonométrico* para coincidir com $z'_2$, e $w'_1$ deve ser girado de $\pi/4$ no sentido *horário* para coincidir com $w'_2$, concluímos que $\theta$ e $\phi$ não são iguais em sentido. ❑

Uma vez estabelecida a nomenclatura para magnitude e sentido de um ângulo, estamos em condições de apresentar uma definição formal de uma transformação conforme.

**Definição 7.1.1 Transformação Conforme**

Seja $w = f(z)$ uma transformação complexa definida em um domínio $D$ e seja $z_0$ um ponto em $D$. Dizemos que $w = f(z)$ é **conforme** em $z_0$ se, para todo par $C_1$ e $C_2$ de curvas suaves orientadas em $D$ que se cruzem em $z_0$, o ângulo entre $C_1$ e $C_2$ em $z_0$ for igual ao ângulo entre as correspondentes curvas imagens $C_1'$ e $C_2'$ em $f(z_0)$, tanto em magnitude como em sentido.

Usaremos, também, o termo **transformação conforme** para nos referirmos a uma transformação complexa $w = f(z)$ que é conforme em $z_0$. Além disso, se $w = f(z)$ mapear um domínio $D$ em um domínio $D'$ e se $w = f(z)$ for conforme em todos os pontos em $D$, dizemos que $w = f(z)$ é uma transformação conforme de $D$ em $D'$. Da Seção 2.3 deve ficar claro que se $f(z) = az + b$ for uma função linear, com $a \neq 0$, então $w = f(z)$ é conforme em todos os pontos no plano complexo. No Exemplo 1, mostramos que $w = \bar{z}$ não é uma transformação conforme no ponto $z_0 = 1 + i$, pois os ângulos $\theta$ e $\phi$ são iguais em magnitude, mas não em sentido.

**Ângulos entre Curvas** A Definição 7.1.1 raramente é usada para mostrar que uma transformação complexa é conforme. Provaremos no Teorema 7.1.1 que uma função analítica $f$ é uma transformação conforme em $z$ sempre que $f'(z) \neq 0$. Para provar este resultado precisamos de um procedimento para determinar o ângulo (em magnitude e em sentido) entre duas curvas suaves no plano complexo. Para nossos propósitos, a forma mais eficiente de fazer isso consiste em usar o argumento de um número complexo.

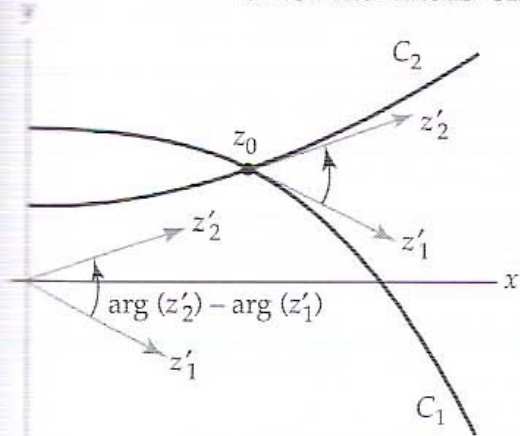



Figura 7.1.3 Ângulo entre $C_1$ e $C_2$

Adotemos, mais uma vez, a notação da Figura 7.1.1, onde $C_1$ e $C_2$ são curvas suaves parametrizadas por $z_1(t)$ e $z_2(t)$, respectivamente, que se cruzam em $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$. A exigência para que $C_1$ seja suave garante que o vetor tangente a $C_1$ em $z_0$, dado por $z_1' = z_1'(t_0)$, seja não nulo e, portanto, $\arg(z_1')$ seja definido e represente o ângulo entre o vetor posição $z_1'$ e o eixo $x$ positivo. De modo similar, o vetor tangente a $C_2$ em $z_0$, dado por $z_2' = z_2'(t_0)$, é não nulo e $\arg(z_2')$ representa o ângulo entre o vetor posição $z_2'$ e o eixo $x$ positivo. A inspeção da Figura 7.1.3 mostra que o ângulo $\theta$ entre $C_1$ e $C_2$ em $z_0$ é o valor de

$$\arg(z_2') - \arg(z_1') \tag{1}$$

no intervalo $[0, \pi]$, desde que possamos girar $z_1'$ do ângulo $\theta$ em torno de 0 e no sentido trigonométrico para fazê-lo coincidir com $z_2'$. Caso seja necessária rotação no sentido horário, $-\theta$ será o valor de (1) no intervalo $(-\pi, 0)$. Em qualquer dos casos, vemos que (1) fornece tanto a magnitude como o sentido do ângulo entre $C_1$ e $C_2$ em $z_0$. Como exemplo, consideremos as curvas $C_1$, $C_2$ e suas imagens sob a transformação complexa $w = \bar{z}$ do Exemplo 1. Notemos que o valor único de

$$\arg(z_2') - \arg(z_1') = \arg(1 + i) - \arg(1) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, que ocorre no intervalo $[0, \pi]$ é $\pi/4$. Portanto, o ângulo entre $C_1$ e $C_2$ é $\theta = \pi/4$ e a rotação de $z_1'$ até $z_2'$ se dá no sentido trigonométrico. Por sua vez,

$$\arg(w_2') - \arg(w_2') = \arg(1 - i) - \arg(1) = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, não tem valor entre $[0, \pi]$, mas tem o único valor $-\pi/4$ no intervalo $(-\pi, 0)$. Portanto, o ângulo entre $C_1'$ e $C_2'$ é $\phi = \pi/4$ e a rotação de $w_1'$ até $w_2'$ se dá no sentido horário.

**Funções Analíticas** Agora, usaremos (1) para provar o seguinte teorema:

**Teorema 7.1.1 Transformação Conforme**

Se $f$ for uma função analítica em um domínio $D$ que contém $z_0$ e se $f'(z_0) \neq 0$, então $w = f(z)$ é uma transformação conforme em $z_0$.

**Prova** Suponhamos que $f$ seja analítica em um domínio $D$ que contém $z_0$ e que $f'(z_0) \neq 0$. Sejam $C_1$ e $C_2$ duas curvas suaves em $D$ parametrizadas por $z_1(t)$ e $z_2(t)$, respectivamente, com $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$. Além disso, assumamos que $w = f(z)$ mapeia as curvas $C_1$ e $C_2$ nas curvas $C_1'$ e $C_2'$, respectivamente. Desejamos mostrar que o ângulo $\theta$ entre $C_1$ e $C_2$ em $z_0$ é igual ao ângulo $\phi$ entre $C_1'$ e $C_2'$ em $f(z_0)$, tanto em magnitude como em sentido. Podemos admitir, renumerando $C_1$ e $C_2$ caso seja necessário, que $z_1' = z_1'(t_0)$ possa ser girado de um ângulo $\theta$ em torno de 0 e no sentido trigonométrico para coincidir com $z_2' = z_2'(t_0)$. Segundo (1), o ângulo $\theta$ é o único valor de $\arg(z_2') - \arg(z_1')$ no intervalo $[0, \pi]$. De (11) da Seção 2.2, $C_1'$ e $C_2'$ são parametrizadas, respectivamente, por $w_1(t) = f(z_1(t))$ e $w_2(t) = f(z_2(t))$. Para calcular os vetores $w_1'$ e $w_2'$ tangentes a $C_1'$ e $C_2'$ em $f(z_0) = f(z_1(t_0)) = f(z_2(t_0))$, usamos a regra da cadeia

$$w_1' = w_1'(t_0) = f'(z_1(t_0)) \cdot z_1'(t_0) = f'(z_0) \cdot z_1',$$

$$w_2' = w_2'(t_0) = f'(z_2(t_0)) \cdot z_2'(t_0) = f'(z_0) \cdot z_2'.$$

Como $C_1$ e $C_2$ são curvas suaves, $z_1'$ e $z_2'$ são não nulos. Adicionalmente, segundo nossas hipóteses, $f'(z_0) \neq 0$. Por conseguinte, $w_1'$ e $w_2'$ são não nulos e o ângulo $\phi$ entre $C_1'$ e $C_2'$ em $f(z_0)$ é o valor de

$$\arg(w_2') - \arg(w_1') = \arg(f'(z_0) \cdot z_2') - \arg(f'(z_0) \cdot z_1').$$

Aplicando (8) da Seção 1.3 duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \arg(f'(z_0) \cdot z_2') - \arg(f'(z_0) \cdot z_1') &= \arg(f'(z_0)) + \arg(z_2') - [\arg(f'(z_0)) + \arg(z_1')] \\ &= \arg(z_2') - \arg(z_1'). \end{aligned}$$

Esta expressão tem um único valor em $[0, \pi]$, ou seja, $\theta$. Portanto, $\theta = \phi$, em magnitude e sentido; consequentemente, $w = f(z)$ é uma transformação conforme em $z_0$. ❑

Com o Teorema 7.1.1 torna-se relativamente fácil determinar se uma função analítica é uma transformação conforme.

---

EXEMPLO 2 **Transformação Conforme**

(**a**) Segundo o Teorema 7.1.1, a função inteira $f(z) = e^z$ é conforme em todos os pontos no plano complexo, pois $f'(z) = e^z \neq 0$ para todo $z$ em $\mathbf{C}$.
(**b**) Segundo o Teorema 7.1.1, a função inteira $g(z) = z^2$ é conforme se $z \neq 0$, pois $g'(z) = 2z \neq 0$ quando $z \neq 0$. ❑

Pontos Críticos Em geral, se uma função complexa $f$ for analítica em um ponto $z_0$ e se $f'(z_0) = 0$, $z_0$ é denominado **ponto crítico** de $f$. Embora não seja uma implicação do Teorema 7.1.1, funções analíticas não são conformes em pontos críticos. Mais especificamente, podemos mostrar que ocorre uma dilatação de ângulos em um ponto crítico.

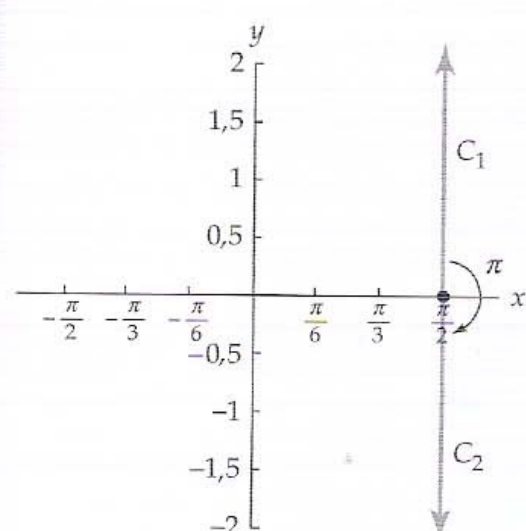
**Teorema 7.1.2 Dilatação de Ângulo em um Ponto Crítico**

Seja $f$ analítica no ponto crítico $z_0$. Se $n > 1$ for um inteiro tal que $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ e $f^{n}(z_0) \neq 0$, o ângulo entre quaisquer duas curvas suaves que se cruzem em $z_0$ é aumentado de um fator $n$ por uma transformação complexa $w = f(z)$. Em particular, $w = f(z)$ não é uma transformação conforme em $z_0$.

Uma prova do Teorema 7.1.2 é delineada no Problema 22 do Conjunto de Exercícios 7.1.

---

EXEMPLO 3 **Transformações Conformes**

Determinemos todos os pontos em que a transformação $f(z) = \operatorname{sen} z$ é conforme.

(a) O ângulo entre os raios verticais no plano z é $\pi$

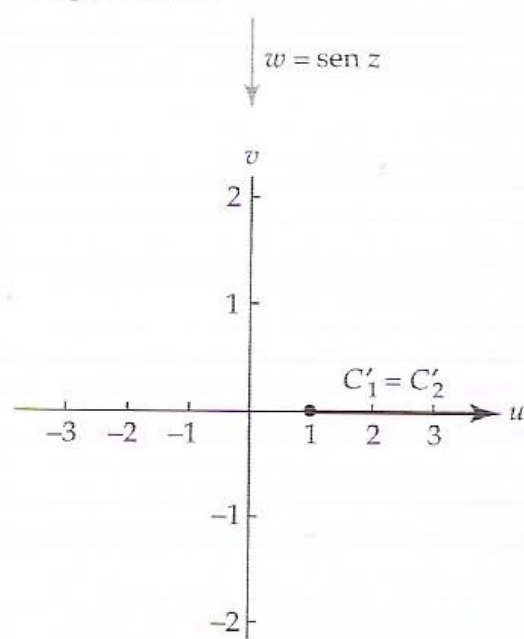
$w$ = sen $z$

(b) O ângulo entre as imagens dos raios em (a) é $2\pi$ ou 0

**Figura 7.1.4** Transformação $w$ = sen $z$

**Solução** A função $f(z)$ = sen $z$ é inteira e, da Seção 4.3, sabemos que $f'(z) = \cos z$. Em (21) da Seção 4.3 determinamos que $\cos z = 0$ se e somente se $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, de modo que cada um desses pontos é um ponto crítico de $f$. Segundo o Teorema 7.1.1, $w$ = sen $z$ é uma transformação conforme para todo $z \neq (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Além disso, $w$ = sen $z$ não é uma transformação conforme em $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Como $f''(z) = -$sen $z = \pm 1$ nos pontos críticos de $f$, o Teorema 7.1.2 indica que nesses pontos ângulos são dilatados por um fator 2. ❑

A dilatação de ângulo em um ponto crítico da transformação complexa $w$ = sen $z$ no Exemplo 3 pode ser vista diretamente. Por exemplo, consideremos o ponto crítico $z = \pi/2$. Sob $w$ = sen $z$, o raio vertical $C_1$ no plano $z$ dado por $z = \pi/2 + iy$, $y \geq 0$ e que emana de $z = \pi/2$ é mapeado no conjunto no plano $w$ dado por $w$ = sen $(\pi/2)\cosh y + i\cos(\pi/2)$senh $y$, $y \geq 0$. Como sen$(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi/2) = 0$, a imagem pode ser reescrita como $w = \cosh y$, $y \geq 0$. Em palavras, a imagem $C_1'$ é um raio no plano $w$ que emana de $w = 1$ e contém o ponto $w = 2$. Uma análise similar revela que a imagem $C_2'$ do raio vertical $C_2$ dado por $z = \pi/2 + iy$, $y \leq 0$ também é um raio que emana de $w = 1$ e contém o ponto $w = 2$. Ou seja, $C_1' = C_2'$. O ângulo entre os raios $C_1$ e $C_2$ no plano $z$ é $\pi$; o Teorema 7.1.2 implica que o ângulo entre suas imagens no plano $w$ é aumentado para $2\pi$ ou, equivalentemente, 0. Isso concorda com o resultado $C_1' = C_2'$ (Figura 7.1.4).

**Transformações Conformes com Uso de Tabelas** Na Seção 4.5 introduzimos um método para a solução de um tipo particular de problema de valor de contorno por meio de transformações complexas. Especificamente, vimos que um problema de Dirichlet em um domínio complicado $D$ pode ser resolvido com a determinação de uma transformação *analítica* que mapeie $D$ em um domínio mais simples $D'$, no qual o associado problema de Dirichlet já tenha sido resolvido. No fim deste capítulo veremos uma aplicação similar de transformações *conformes* para o caso de um tipo generalizado de problema de Dirichlet. Em tais aplicações o método que empregaremos para determinar uma solução em um domínio $D$ consiste em, primeiro, determinar uma transformação *conforme* que mapeie $D$ em um domínio mais simples $D'$ no qual o associado problema de Dirichlet tem uma solução. Uma importante ferramenta auxiliar para essa tarefa é a tabela de transformações conformes dada no Apêndice III.

As transformações no Apêndice III foram classificadas como transformações elementares (E-1 a E-9), transformações a semiplanos (H-1 a H-6), transformações a regiões circulares (C-1 a C-5) e transformações variadas (M-1 a M-10). Muitas propriedades de transformações que aparecem nesta tabela foram deduzidas nos Capítulos 2 e 4, enquanto outras serão deduzidas nas seções seguintes. Ao usar a tabela devemos ter em mente que em alguns casos a transformação desejada aparecerá como uma única entrada na tabela, enquanto em outros podem ser necessárias duas ou mais transformações sucessivas da tabela.

*Nota* ➡ Notemos, ainda, que as transformações no Apêndice III são em geral transformações conformes apenas dos interiores das regiões mostradas. Por exemplo, é aparente que a transformação complexa mostrada na Entrada E-4 não é conforme em $B = 0$. Como regra genérica, ao nos referirmos a uma transformação conforme de uma região $R$ em uma região $R'$ exigimos apenas que a transformação seja conforme em pontos no interior de $R$.

---

EXEMPLO 4 **Uso de uma Tabela de Transformações Conformes**

Usemos o Apêndice III para determinar uma transformação conforme que mapeie a fita horizontal infinita $0 \leq y \leq 2$, $-\infty < x < \infty$, no semiplano superior $v \geq 0$. Sob esta transformação, qual é a imagem do eixo $x$ negativo?

**Solução** A Entrada H-2 no Apêndice III fornece uma transformação de uma fita horizontal infinita no semiplano superior. Fazendo $a = 2$, obtemos a transformação desejada $w = e^{\pi z/2}$. De H-2 também vemos que os pontos marcados $D$ e $E = 0$ no eixo $x$ negativo no plano $z$ são mapeados nos pontos $D'$ e $E' = 1$ no eixo $u$ positivo no plano $w$. Observando a posição relativa desses pontos, concluímos que o eixo $x$ negativo

(a) Fita horizontal $0 \leq y \leq 2$  (b) Imagem da fita em (a)

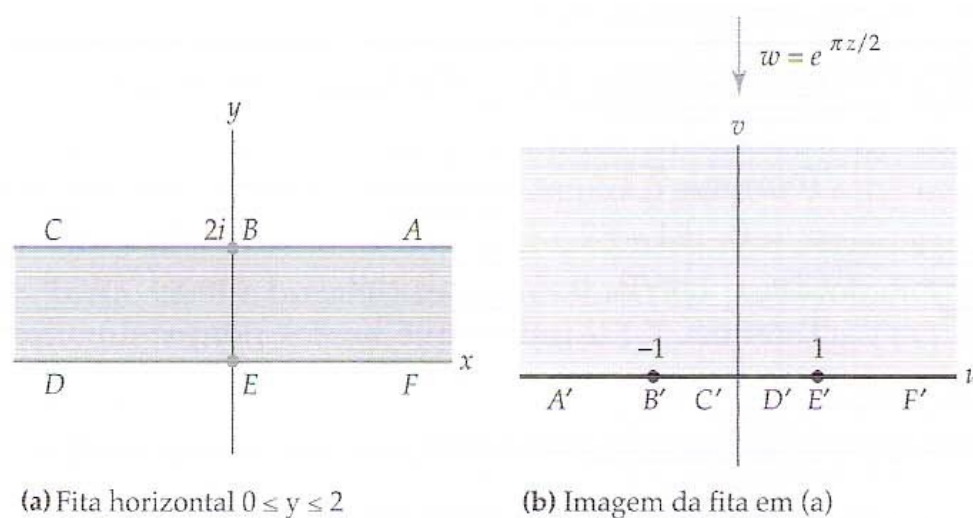



**Figura 7.1.5** Figura para o Exemplo 4

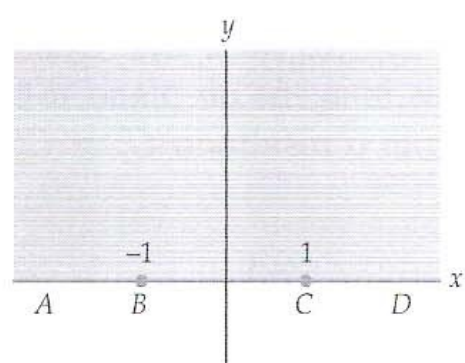
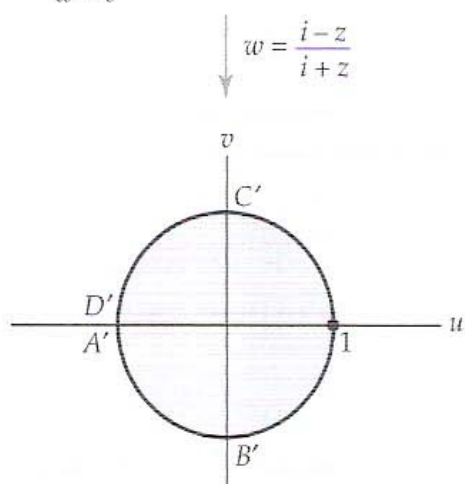
é mapeado por $w = e^{\pi z/2}$ no intervalo $(0,1]$ no eixo $u$ (Figura 7.1.5). Esta observação pode ser comprovada com o uso de parametrizações. ❑

(a) Imagem da fita $0 \leq y \leq 2$ sob $w = e^{\pi z/2}$

(b) Imagem do semiplano em (a) sob $w = \dfrac{i-z}{i+z}$

**Figura 7.1.6** Figura para o Exemplo 5

### EXEMPLO 5 Uso de uma Tabela de Transformações Conformes

Usemos o Apêndice III para determinar uma transformação conforme que mapeie a fita horizontal infinita $0 \leq y \leq 2$, $-\infty < x < \infty$, no disco unitário $|w| \leq 1$. Sob esta transformação, qual é a imagem do eixo $x$ negativo?

**Solução** No Apêndice III não existe uma entrada que mapeie uma fita horizontal infinita no disco unitário. Portanto, para construir uma transformação conforme que faça isso combinaremos duas transformações na tabela. No Exemplo 4 vimos que a fita horizontal infinita $0 \leq y \leq 2$, $-\infty < x < \infty$, é mapeada por $f(z) = e^{\pi z/2}$ no semiplano superior. Além disso, da Entrada C-4 vemos que o semiplano superior é mapeado no disco unitário por $g(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$. Consequentemente, a composição dessas duas funções

$$w = g(f(z)) = \frac{i - e^{\pi z/2}}{i + e^{\pi z/2}}$$

mapeia a fita $0 \leq y \leq 2$, $-\infty < x < \infty$, no disco unitário $|w| \leq 1$. Sob a primeira dessas transformações sucessivas o eixo real negativo é mapeado no intervalo $(0, 1]$ no eixo real, como observamos no Exemplo 4. A inspeção da Entrada C-4 (ou da Figura 7.1.6) revela que o intervalo de 0 a $C = 1$ é mapeado no arco circular de 1 a $C' = i$ na circunferência unitária $|w| = 1$. Portanto, concluímos que o eixo real negativo é mapeado por $w = \dfrac{i - e^{\pi z/2}}{i + e^{\pi z/2}}$ no arco circular de 1 a $i$ na circunferência unitária. ❑

## Observações

Na discussão anterior a respeito do uso de tabelas para a construção de transformações conformes aludimos ao fato de que em muitas aplicações torna-se necessário determinar uma transformação conforme que mapeie um domínio $D$ em um domínio mais simples $D'$. Uma pergunta pertinente é se tal transformação sempre existe. Ou seja, dados os domínios $D$ e $D'$, existe uma transformação conforme de $D$ em $D'$? Uma resposta a esta pergunta foi dada pelo matemático Bernhard Riemann (1826–1866). Embora existisse uma lacuna na prova dada por Riemann (que foi preenchida posteriormente), este notável teorema ainda leva seu nome:

*Teorema da Transformação de Riemann* *Seja $D$ um domínio simplesmente conexo no plano $z$, tal que $D$ não é todo* **C**. *Então, existe uma transformação conforme biunívoca $w = f(z)$ de $D$ no disco unitário aberto $|w| < 1$ no plano $w$.*

Não fica imediatamente claro que este teorema responde à nossa pergunta sobre a existência de uma transformação de $D$ em $D'$. Para ver que o teorema responde à pergunta primeiro o usamos para determinar uma transformação conforme $f$ de $D$ no disco unitário aberto $|w| < 1$. A seguir, aplicamos o teorema uma segunda vez para obter uma transformação $g$ de $D'$ no disco unitário aberto $|w| < 1$. Como o teorema garante que $g$ é biunívoca, existe uma função inversa $g^{-1}$ bem definida que mapeia o disco unitário aberto em $D'$. Por conseguinte, a desejada transformação de $D$ em $D'$ é dada pela composição $w = g^{-1} \circ f(z)$.

O teorema de Riemann é de fundamental importância, mas sua prova não é *construtiva*. Isso significa que o teorema estabelece a *existência* da transformação $f$, mas não oferece métodos para a determinação de uma fórmula para $f$. A prova do teorema da transformação de Riemann está muito além do escopo deste texto. Encorajamos que o leitor interessado consulte o livro *Complex Analysis*, de Lars V. Ahlfors, McGraw-Hill, 1979.

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.1 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–6, determine onde a transformação complexa $w = f(z)$ é conforme.

**1.** $f(z) = z^3 - 3z + 1$

**2.** $f(z) = z^2 + 2iz - 3$

**3.** $f(z) = z - e^{-z} + 1 - i$

**4.** $f(z) = ze^{z^2-2}$

**5.** $f(z) = \tan z$

**6.** $f(z) = z - \text{Ln}(z + i)$

Nos Problemas 7–10, proceda como no Exemplo 1 e mostre que a função $f$ dada não é conforme no ponto indicado.

**7.** $f(z) = (z - i)^3$; $z_0 = i$

**8.** $f(z) = (iz - 3)^2$; $z_0 = -3i$

**9.** $f(z) = e^{z^2}$; $z_0 = 0$

**10.** função raiz quadrada principal $f(z) = z^{1/2}$; $z_0 = 0$

Nos Problemas 11–16, use o Apêndice III e determine uma transformação conforme que mapeie a região $R$ mostrada em cinza-escuro na região $R'$ mostrada em cinza-claro. A seguir, determine a imagem da curva de $A$ a $B$.

**11.**

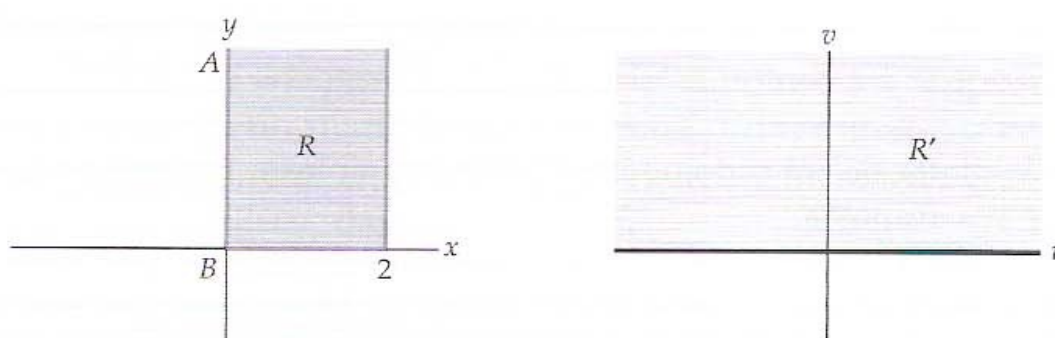



**Figura 7.1.7** Figura para o Problema 11

**12.**

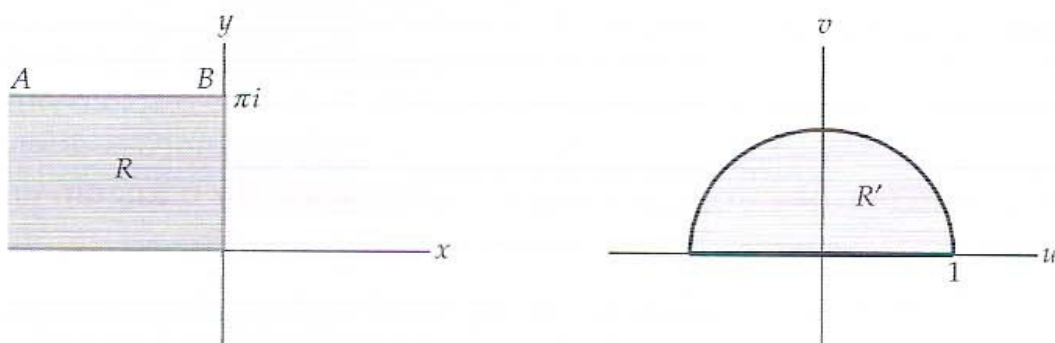



**Figura 7.1.8** Figura para o Problema 12

**13.**

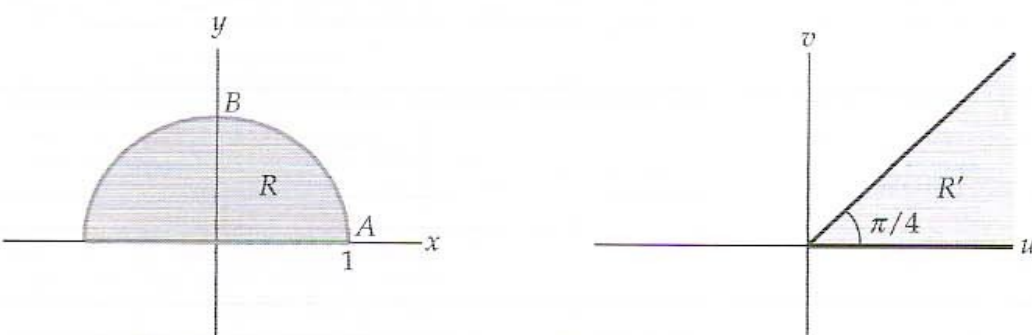



**Figura 7.1.9** Figura para o Problema 13

**14.**

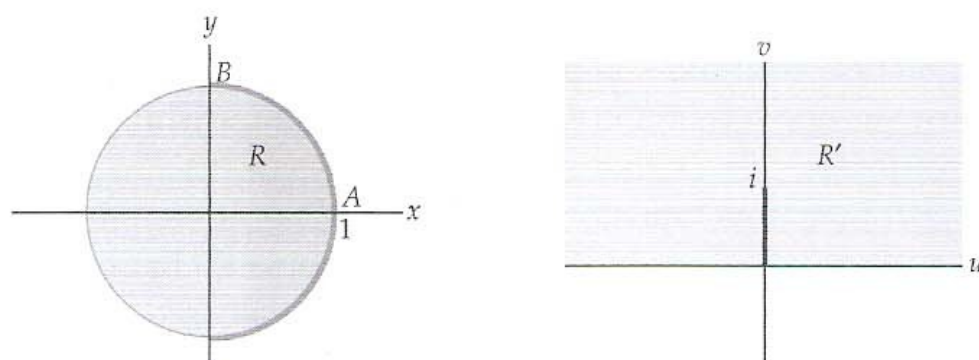



**Figura 7.1.10** Figura para o Problema 14

**15.**

**Figura 7.1.11** Figura para o Problema 15

**16.**

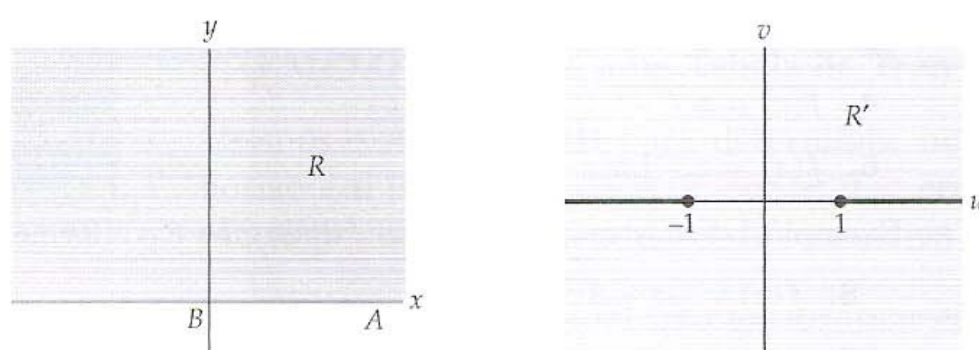



**Figura 7.1.12** Figura para o Problema 16

## Foco em Conceitos

**17.** Em que ponto(s) a transformação $w = \bar{z}$ é conforme? Justifique sua resposta.

**18.** Seja $w = f(z)$ uma transformação conforme em todo ponto no plano complexo. Em que ponto(s) a transfor
$w = \overline{f(\bar{z})}$ é conforme? Justifique sua resposta.

**19.** Seja $w = f(z)$ uma transformação conforme em todo ponto no plano complexo. Em que ponto(s) a transfor
$w = e^{f(z)}$ é conforme?

**20.** Este problema trata da determinação do ângulo entre duas curvas $C_1$ e $C_2$ em um ponto em que uma das
(ou as duas) tem (têm) um vetor tangente nulo.

(a) Assuma que as duas curvas $C_1$ e $C_2$ sejam parametrizadas por $z_1(t)$ e $z_2(t)$, respectivamente, e que as
curvas se cruzem em $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$. Assuma, ainda, que $z_1$ e $z_2$ sejam funções diferenciáveis de $t$;
$z_1' = z_1'(t_0)$ e $z_2' = z_2'(t_0)$. Explique por que $\arg(z_1') - \arg(z_2')$ *não* representa o ângulo entre $C_1$ e $C_2$ se
$z_2'$ for zero.

(b) Explique por que $\lim_{t\to t_0}[\arg(z_2(t) - z_0)] - \lim_{t\to t_0}[\arg(z_1(t) - z_0)]$ representa o ângulo entre $C_1$ e $C_2$ quer
seja zero ou não.

(c) Use a parte (b) para determinar o ângulo entre as curvas parametrizadas por $z_1(t) = t + it^2$ e $z_2(t) =$
$it^2$, $-1 \leq t \leq 1$, em $z_0 = 0$. Este resultado concorda com sua intuição?

**21.** No Exemplo 2 mostramos que a função $f(z) = z^2$ não é conforme em $z_0 = 0$, pois dobra o ângulo entre os
e $y$ positivos. Neste problema você mostrará que $f(z) = z^2$ dobra o ângulo entre *todo* par de curvas suaves
cruzam em $z_0 = 0$. Este é um caso muito específico do Teorema 7.1.2.

(a) Suponha que as curvas suaves $C_1$ e $C_2$ sejam parametrizadas por $z_1(t)$ e $z_2(t)$, com $z_1(t_0) = z_2(t_0) = 0$.
$z_1' = z_1'(t_0)$ e $z_2' = z_2'(t_0)$ sejam diferentes de zero, o ângulo $\theta$ entre $C_1$ e $C_2$ em $z = 0$ é dado por (1).
por que $\phi = \arg(f'(0) \cdot z_2') - \arg(f'(0) \cdot z_1')$ *não* representa o ângulo entre as imagens $C_1'$ e $C_2'$ de $C_1$ e $C_2$
a transformação $w = f(z) = z^2$, respectivamente.

(b) Use o Problema 20 para escrever uma expressão envolvendo os argumentos que representam o ângulo $\phi$ entre as imagens $C_1'$ e $C_2'$. [*Sugestão*: $C_1'$ e $C_2'$ são parametrizadas por $w_1(t) = f(z_1(t)) = [z_1(t)]^2$ e $w_2(t) = f(z_2(t)) = [z_2(t)]^2$, respectivamente.]

(c) Use (8) da Seção 1.3 para mostrar que sua expressão para $\phi$ no item (b) é igual a $2\theta$.

**22.** Neste problema você provará o Teorema 7.1.2. Seja $f$ uma função analítica no ponto $z_0$, tal que $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(n)} \neq 0$, para algum $n > 1$.

(a) Explique por que $f$ pode ser escrita como

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n (1 + g(z)),$$

onde $g$ é uma função analítica em $z_0$ e $g(z_0) = 0$.

(b) Use (a) e o Problema 20 para mostrar que o ângulo entre duas curvas suaves que se cruzam em $z_0$ é aumentado de um fator $n$ pela transformação $w = f(z)$.

## 7.2 Transformações Fracionárias Lineares

Em muitas aplicações que envolvem problemas de valores de contorno associados à equação de Laplace é necessário determinar uma transformação conforme que mapeie um disco no semiplano $v \geq 0$. Esta transformação teria de mapear a fronteira circular do disco na reta de fronteira do semiplano. Uma importante classe de transformações conformes elementares que mapeiam circunferências em retas (e vice-versa) são as transformações fracionárias lineares. Nesta seção definiremos e estudaremos esta classe especial de transformações.

**Transformações Fracionárias Lineares** Na Seção 2.3, examinamos transformações lineares complexas $w = az + b$, onde $a$ e $b$ são constantes complexas e $a \neq 0$. Recordemos que a ação dessas transformações consiste em rotação, dilatação e translação de pontos no plano complexo. Na Seção 2.5 discutimos a transformação recíproca complexa $w = 1/z$. Uma importante propriedade da transformação recíproca, quando definida no plano complexo estendido, é mapear certas retas em circunferências e certas circunferências em retas. Um tipo mais geral de transformação com propriedades similares é o das transformações fracionárias lineares, definido a seguir.

**Definição 7.2.1 Transformação Fracionária Linear**

Se $a$, $b$, $c$ e $d$ forem constantes complexas tais que $ad - bc \neq 0$, a função complexa definida por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{11}$$

é denominada **transformação fracionária linear**.

Transformações fracionárias lineares também são conhecidas como **transformações de Möbius** ou **transformações bilineares**. Caso $c = 0$, a transformação $T$ dada por (1) é uma transformação linear; portanto, uma transformação linear é um caso especial de transformações fracionárias lineares. Caso $c \neq 0$, podemos escrever

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}. \tag{2}$$

Tomando $A = \dfrac{bc - ad}{c}$ e $B = \dfrac{a}{c}$, vemos que a transformação linear $T$ em (2) pode ser escrita como a composição $T(z) = f \circ g \circ h(z)$, onde $f(z) = Az + B$ e $h(z) = cz + d$ são funções lineares e $g(z) = 1/z$ é a função recíproca.

O domínio de uma transformação fracionaria linear $T$ dada por (1) é o conjunto de todos os complexos $z$ tais que $z \neq -d/c$. Além disso, como

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

o Teorema 7.1.1 e a exigência $ad - bc \neq 0$ indicam que transformações fracionárias lineares são conformes em seus domínios. A exigência $ad - bc \neq 0$ também assegura que $T$ é biunívoca em seu domínio (Problema 27 do Conjunto de Exercícios 7.2).

Observemos que caso $c \neq 0$, (1) pode ser escrita como

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(a/c)\,(z + b/a)}{z + d/c} = \frac{\phi(z)}{z - (-d/c)},$$

onde $\phi(z) = (a/c)(z + b/a)$. Como $ad - bc \neq 0$, temos $\phi(-d/c) \neq 0$; portanto, o Teorema 6.4.2 da Seção 6.4 indica que o ponto $z = -d/c$ é um polo simples de $T$.

Quando $c \neq 0$, ou seja, quando $T$ não é uma função linear, pode ser útil interpretar $T$ como uma transformação do plano complexo estendido. Como $T$ é definida para todos os pontos no plano complexo estendido, excluídos o polo $z = -d/c$ e o ponto ideal $\infty$, basta que estendamos a definição de $T$ de modo que inclua esses dois pontos. Podemos fazer isso considerando os limites de $T$ quando $z$ tende ao polo e quando $z$ tende ao ponto ideal. Como

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{cz + d}{az + b} = \frac{0}{a\,(-d/c) + b} = \frac{0}{-ad + bc} = 0,$$

de (25) da Seção 2.6 temos

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty.$$

E, de (24) da Seção 2.6, temos

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \to 0} \frac{a/z + b}{c/z + d} = \lim_{z \to 0} \frac{a + zb}{c + zd} = \frac{a}{c}.$$

Os valores desses dois limites indicam como a definição de $T$ pode ser estendida. Em particular, se $c \neq 0$ consideramos $T$ como uma transformação biunívoca do plano complexo estendido definida por

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{az + b}{cz + d}, & z \neq -\dfrac{d}{c},\, z \neq \infty \\ \infty, & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases} \qquad (3)$$

Um caso especial de (3) corresponde a $a = d = 0$ e $b = c \neq 0$ e representa a função recíproca definida no plano complexo estendido (Definição 2.5.1).

---

EXEMPLO 1 **Transformação Fracionária Linear**

Determinemos as imagens dos pontos $0$, $1 + i$, $i$ e $\infty$ sob a transformação fracionária linear $T(z) = (2z + 1)/(z - i)$.

**Solução** Para $z = 0$ e $z = 1 + i$, temos

$$T(0) = \frac{2(0) + 1}{0 - i} = \frac{1}{-i} = i \quad \text{e} \quad T(1 + i) = \frac{2(1 + i) + 1}{(1 + i) - i} = \frac{3 + 2i}{1} = 3 + 2i.$$

Identificando $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = -i$ em (3), também temos

$$T(i) = T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{e} \quad T(\infty) = \frac{a}{c} = 2.$$

□

**Propriedade de Preservação de Circunferências** Na discussão que antecedeu o Exemplo 1 indicamos que a função recíproca $1/z$ é um caso especial de uma transformação fracionária linear. Na Seção 2.7 vimos duas propriedades interessantes da transformação recíproca. Primeira: a imagem de uma circunferência centrada no polo $z = 0$ de $1/z$ é uma circunferência; segunda: a imagem de uma circunferência com centro no eixo $x$ ou no eixo $y$ e que contém o polo $z = 0$ é uma reta vertical ou horizontal. Transformações fracionárias lineares têm uma propriedade de transformação similar. Este é o conteúdo do próximo teorema.

**Teorema 7.2.1 Propriedade de Preservação de Circunferências**

Seja $C$ uma circunferência no plano $z$ e seja $T$ uma transformação fracionária linear dada por (3); então, a imagem de $C$ sob $T$ é uma circunferência ou uma reta no plano $w$ estendido. A imagem será uma reta se e somente se $c \neq 0$ e o polo $z = -d/c$ estiver na circunferência $C$.

**Prova** Quando $c = 0$ $T$ é uma função linear; vimos na Seção 2.3 que funções lineares mapeiam circunferências em circunferências. Resta mostrar que o teorema é válido para $c \neq 0$. Assumamos $c \neq 0$. De (2), temos $T(z) = f \circ g \circ h(z)$, onde $f(z) = Az + B$ e $h(z) = cz + d$ são funções lineares e $g(z) = 1/z$ é a função recíproca. Observemos que como $h$ é uma transformação linear, a imagem $C'$ da circunferência $C$ sob $h$ é uma circunferência. Agora, examinemos dois casos:

**Caso 1** Assumamos que a origem $w = 0$ esteja na circunferência $C'$. Isso ocorre se e somente se o polo $z = -d/c$ estiver na circunferência $C$. Das Observações ao final da Seção 2.5, se $w = 0$ estiver em $C'$ a imagem de $C'$ sob $g(z) = 1/z$ é uma reta $R$ vertical ou horizontal. Além disso, como $f$ é uma transformação linear a imagem de $R$ sob $f$ também é uma reta. Portanto, mostramos que se o polo $z = -d/c$ estiver na circunferência $C$ a imagem de $C$ sob $T$ é uma reta.

**Caso 2** Assumamos que o ponto $w = 0$ não esteja em $C'$. Ou seja, que o polo $z = -d/c$ não esteja na circunferência $C$. Seja $C'$ a circunferência dada por $|w - w_0| = \rho$. Se fizermos $\xi = f(w) = 1/w$ e $\xi_0 = f(w_0) = 1/w_0$, para qualquer ponto $w$ em $C'$, teremos

$$|\xi - \xi_0| = \left|\frac{1}{w} - \frac{1}{w_0}\right| = \frac{|w - w_0|}{|w|\,|w_0|} = \rho|\xi_0||\xi|. \tag{4}$$

Pode ser mostrado que o conjunto de pontos que satisfazem a equação

$$|\xi - a| = \lambda|\xi - b| \tag{5}$$

é uma reta, se $\lambda = 1$, ou uma circunferência, se $\lambda > 0$ e $\lambda \neq 1$ (Problema 28 do Conjunto de Exercícios 7.2). Dessa forma, identificando $a = \xi_0$, $b = 0$ e $\lambda = \rho|\xi_0|$ vemos que (4) pode ser posta na forma (5). Como $w = 0$ não está em $C'$, $|w_0| \neq \rho$ ou, o que é equivalente, $\lambda = \rho|\xi_0| \neq 1$. Isso implica que o conjunto de pontos dados por (4) é uma circunferência. Por fim, como $f$ é uma função linear a imagem dessa circunferência sob $f$ é uma circunferência; de modo que concluímos que a imagem de $C$ sob $T$ é uma circunferência. ❑

O ponto importante nesta demonstração é que uma transformação fracionária linear (1) pode ser escrita como uma composição da função recíproca e duas funções lineares, como mostrado em (2). O Problema 27 do Conjunto de Exercícios 7.2 pede que seja mostrado que a imagem de qualquer reta $R$ sob a transformação recíproca $w = 1/z$ é uma reta ou uma circunferência. Empregando raciocínio similar, também podemos mostrar que

***T(z) Mapeia Retas em Circunferências***

Se $T$ for uma transformação fracionária dada por (3), a imagem de uma reta $R$ sob $T$ é uma reta ou uma circunferência. A imagem será uma circunferência se e somente se $c \neq 0$ e o polo $z = -d/c$ não estiver na reta $R$.

**(a)** Circunferência unitária $|z| = 1$

$w = \dfrac{z+2}{z-1}$

**(b)** Imagem da circunferência em (a)

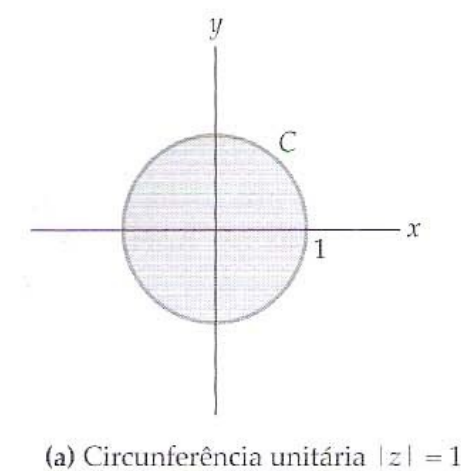
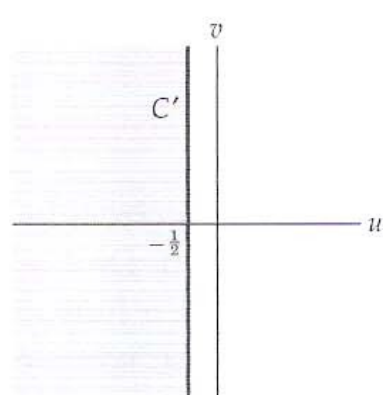



**Figura 7.2.1** Transformação fracionária linear $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$

### EXEMPLO 2 Imagem de uma Circunferência

Determinemos a imagem da circunferência unitária $|z| = 1$ sob a transformação fracionária linear $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$. Qual é a imagem do interior $|z| < 1$ desta circunferência?

**Solução** O polo de $T$ é $z = 1$, e este ponto está na circunferência unitária $|z| = 1$. Portanto, usando o Teorema 7.2.1 concluímos que a imagem da circunferência unitária é uma reta. Como a imagem é uma reta, esta é determinada por quaisquer dois pontos. Como $T(-1) = -\frac{1}{2}$ e $T(i) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, vemos que a imagem é a reta $u = -\frac{1}{2}$. Para responder à segunda pergunta, notamos, primeiro, que uma transformação fracionária linear é uma função racional, ou seja, é contínua em seu domínio. Consequentemente, a imagem do interior $|z| < 1$ da circunferência unitária é o semiplano $u < -\frac{1}{2}$ ou o semiplano $u > -\frac{1}{2}$. Usando $z = 0$ como um **ponto de teste,** temos $T(0) = -2$, que está no semiplano à esquerda da reta $u = -\frac{1}{2}$; logo, a imagem é o semiplano $u < -\frac{1}{2}$. Esta transformação é ilustrada na Figura 7.2.1. A circunferência $|z| = 1$ é mostrada em cinza-escuro na Figura 7.2.1(a), e sua imagem $u = -\frac{1}{2}$ é mostrada em preto na Figura 7.2.1(b). □

### EXEMPLO 3 Imagem de uma Circunferência

Determinemos a imagem da circunferência $|z| = 2$ sob a transformação fracionária linear $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$. Qual é a imagem do disco $|z| \leq 2$ sob $T$?

**Solução** Neste exemplo o polo $z = 1$ não está na circunferência $|z| = 2$; neste caso, o Teorema 7.2.1 indica que a imagem de $|z| = 2$ é uma circunferência $C'$. Para determinar uma descrição algébrica de $C'$, primeiro notamos que a circunferência $|z| = 2$ é simétrica em relação ao eixo $x$. Ou seja, se $z$ estiver na circunferência $|z| = 2$, $\bar{z}$ também estará. Além disso, observamos que, para todo $z$,

$$T(\bar{z}) = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1} = \frac{\overline{z+2}}{\overline{z-1}} = \overline{\left(\frac{z+2}{z-1}\right)} = \overline{T(z)}.$$

Portanto, se $z$ e $\bar{z}$ estiverem na circunferência $|z| = 2$, $w = T(z)$ e $\bar{w} = \overline{T(z)} = T(\bar{z})$ estão na circunferência $C'$. Por conseguinte, $C'$ é simétrica em relação ao eixo $u$. Como $z = 2$ e $-2$ estão na circunferência $|z| = 2$, os dois pontos $T(2) = 4$ e $T(-2) = 0$ estão em $C'$. A simetria de $C'$ implica que 0 e 4 são os extremos de um diâmetro; logo, $C'$ é a circunferência $|w - 2| = 2$. Usando $z = 0$ como ponto de teste verificamos que o interior da circunferência $|z| = 2$ é o exterior da circunferência $|w - 2| = 2$. Em resumo, a transformação fracionária linear $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$ mapeia o disco $|z| \leq 2$, mostrado em cinza-escuro na Figura 7.2.2(a), na região $|w - 2| \geq 2$, mostrada em cinza-claro na Figura 7.2.2(b). □

**(a)** Circunferência $|z| = 2$

$w = \dfrac{z+2}{z-1}$

**(b)** Imagem da circunferência em (a)

**Figura 7.2.2** Transformação fracionária linear $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$

**Transformações Fracionárias Lineares como Matrizes** Matrizes podem ser usadas para simplificar muitos dos cálculos associados às transformações fracionárias lineares. Para isso, associamos a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (6)$$

à transformação fracionária linear

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

A associação em (6) não é única, pois se $e$ for um número complexo não nulo, a transformação fracionária linear $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ também é dada por $T(z) = (eaz + eb)/(ecz + ed)$. No entanto, se $e \neq 1$, as duas matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} ea & eb \\ ec & ed \end{pmatrix} = e\mathbf{A}$$

não são iguais, mesmo que representem a mesma transformação fracionária linear.

É uma tarefa simples comprovar que a composição $T_2 \circ T_1$ de duas transformações fracionárias lineares

$$T_1(z) = (a_1z + b_1)/(c_1z + d_1) \text{ e } T_2(z) = (a_2z + b_2)/(c_2z + d_2)$$

é representada pelo produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

O Problema 27 do Conjunto de Exercícios 7.2 pede que seja determinada a fórmula para $T^{-1}(z)$ através da resolução da equação $w = T(z)$ para $z$. A fórmula para a função inversa $T^{-1}(z)$ de uma transformação fracionária linear $T$ de (7) é representada pela inversa da matriz $\mathbf{A}$ em (6):

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Identificando $e = \dfrac{1}{ad - bc}$ em (8), também podemos representar $T^{-1}(z)$ pela matriz

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.^* \tag{10}$$

---

**EXEMPLO 4 Uso de Matrizes**

Sejam $S(z) = (z - i)/(iz - 1)$ e $T(z) = (2z - 1)/(z + 2)$. Usemos matrizes para determinar $S^{-1}(T(z))$.

**Solução** Representemos as transformações fracionárias lineares $S$ e $T$ pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Segundo (10), a transformação $S^{-1}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, segundo (9), a composição $S^{-1} \circ T$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i & 1+2i \\ 1-2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$S^{-1}(T(z)) = \frac{(-2+i)z + 1 + 2i}{(1 - 2i)z + 2 + i}.$$

□

**Razão Cruzada** Na prática é comum precisarmos determinar uma transformação conforme de um domínio $D$ que é limitado por circunferências em um domínio $D'$ que é limitado por retas. Transformações fracionárias lineares são particularmente adequadas para esses casos. Contudo, para usá-las devemos determinar um método geral para construir uma transformação fracionária linear $w = T(z)$ que mapeie três pontos distintos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ na fronteira de $D$ em três pontos distintos $w_1$, $w_2$ e $w_3$ na fronteira de $D'$. Isso é feito por meio de **razões cruzadas**, definidas a seguir.

nos que uma
ência é totalmente
ada por três
ão colineares. ➡

*Esta matriz é denominada **matriz adjunta** de **A**.

**Definição 7.2.2 Razão Cruzada**

A **razão cruzada** dos números complexos $z$, $z_1$, $z_2$ e $z_3$ é o número complexo

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}. \tag{11}$$

Ao calcular razões cruzadas devemos respeitar a ordem dos números complexos. Por exemplo, podemos comprovar que a razão cruzada de 0, 1, $i$ e 2 é $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i$, enquanto a razão cruzada de 0, $i$, 1 e 2 é $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

Estendamos o conceito de razão cruzada para incluir pontos no plano complexo estendido; para isso, usemos a fórmula (24) das Observações ao final da Seção 2.6. Por exemplo, a razão cruzada de, digamos, $\infty$, $z_1$, $z_2$ e $z_3$ é dada pelo limite

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

O teorema a seguir ilustra a importância de razões cruzadas no estudo de transformações fracionárias lineares. Em particular, provamos que a razão cruzada é invariante sob uma transformação fracionária linear.

**Teorema 7.2.2 Razões Cruzadas e Transformações Fracionárias Lineares**

Seja $w = T(z)$ uma transformação fracionária linear que mapeia os pontos distintos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ nos pontos distintos $w_1$, $w_2$ e $w_3$, respectivamente; então,

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}=\frac{w-w_1}{w-w_3}\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} \tag{12}$$

para todo $z$.

**Prova** Seja $R$ a transformação fracionária linear

$$R(z)=\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}; \tag{13}$$

notemos que $R(z_1) = 0$, $R(z_2) = 1$ e $R(z_3) = \infty$. Consideremos, também, a transformação fracionária linear

$$S(z)=\frac{z-w_1}{z-w_3}\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}. \tag{14}$$

Para a transformação $S$, temos $S(w_1) = 0$, $S(w_2) = 1$ e $S(w_3) = \infty$. Portanto, os pontos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ são mapeados nos pontos $w_1$, $w_2$ e $w_3$, respectivamente, pela transformação fracionária linear $S^{-1}(R(z))$. Por conseguinte, 0, 1 e $\infty$ são mapeados em 0, 1 e $\infty$, respectivamente, pela composição $T^{-1}(S^{-1}(R(z)))$. Com isso, é uma tarefa simples comprovar que a única transformação fracionária linear que mapeia 0, 1 e $\infty$ em 0, 1 e $\infty$ é a transformação identidade (Problema 30 do Conjunto de Exercícios 7.2). Assim, concluímos que $T^{-1}(S^{-1}(R(z))) = z$ ou $R(z) = S(T(z))$. Identificando $w = T(z)$, mostramos que $R(z) = S(w)$. Logo, de (13) e (14), temos

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}=\frac{w-w_1}{w-w_3}\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}.$$ ∎

EXEMPLO 5 **Construção de uma Transformação Fracionária Linear**

Construamos uma transformação fracionária linear que mapeie os pontos 1, $i$ e $-1$ na circunferência unitária $|z| = 1$ nos pontos $-1$, 0 e 1 no eixo real. Determinemos a imagem do interior $|z| < 1$ da circunferência unitária sob essa transformação.

**Solução** Identificando $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $w_1 = -1$, $w_2 = 0$ e $w_3 = 1$ em (12), o Teorema 7.2.2 indica que a desejada transformação $w = T(z)$ deve satisfazer

$$\frac{z-1}{z-(-1)}\,\frac{i-(-1)}{i-1}=\frac{w-(-1)}{w-1}\,\frac{0-1}{0-(-1)}.$$

Resolvendo esta equação para $w$ e simplificando, obtemos

...a: uma transformação ...onária linear pode ter ...tas formas equivalentes. ➡

$$w = T(z) = \frac{z - i}{iz - 1}.$$

Usando o ponto de teste $z = 0$, obtemos $T(0) = i$. Portanto, a imagem do interior $|z| < 1$ da circunferência unitária é o semiplano superior $v > 0$. ❑

---

EXEMPLO 6 **Construção de uma Transformação Fracionária Linear**

Construamos uma transformação fracionária linear que mapeie os pontos $-i$, 1 e $\infty$ na reta $y = x - 1$ nos pontos 1, $i$ e $-1$ na circunferência unitária $|w| = 1$.

**Solução** Procedamos como no Exemplo 5. Usando (24) da Seção 2.6, calculamos a razão cruzada de $z$, $z_1 = -i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = \infty$ como

$$\lim_{z_3 \to \infty} \frac{z + i}{z - z_3} \frac{1 - z_3}{1 + i} = \lim_{z_3 \to 0} \frac{z + i}{z - 1/z_3} \frac{1 - 1/z_3}{1 + i} = \lim_{z_3 \to 0} \frac{z + i}{z z_3 - 1} \frac{z_3 - 1}{1 + i} = \frac{z + i}{1 + i}.$$

Identificando $w_1 = 1$, $w_2 = i$ e $w_3 = -1$ em (12), concluímos que a desejada transformação $w = T(z)$ deve satisfazer

$$\frac{z + i}{1 + i} = \frac{w - 1}{w + 1} \frac{i + 1}{i - 1}.$$

*Resolvendo para $w$ e simplificando, obtemos*

$$w = T(z) = \frac{z + 1}{-z + 1 - 2i}.$$ ❑

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.2 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–4, determine as imagens dos pontos 0, 1, $i$ e $\infty$ sob a dada transformação fracionária linear.

**1.** $T(z) = \dfrac{i}{z}$

**2.** $T(z) = \dfrac{2}{z - i}$

**3.** $T(z) = \dfrac{z + i}{z - i}$

**4.** $T(z) = \dfrac{z - 1}{z}$

Nos Problemas 5–8, determine a imagem dos discos $|z| \leq 1$ e $|z - i| \leq 1$ sob a dada transformação fracionária linear.

**5.** $T$ é a transformação no Problema 1

**6.** $T$ é a transformação no Problema 2

**7.** $T$ é a transformação no Problema 3

**8.** $T$ é a transformação no Problema 4

Nos Problemas 9–12, determine a imagem dos semiplanos $x \geq 0$ e $y \leq 1$ sob a dada transformação fracionária linear.

**9.** $T$ é a transformação no Problema 1

**10.** $T$ é a transformação no Problema 2

**11.** $T$ é a transformação no Problema 3

**12.** $T$ é a transformação no Problema 4

Nos Problemas 13–16, determine a imagem da região mostrada em cinza-escuro sob a dada transformação fracionária linear.

**13.** $T(z) = \dfrac{z}{z - 2}$

**14.** $T(z) = \dfrac{z - i}{z + 1}$

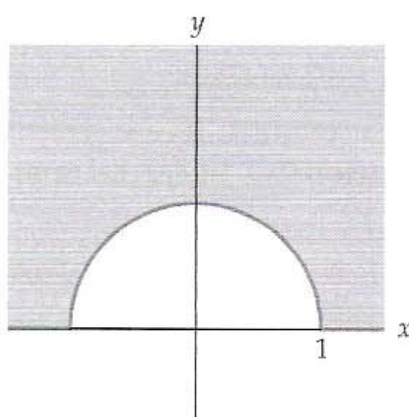



**Figura 7.2.3** Figura para o Problema 13

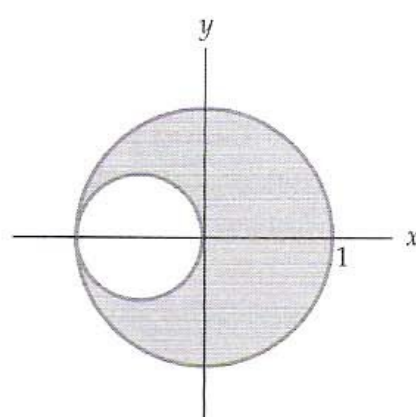



**Figura 7.2.4** Figura para o Problema 14

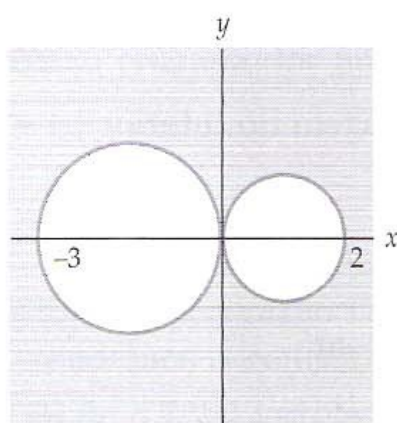
**15.** $T(z) = \dfrac{z+1}{z-2}$

**16.** $T(z) = \dfrac{-z-1+i}{z-1+i}$

**Figura 7.2.5** Figura para o Problema 15

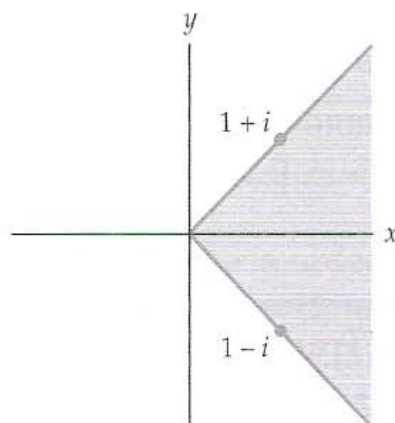



**Figura 7.2.6** Figura para o Problema 16

Nos Problemas 17–20, use matrizes para determinar (**a**) $S^{-1}(z)$ e (**b**) $S^{-1}(T(z))$.

**17.** $T(z) = \dfrac{z}{iz-1}$, $S(z) = \dfrac{iz+1}{z-1}$

**18.** $T(z) = \dfrac{iz}{z-2i}$, $S(z) = \dfrac{2z+1}{z+1}$

**19.** $T(z) = \dfrac{2z-3}{z-3}$, $S(z) = \dfrac{z-2}{z-1}$

**20.** $T(z) = \dfrac{z-1+i}{iz-2}$, $S(z) = \dfrac{(2-i)z}{z-1-i}$

Nos Problemas 21–26, construa uma transformação fracionária linear que mapeie os pontos dados $z_1$, $z_2$ e $z_3$ nos pontos dados $w_1$, $w_2$ e $w_3$, respectivamente.

**21.** $z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 2;\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty$

**22.** $z_1 = i,\ z_2 = 0,\ z_3 = -i;\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty$

**23.** $z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = \infty;\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = 2$

**24.** $z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1;\ w_1 = i,\ w_2 = 0,\ w_3 = \infty$

**25.** $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -i;\ w_1 = -1,\ w_2 = 0,\ w_3 = 3$

**26.** $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -i;\ w_1 = -i,\ w_2 = i,\ w_3 = \infty$

## Foco em Conceitos

**27.** Sejam $a$, $b$, $c$ e $d$ números complexos tais que $ad - bc \neq 0$.

(a) Resolva a equação $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ para $z$.

(b) Explique por que (a) implica que a transformação fracionária linear $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ é uma função biunívoca.

**28.** Considere a equação

$$|z-a| = \lambda|z-b| \tag{15}$$

onde $\lambda$ é uma constante real positiva.

(a) Mostre que, se $\lambda = 1$, o conjunto de pontos que satisfaz (15) é uma reta.

(b) Mostre que, se $\lambda \neq 1$, o conjunto de pontos que satisfaz (15) é uma circunferência.

**29.** Seja $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ uma transformação fracionária linear.

(a) Se $T(0) = 0$, o que você pode dizer sobre os coeficientes $a$, $b$, $c$ e $d$?

(b) Se $T(1) = 1$, o que você pode dizer sobre os coeficientes $a$, $b$, $c$ e $d$?

(c) Se $T(\infty) = \infty$, o que você pode dizer sobre os coeficientes $a$, $b$, $c$ e $d$?

**30.** Use o Problema 29 para mostrar que se $T$ for uma transformação fracionária linear tal que $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ e $T(\infty) = \infty$, então $T$ deve ser a função identidade, ou seja, $T(z) = z$.

**31.** Use o Teorema 7.2.2 e deduza a transformação na Entrada H-1 do Apêndice III.

**32.** Use o Teorema 7.2.2 e deduza a transformação na Entrada H-3 do Apêndice III.

## 7.3 Transformações de Schwarz-Christoffel

Um problema frequente associado ao estudo de fluxo fluido é o de construir o fluxo de um fluido ideal que permanece no interior de um domínio poligonal $D'$. Veremos na Seção 7.5 que este problema pode ser resolvido com a determinação de uma transformação complexa biunívoca do semiplano $y \geq 0$ na região poligonal que seja uma transformação conforme no domínio $y > 0$. A existência de uma tal transformação é garantida pelo teorema da transformação de Riemann discutido nas Observações ao final da Seção 7.1. No entanto, embora o teorema da transformação de Riemann assegure a existência de uma transformação, não fornece qualquer método prático para determinar uma fórmula para a transformação. Nesta seção apresentaremos a fórmula de Schwarz-Christoffel, que é uma fórmula explícita para a determinação de uma transformação conforme do semiplano superior em uma região poligonal.

(a) Região poligonal limitada

(b) Região poligonal ilimitada

Figura 7.3.1 Regiões poligonais

**Regiões Poligonais** Uma **região poligonal** no plano complexo é uma região limitada por uma curva suave por partes, conexa e simples, que consiste em um número finito de segmentos de retas. A curva de fronteira de uma região poligonal é denominada **polígono**, e os extremos dos segmentos de retas no polígono são denominados **vértices** do polígono. Se um polígono for uma curva fechada a região circundada pelo polígono recebe a denominação de **região poligonal limitada**; uma região poligonal não limitada é denominada **região poligonal ilimitada** (Figura 7.3.1). No caso de uma região poligonal ilimitada o ponto ideal $\infty$ também representa um vértice do polígono.

Exemplos simples de regiões poligonais são a região limitada por um triângulo com vértices 0, 1 e $i$, que exemplifica uma região poligonal limitada, e a região definida por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y < \infty$, ou seja, uma região poligonal ilimitada cujos vértices são 0, 1 e $\infty$.

**Casos Especiais** Como motivação para a determinar uma fórmula geral para uma transformação conforme que mapeie o semiplano superior $y \geq 0$ em uma região poligonal, examinemos primeiro a transformação complexa

$$w = f(z) = (z - x_1)^{\alpha/\pi}, \tag{1}$$

onde $x_1$ e $\alpha$ são números reais, e $0 < \alpha < 2\pi$. A transformação em (1) é a composição de uma translação $T(z) = z - x_1$ e a função potência real $F(z) = z^{\alpha/\pi}$. Como $x_1$ é real, $T$ representa uma translação em uma direção paralela ao eixo real. Sob esta translação, o eixo $x$ é mapeado no eixo $u$, sendo o ponto $z = x_1$ mapeado no ponto $w = 0$. Para entendermos a função potência $F$ como uma transformação complexa, substituímos o símbolo $z$ pela notação exponencial $re^{i\theta}$:

$$F(z) = \left(re^{i\theta}\right)^{\alpha/\pi} = r^{\alpha/\pi} e^{i(\alpha\theta/\pi)}. \tag{2}$$

(a) Raio que emana de $x_1$

$w = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$

(b) Imagem do raio em (a)

Figura 7.3.2 Transformação $w = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$

De (2), notamos que a transformação complexa $w = z^{\alpha/\pi}$ pode ser interpretada como a dilatação ou contração do módulo $r$ de $z$ ao módulo $r^{\alpha/\pi}$ de $w$ e a rotação de $z$ de um ângulo $\alpha/\pi$ radianos em torno da origem, aumentando ou diminuindo um argumento $\theta$ de $z$ e transformando-o em um argumento $\alpha\theta/\pi$ de $w$. Dessa forma, sob a composição $w = F(T(z)) = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$ um raio que emane de $x_1$ e faça um ângulo de $\phi$ radianos com o eixo real é mapeado em um raio que emana da origem e faz um ângulo de $\alpha\phi/\pi$ radianos com o eixo real (Figura 7.3.2).

Consideremos, agora, a transformação (1) no semiplano $y \geq 0$. Como este conjunto consiste no ponto $z = x_1$ e na família de raios $\arg(z - x_1) = \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, sua imagem sob $w = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$ consiste no ponto $w = 0$ e na família de raios $\arg(w) = \alpha\phi/\pi$, $0 \leq \alpha\phi/\pi \leq \alpha$. Em outras palavras, a imagem do semiplano $y \geq 0$ é o ponto $w = 0$ e a cunha $0 \leq \arg(w) \leq \alpha$ (Figura 7.3.3).

A função $f$ dada por (1), que mapeia o semiplano $y \geq 0$ na região poligonal ilimitada com um único vértice, tem a seguinte derivada:

$$f'(z) = \frac{\alpha}{\pi}(z - x_1)^{(\alpha/\pi)-1}. \tag{3}$$

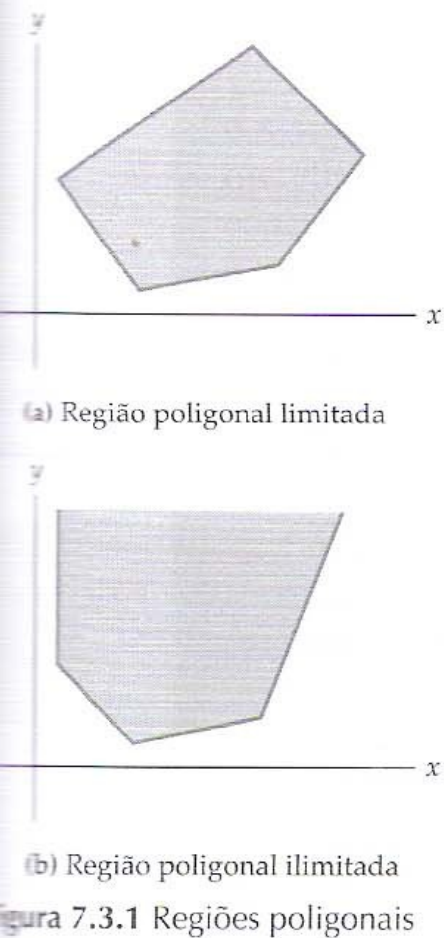
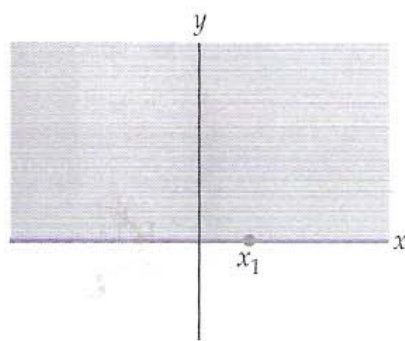
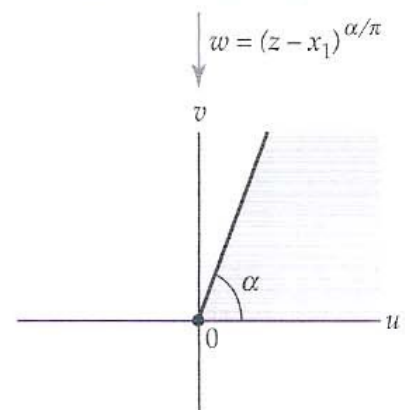
Como $f'(z) \neq 0$ se $z = x + iy$ e $y > 0$, $w = f(z)$ é uma transformação conforme em qualquer ponto $z$ com $y > 0$. Em geral usaremos a derivada $f'$, e não $f$, para descrever uma transforma-

(a) Semiplano $y \geq 0$

(b) Imagem do semiplano

**Figura 7.3.3** Transformação $w = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$

ção conforme do semiplano $y \geq 0$ em uma região poligonal arbitrária. Com isso em mente, apresentaremos a seguir uma generalização da transformação em (1) com base em sua derivada em (3).

Consideremos uma nova função $f$, analítica no domínio $y > 0$ e cuja derivada é

$$f'(z) = A\,(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}\,(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}, \tag{4}$$

onde $x_1$, $x_2$, $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são reais, $x_1 < x_2$, e $A$ é uma constante complexa. Um dado útil que nos ajudará a determinar a imagem do semiplano $y \geq 0$ sob $f$ é que a parametrização $w(t)$, $a < t < b$, fornece um segmento de reta se e somente se algum valor de $\arg(w'(t))$ for constante para todo $t$ no intervalo $a < t < b$. A seguir, usaremos esse fato para determinar as imagens dos intervalos $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2)$ e $(x_2, \infty)$ no eixo real sob a transformação complexa $w = f(z)$. Se parametrizarmos o intervalo $(-\infty, x_1)$ por $z(t) = t$, $-\infty < t < x_1$, segundo (11) da Seção 2.2, a imagem sob $w = f(z)$ é parametrizada por $w(t) = f(z(t)) = f(t)$, $-\infty < t < x_1$. Identificando $z = t$ em (4), obtemos:

$$w'(t) = f'(t) = A\,(t - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}\,(t - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}.$$

Um argumento de $w'(t)$ é, então, dado por:

$$\operatorname{Arg}(A) + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right)\operatorname{Arg}(t - x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right)\operatorname{Arg}(t - x_2). \tag{5}$$

Como $-\infty < t < x_1$, $t - x_1$ é um número real negativo, de modo que $\operatorname{Arg}(t - x_1) = \pi$. Além disso, como $x_1 < x_2$, $t - x_2$ também é um número real negativo e $\operatorname{Arg}(t - x_2) = \pi$. Substituindo esses valores em (5), vemos que $\operatorname{Arg}(A) + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$ é um valor constante de $\arg(w'(t))$ para todo $t$ no intervalo $(-\infty, x_1)$. Assim, concluímos que o intervalo $(-\infty, x_1)$ é mapeado em um segmento de reta por $w = f(z)$.

Raciocínio similar mostra que os intervalos $(x_1, x_2)$ e $(x_2, \infty)$ também são mapeados em segmentos de retas. Um valor do argumento de $w'$ para cada um desses intervalos é dado na tabela a seguir, que também lista a variação do valor do argumento.

(a) Semiplano superior $y \geq 0$

(b) Imagem do semiplano em (a)

**Figura 7.3.4** Transformação associada a (4)

| Intervalo | Argumento de $w'$ | Variação do Argumento |
|---|---|---|
| $(-\infty, x_1)$ | $\operatorname{Arg}(A) + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$ | 0 |
| $(x_1, x_2)$ | $\operatorname{Arg}(A) + \alpha_2 - \pi$ | $\pi - \alpha_1$ |
| $(x_2, \infty)$ | $\operatorname{Arg}(A)$ | $\pi - \alpha_2$ |

**Tabela 7.3.1** Argumentos de $w'$

Como $f$ é uma transformação analítica (e, por conseguinte, contínua), concluímos que a imagem do semiplano $y \geq 0$ é uma região poligonal ilimitada. Na Tabela 7.3.1 vemos que os ângulos externos entre lados adjacentes da fronteira poligonal são dados pela variação do argumento de $w'$ de um intervalo para o seguinte. Portanto, os ângulos internos do polígono são $\alpha_1$ e $\alpha_2$ (Figura 7.3.4).

**Fórmula de Schwarz-Christoffel** A discussão anterior pode ser generalizada para produzir uma fórmula para a derivada $f'$ de uma função $f$ que mapeia o semiplano $y \geq 0$ em uma região poligonal com um número arbitrário de lados. Esta fórmula, dada no próximo teorema, é conhecida como **fórmula de Schwarz-Christoffel**.

**Teorema 7.3.1 Fórmula de Schwarz-Christoffel**

Seja $f$ uma função analítica no domínio $y > 0$, com a seguinte derivada

$$f'(z) = A\,(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}\,(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}, \tag{6}$$

onde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $0 < \alpha_i < 2\pi$, com $1 \leq i \leq n$, e $A$ é uma constante complexa. $w = f(z)$ mapeia o semiplano superior $y \geq 0$ em uma região poligonal com ângulos internos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

O Teorema 7.1.1 da Seção 7.1 indica que a função dada pela fórmula de Schwarz-Christoffel (6) é uma transformação conforme no domínio $y > 0$. Por razões de concisão, de aqui em diante nos referiremos à transformação obtida de (6) como uma *transformação conforme do semiplano superior* em uma região poligonal. Devemos ter em mente que embora seja definida no semiplano $y \geq 0$, esta transformação é conforme apenas no domínio $y > 0$.

Nota ➾

Antes de investigarmos alguns exemplos da fórmula de Schwarz-Christoffel, precisamos ressaltar três coisas. Primeira, na prática em geral temos alguma liberdade na escolha dos pontos $x_k$ no eixo $x$. Uma escolha judiciosa pode simplificar o cálculo de $f(z)$. Segunda, o Teorema 7.3.1 fornece uma fórmula para a derivada de $f$. Uma fórmula geral para $f$ é dada pela integral

$$f(z) = A \int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1} (z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1} dz + B,$$

onde $A$ e $B$ são constantes complexas. Assim, $f$ é a composição da função

$$g(z) = \int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1} (z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1} dz$$

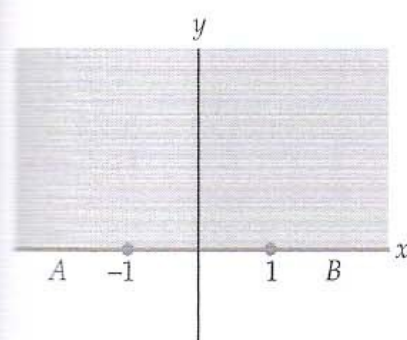
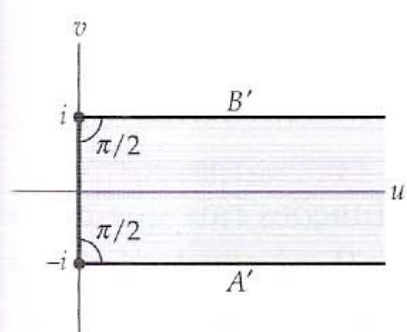
e a transformação linear $h(z) = Az + B$. Como descrito na Seção 2.3, a transformação linear $h$ permite que dilatemos (ou contraiamos) e translademos a região poligonal produzida por $g$. Terceira, embora não conste no Teorema 7.3.1, a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) também pode ser usada para construir uma transformação do semiplano superior $y \geq 0$ em uma região poligonal limitada. Para isso, aplicamos (6) usando apenas $n - 1$ dos $n$ ângulos internos da região poligonal limitada.* Ilustremos essas ideias com exemplos.

(a) Semiplano $y \geq 0$

(b) Fita semi-infinita

Figura 7.3.5 Figura para o Exemplo 1

EXEMPLO 1 **Uso da fórmula de Schwarz-Christoffel**

Usemos a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir uma transformação conforme do semiplano superior na região poligonal definida por $u \geq 0$, $-1 \leq v \leq 1$.

**Solução** Observemos que a região poligonal definida por $u \geq 0$, $-1 \leq v \leq 1$, é a fita semi-infinita mostrada em cinza-claro na Figura 7.3.5(b). Os ângulos internos dessa região poligonal ilimitada são $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ e os vértices, $w_1 = -i$ e $w_2 = i$. Para determinar a transformação desejada, apliquemos o Teorema 7.3.1 com $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Com isso, (6) fornece

$$f'(z) = A(z + 1)^{-1/2} (z - 1)^{-1/2}. \tag{7}$$

Uma fórmula para $f(z)$ é obtida com a integração de (7). Como $z$ está no semiplano superior $y \geq 0$, primeiro usamos a raiz quadrada principal para reescrever (7) como

$$f'(z) = \frac{A}{(z^2 - 1)^{1/2}}.$$

Além disso, como o valor principal de $(-1)^{1/2} = i$, temos

$$f'(z) = \frac{A}{(z^2 - 1)^{1/2}} = \frac{A}{[-1\,(1 - z^2)]^{1/2}} = \frac{A}{i} \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}} = -Ai \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}. \tag{8}$$

De (7) da Seção 4.4, vemos que uma antiderivada de (8) é dada por

$$f(z) = -Ai \operatorname{sen}^{-1} z + B, \tag{9}$$

onde $\operatorname{sen}^{-1} z$ é a função de valor único obtida usando o valor principal da raiz quadrada e o valor principal do logaritmo; $A$ e $B$ são constantes complexas. Se escolhermos $f(-1) = -i$ e $f(1) = i$, as constantes $A$ e $B$ devem satisfazer o sistema de equações

$$-Ai \operatorname{sen}^{-1}(-1) + B = Ai\frac{\pi}{2} + B = -i$$
$$-Ai \operatorname{sen}^{-1}(1) + B = -Ai\frac{\pi}{2} + B = i.$$

*Para um polígono limitado no plano, quaisquer $n - 1$ de seus ângulos internos determinam univocamente o ângulo restante.

Somando essas duas equações obtemos $2B = 0$, ou $B = 0$. Agora, substituindo $B = 0$ na primeira ou na segunda equação, calculamos $A = -2/\pi$. Portanto, a desejada transformação é dada por

$$f(z) = i\frac{2}{\pi}\,\text{sen}^{-1} z.$$

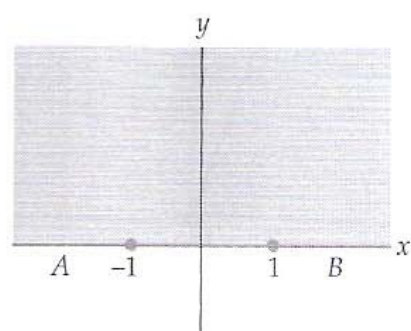
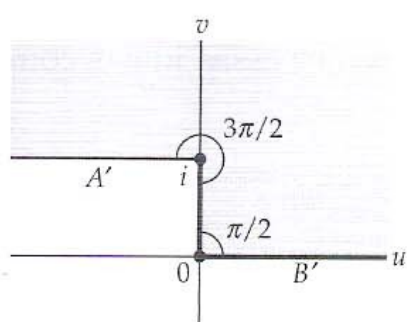
Essa transformação é ilustrada na Figura 7.3.5. O segmentos de retas marcados com $A$ e $B$, mostrados em cinza-escuro na Figura 7.3.5(a), são mapeados por $w = i\frac{2}{\pi}\,\text{sen}^{-1} z$ nos segmentos de retas marcados com $A'$ e $B'$, mostrados em preto na Figura 7.3.5(b). ❑

(a) Semiplano $y \geq 0$

(b) Região poligonal para o Exemplo 2

**Figura 7.3.6** Figura para o Exemplo 2

EXEMPLO 2 **Uso da fórmula de Schwarz-Christoffel**

Usemos a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir uma transformação conforme do semiplano superior na região poligonal mostrada em cinza-claro na Figura 7.3.6(b).

**Solução** Procedamos como no Exemplo 1. A região mostrada em cinza-claro na Figura 7.3.6(b) é uma região poligonal ilimitada, com ângulos internos $\alpha_1 = 3\pi/2$ e $\alpha_2 = \pi/2$, e vértices $w_1 = i$ e $w_2 = 0$. Se escolhermos $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ para serem mapeados em $w_1$ e $w_2$, respectivamente, (6) fornece

$$f'(z) = A\,(z+1)^{1/2}\,(z-1)^{-1/2}. \tag{10}$$

Como

$$(z+1)^{1/2}\,(z-1)^{-1/2} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2}\left(\frac{z+1}{z+1}\right)^{1/2} = \frac{z+1}{(z^2-1)^{1/2}},$$

podemos reescrever (10) como

$$f'(z) = A\left[\frac{z}{(z^2-1)^{1/2}} + \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}}\right]. \tag{11}$$

Uma antiderivada de (11) é dada por

$$f(z) = A\Big[\left(z^2-1\right)^{1/2} + \cosh^{-1} z\Big] + B,$$

onde $A$ e $B$ são constantes complexas; $(z^2-1)^{1/2}$ e $\cosh^{-1} z$ representam ramos das funções raiz quadrada e cosseno hiperbólico inverso, definidos no domínio $y > 0$. Como $f(-1) = i$ e $f(1) = 0$, as constantes $A$ e $B$ devem satisfazer o sistema de equações

$$A\left(0 + \cosh^{-1}(-1)\right) + B = A\pi i + B = i$$
$$A\left(0 + \cosh^{-1} 1\right) + B = B = 0.$$

Logo, $A = 1/\pi$ e $B = 0$, de modo que a desejada transformação é dada por

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\Big[\left(z^2-1\right)^{1/2} + \cosh^{-1} z\Big].$$

A transformação é ilustrada na Figura 7.3.6. Os segmentos de retas marcados $A$ e $B$, mostrados em cinza-escuro na Figura 7.3.6(a), são mapeados por $w = f(z)$ nos segmentos de retas $A'$ e $B'$, mostrados em preto na Figura 7.3.6(b). ❑

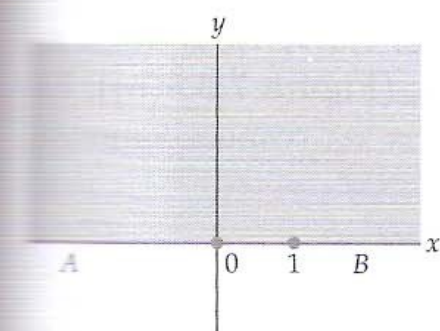
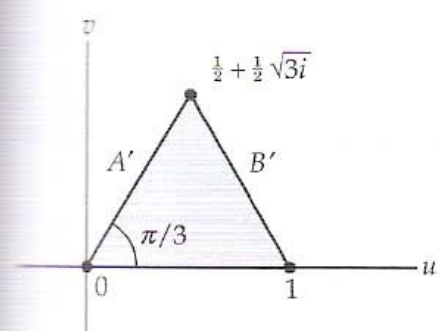
No uso da fórmula de Schwarz-Christoffel nem sempre é possível expressar $f(z)$ em termos de funções elementares. Nesses casos, técnicas numéricas podem ser empregadas para aproximar $f$ com grande precisão. O próximo exemplo ilustra como regiões poligonais relativamente simples podem levar a integrais que não podem ser expressas em termos de funções elementares.

(a) Semiplano $y \geq 0$

(b) Triângulo equilátero

Figura 7.3.7 Figura para o Exemplo 3

EXEMPLO 3 **Uso da fórmula de Schwarz-Christoffel**

Usemos a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir uma transformação conforme do semiplano superior na região poligonal limitada pelo triângulo equilátero com vértices $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ e $w_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. (Figura 7.3.7).

**Solução** A região limitada pelo triângulo equilátero é uma região poligonal limitada, com ângulos internos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/3$. Como mencionado anteriormente, podemos determinar uma transformação desejada aplicando a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) com $n - 1 = 2$ dos ângulos internos. Escolhendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, (6) fornece

$$f'(z) = Az^{-2/3}(z-1)^{-2/3}. \tag{12}$$

Não existe uma antiderivada da função em (12) que possa ser expressa em termos de funções elementares. No entanto, $f'$ é analítica no domínio simplesmente conexo $y > 0$ e o Teorema 5.4.3 indica que, portanto, existe uma antiderivada de $f$ nesse domínio. A antiderivada é dada pela fórmula integral

$$f(z) = A\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds + B, \tag{13}$$

onde $A$ e $B$ são constantes complexas. Forçando $f(0) = 0$, conseguimos calcular um valor para a constante $B$. Como $\int_0^0 = 0$, temos

$$f(0) = A\int_0^0 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds + B = 0 + B = B,$$

ou seja, $f(0) = 0$ implica $B = 0$. Se, agora, forçarmos $f(1) = 1$, obtemos

$$f(1) = A\int_0^1 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds = 1.$$

(a) Semiplano $y \geq 0$

(b) Região poligonal

(c) Limite de regiões poligonais

Figura 7.3.8 Figura para o Exemplo 4

Seja $\Gamma$ o valor da integral

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds.$$

Logo, $A = 1/\Gamma$, e $f$ pode ser escrita como

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma}\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds.$$

Valores aproximados de $f$ podem ser calculados com o uso de um SAC. Por exemplo, usando o comando **NIntegrate** em *Mathematica*, obtemos

$$f(i) \approx 0{,}4244 + 0{,}3323i \quad \text{e} \quad f(1+i) \approx 0{,}5756 + 0{,}3323i.$$ ☐

A fórmula de Schwarz-Christoffel pode, ainda, ser usada para determinar transformações em regiões não poligonais. Esta abordagem exige que a desejada região não poligonal possa ser obtida como um "limite" de uma sequência de regiões poligonais. O próximo exemplo ilustra esta técnica.

EXEMPLO 4 **Uso da fórmula de Schwarz-Christoffel**

Usemos a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir uma transformação conforme do semiplano superior na região não poligonal definida por $v \geq 0$, com a semirreta horizontal $v = \pi$, $-\infty < u \leq 0$, deletada (Figura 7.3.8(c)).

**Solução** Seja $u_0$ um ponto no eixo $u$ não positivo no plano $w$. A região não poligonal definida por $v \geq 0$, com a semirreta horizontal $v = \pi$, $-\infty < u \leq 0$, deletada pode ser aproximada pela região poligonal cuja fronteira consiste na semirreta horizontal $v = \pi$, $-\infty <$

$u \leq 0$, no segmento de reta de $\pi i$ a $u_0$ e na semirreta horizontal $v = 0$, $u_0 \leq u \leq \infty$. Os vértices dessa região poligonal são $w_1 = \pi i$ e $w_2 = u_0$, com correspondentes ângulos internos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ (Figura 7.3.8(b)). Escolhendo os pontos $z_1 = -1$ e $z_2 = 0$ para serem mapeados nos vértices $w_1 = \pi i$ e $w_2 = u_0$, respectivamente, (6) nos fornece a derivada

$$A\,(z+1)^{(\alpha_1/\pi)-1}\,z^{(\alpha_2/\pi)-1}. \tag{14}$$

Observemos na Figura 7.3.8(b) que quando $u_0$ tende a $-\infty$ ao longo do eixo $u$, o ângulo interior $\alpha_1$ tende a $2\pi$ e o ângulo interior $\alpha_2$ tende a 0. Com esses valores limites, (14) sugere que a desejada transformação $f$ tenha derivada

$$f'(z) = A\,(z+1)^1\,z^{-1} = A\left(1+\frac{1}{z}\right). \tag{15}$$

Uma antiderivada da função em (15) é dada por

$$f(z) = A\,(z + \operatorname{Ln} z) + B, \tag{16}$$

onde $A$ e $B$ são constantes complexas.

Para determinar os valores de $A$ e $B$, primeiro consideramos a transformação $g(z) = z + \operatorname{Ln} z$ no semiplano superior $y \geq 0$. A função $g$ tem um ponto de descontinuidade em $z = 0$; assim, consideremos separadamente as semirretas de fronteira do semiplano $y \geq 0$: $y = 0$, $-\infty < x < 0$, e $y = 0$, $0 < x < \infty$. Se $z = x + 0i$ estiver na semirreta $y = 0$, $-\infty < x < 0$, $\operatorname{Arg}(z) = \pi$, de modo que $g(z) = x + \log_e|x| + i\pi$.

Quando $x < 0$, $x + \log_e|x|$ assume todos os valores de $-\infty$ a $-1$. Dessa forma, a imagem do eixo $x$ negativo sob $g$ é a semirreta horizontal $v = \pi$, $-\infty < u < -1$. Se, no entanto, $z = x + 0i$ estiver na semirreta $y = 0$, $0 < x < \infty$, $\operatorname{Arg}(z) = 0$, de modo que $g(z) = x + \log_e|x|$. Quando $x > 0$, $x + \log_e|x|$ assume todos os valores de $-\infty$ a $\infty$. Portanto, a imagem do eixo $x$ positivo sob $g$ é o eixo $u$. Consequentemente, a imagem do semiplano $y \geq 0$ sob $g(z) = z + \operatorname{Ln} z$ é a região definida por $v \geq 0$, com a semirreta horizontal $v = \pi$, $-\infty < u < -1$ deletada. Para determinar a região mostrada na Figura 7.3.8(c) devemos compor $g$ e uma translação por 1. Logo, a desejada transformação é dada por:

$$f(z) = z + \operatorname{Ln}(z) + 1. \qquad \square$$

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.3 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–6, use o Teorema 7.3.1 para descrever a imagem do semiplano superior $y \geq 0$ sob a transformação conforme $w = f(z)$ que satisfaz a condição dada. Não tente determinar $f(z)$.

1. $f'(z) = (z-1)^{-1/2}$, $f(1) = 0$
2. $f'(z) = (z+1)^{-1/3}$, $f(-1) = 0$
3. $f'(z) = (z+1)^{-1/2}(z-1)^{1/2}$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$
4. $f'(z) = (z+1)^{-1/2}(z-1)^{-3/4}$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$
5. $f'(z) = (z+1)^{1/2}z^{-1/2}(z-1)^{-1/4}$, $f(-1) = i$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
6. $f'(z) = (z-1)^{-1/4}z^{-1/2}(z-1)^{-1/4}$, $f(-1) = -1+i$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1+i$

Nos Problemas 7–10, use a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para determinar $f'(z)$ para uma transformação conforme $w = f(z)$ do semiplano superior na dada região poligonal, mostrada em cinza-claro na figura correspondente. Use, em (6), os valores $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, e assim por diante. Não tente determinar $f(z)$.

7. $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$

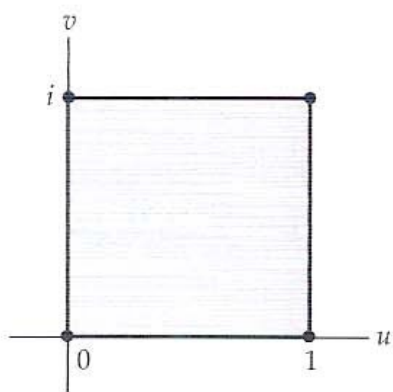



**Figura 7.3.9** Figura para o Problema 7

8. $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$

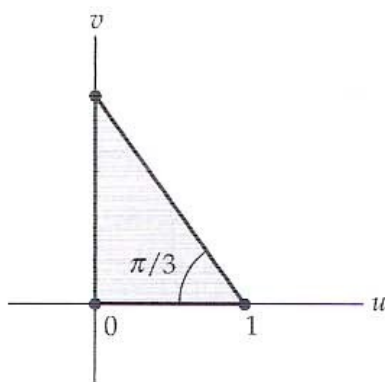



**Figura 7.3.10** Figura para o Problema 8

**9.** $f(-1) = -1,\ f(0) = 1$

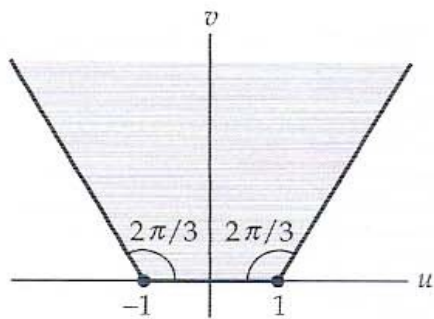



Figura 7.3.11 Figura para o Problema 9

**10.** $f(-1) = i,\ f(0) = 0$

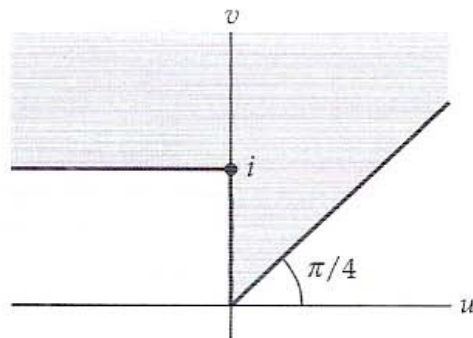



Figura 7.3.12 Figura para o Problema 10

## Foco em Conceitos

**11.** Use a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir uma transformação conforme do semiplano superior na região poligonal mostrada em cinza-claro na Figura 7.3.13, com as exigências $f(-1) = \pi i$ e $f(1) = 0$.

**12.** Use a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir uma transformação conforme do semiplano superior na região poligonal mostrada em cinza-claro na Figura 7.3.14, com as exigências $f(-1) = -ai$ e $f(1) = ai$.

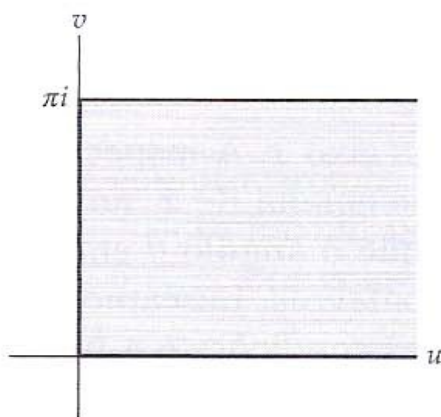



Figura 7.3.13 Figura para o Problema 11

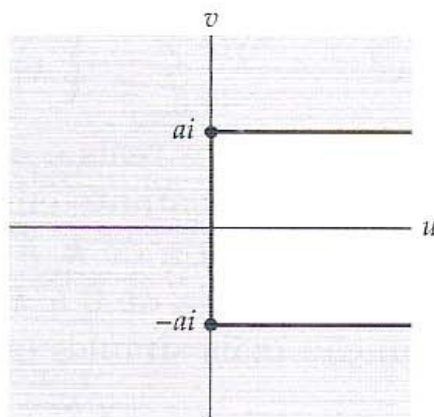



Figura 7.3.14 Figura para o Problema 12

**13.** Use a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para comprovar a transformação conforme dada na Entrada M-3 do Apêndice III; para isso, construa, primeiro, a derivada de uma transformada do semiplano superior na região poligonal mostrada em cinza-claro na Figura 7.3.15. Aplique as condições $f(-1) = -a$, $f(0) = v_1 i$ e $f(1) = a$ e, depois, faça $v_1 \to -\infty$ ao longo do eixo $v$.

**14.** Use a fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para comprovar a transformação conforme dada na Entrada M-4 do Apêndice III; para isso, construa, primeiro, a derivada de uma transformada do semiplano superior na região poligonal mostrada em cinza-claro na Figura 7.3.16. Aplique as condições $f(-1) = -u_1$, $f(0) = ai$ e $f(1) = u_1$ e, depois, faça $u_1 \to -\infty$ ao longo do eixo $u$.

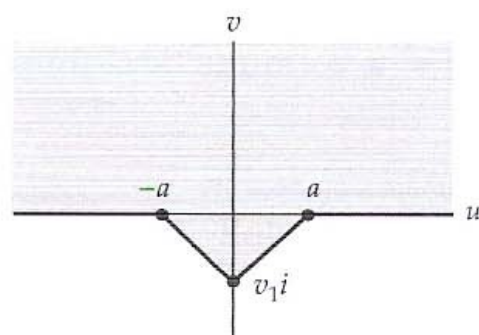



Figura 7.3.15 Figura para o Problema 13

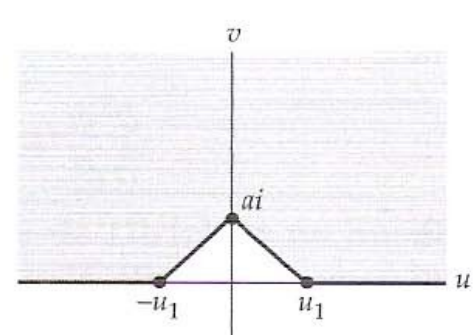



Figura 7.3.16 Figura para o Problema 14

## Tarefas para o Laboratório de Computação

Nos Problemas 15–18, use um SAC para calcular imagens aproximadas dos pontos $z_1 = i$ e $z_2 = 1 + i$ sob a função dada.

**15.** $w = f(z)$ é a transformação do Problema 3.

**16.** $w = f(z)$ é a transformação do Problema 6.

**17.** $w = f(z)$ é a transformação do Problema 8.

**18.** $w = f(z)$ é a transformação do Problema 9.

## 7.4 Fórmulas Integrais de Poisson

O sucesso do emprego de uma transformação conforme na solução de um problema de valores de contorno associado à equação de Laplace depende, muitas vezes, da habilidade de resolver um problema de valores de contorno relacionado em um domínio mais simples, como o semiplano superior $y \geq 0$ ou o disco unitário aberto $|z| < 1$. Nesta seção apresentaremos duas fórmulas integrais para a solução de um problema de Dirichlet nesses domínios.

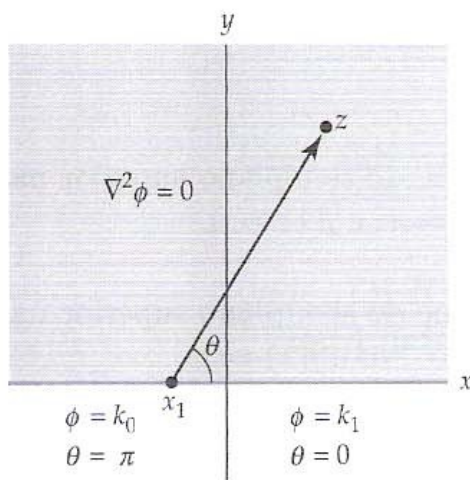



**Figura 7.4.1** Problema de Dirichlet (1)

**Fórmula para o Semiplano Superior** Iniciamos com o exame do seguinte problema de Dirichlet:

*Resolver:*

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ y > 0$$

*Sujeito a:* (1)

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} k_0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < \infty, \end{cases}$$

onde $k_0$ e $k_1$ são constantes reais e $x_1$, um ponto no eixo $x$. A inspeção da Figura 7.4.1 sugere que a função $\phi$ é constante em cada raio que emana de $x_1$ no semiplano superior, e que o valor de $\phi$ em um raio genérico varia de $k_1$ a $k_0$ à medida que o ângulo $\theta$ entre o raio e o raio que emana de $x_1$ e contém o ponto $x_1 + 1$ varia de 0 a $\pi$. Em outras palavras, buscamos uma função $\phi(\theta)$ tal que $\phi(0) = k_1$ e $\phi(\pi) = k_0$. A função mais simples que atende essas condições é a função linear:

$$\phi(\theta) = k_1 + \left(\frac{k_0 - k_1}{\pi}\right)\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Aplicando a translação $z - x_1$, observamos que $\theta = \text{Arg}(z - x_1)$, de modo que a função $\phi$ pode ser reescrita como

$$\phi(x, y) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\text{Arg}(z - x_1), \quad 0 \leq \text{Arg}(z - x_1) \leq \pi. \tag{2}$$

A seguir, mostraremos que a função $\phi(x, y)$ definida em (2) é de fato uma solução do problema de Dirichlet (1). No semiplano superior $y \geq 0$, $\phi(x, y)$ é a parte real da função

$$f(z) = k_1 - \frac{i}{\pi}(k_0 - k_1)\,\text{Ln}(z - x_1).$$

Como $f$ é analítica quando $y \geq 0$, o Teorema 3.3.1 indica que sua parte real é harmônica. Portanto, $\phi(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

quando $-\infty < x < \infty$ e $y > 0$.

Agora, comprovaremos que as condições de contorno (1) são satisfeitas por $\phi(x, y)$. Admitamos que $z$ esteja no intervalo $(x_1, \infty)$ no eixo real. Ou seja, $z = x + 0i$, com $x_1 < x < \infty$. Nesse caso, $\text{Arg}(z - x_1) = 0$, de modo que (2) fornece

$$\phi(x, 0) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\,\text{Arg}\,(z - x_1) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\,0 = k_1. \tag{4}$$

Se $z = x + 0i$, com $-\infty < x < x_1$, $\text{Arg}(z - x_1) = \pi$ e

$$\phi(x, 0) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\,\text{Arg}\,(z - x_1) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\,\pi = k_0. \tag{5}$$

Portanto, de (3), (4) e (5) concluímos que a função $\phi(x, y)$ definida por (2) é uma solução do problema de Dirichlet (1).

Este resultado pode ser generalizado. Em particular, consideremos o problema de Dirichlet

*Resolver:*
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,\quad -\infty<x<\infty,\ y>0 \tag{6}$$

*Sujeito a:*
$$\phi(x,0)=\begin{cases} k_0, & -\infty<x<x_1\\ k_1, & x_1<x<x_2\\ \vdots & \vdots\\ k_n, & x_n<x<\infty,\end{cases}$$

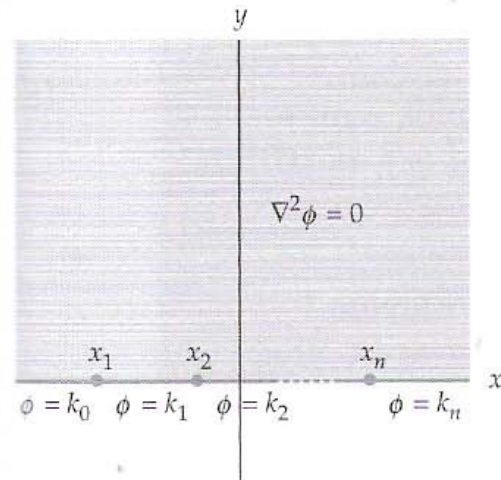



Figura 7.4.2 Problema de Dirichlet (6)

onde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, são $n$ pontos distintos no eixo $x$ e $k_0, k_1, \ldots, k_n$ são $n+1$ constantes reais (Figura 7.4.2). Observemos que (1) é apenas um caso especial de (6) e corresponde a $n = 1$. Seguindo raciocínio similar ao usado para obter (2), construímos a função

$$\phi(x,y)=k_n+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1}-k_j)\operatorname{Arg}(z-x_j). \tag{7}$$

Como no caso de (2), podemos comprovar que esta função é harmônica no domínio $y > 0$ ao observarmos que $\phi(x, y)$ é a parte real da função analítica

$$f(z)=k_n-\frac{i}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1}-k_j)\operatorname{Ln}(z-x_j).$$

A seguir comprovaremos que $\phi(x, y)$ satisfaz as condições de contorno em (6). Seja $N$ um valor fixo de $j$. Se $z = x + 0i$ for um ponto tal que $x_N < x < x_{N+1}$, $\operatorname{Arg}(z - x_j) = 0$, se $1 \le j \le N$, e $\operatorname{Arg}(z - x_j) = \pi$, se $N + 1 \le j \le n$. Por conseguinte, para $z = x + 0i$, com $x_N < x < x_{N+1}$, (7) fornece

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= k_n+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1}-k_j)\operatorname{Arg}(z-x_j)\\
&= k_n+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N}(k_{j-1}-k_j)\operatorname{Arg}(z-x_j)+\frac{1}{\pi}\sum_{j=N+1}^{n}(k_{j-1}-k_j)\operatorname{Arg}(z-x_j)\\
&= k_n+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N}(k_{j-1}-k_j)\cdot 0+\frac{1}{\pi}\sum_{j=N+1}^{n}(k_{j-1}-k_j)\cdot\pi\\
&= k_n+(k_N-k_{N+1})+(k_{N+1}-k_{N+2})+\cdots+(k_{n-1}-k_n)\\
&= k_N.
\end{aligned}$$

Isso mostra que a função $\phi(x, y)$ satisfaz as condições de contorno em (6). Em resumo, mostramos que a função $\phi(x, y)$ definida em (7) é uma solução do problema de Dirichlet em (6). Esta solução será usada para determinar uma fórmula integral para uma solução de um tipo mais geral de problema de Dirichlet no semiplano superior $y > 0$.

---

EXEMPLO 1 **Solução de um Problema de Dirichlet no Semiplano Superior**

Usemos (7) para resolver o problema de Dirichlet

*Resolver:*
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,\ -\infty<x<\infty,\ y>0$$

*Sujeito a:*
$$\phi(x,0)=\begin{cases} 2, & -\infty<x<0\\ -1, & 0<x<3\\ 5, & 3<x<\infty,\end{cases}$$

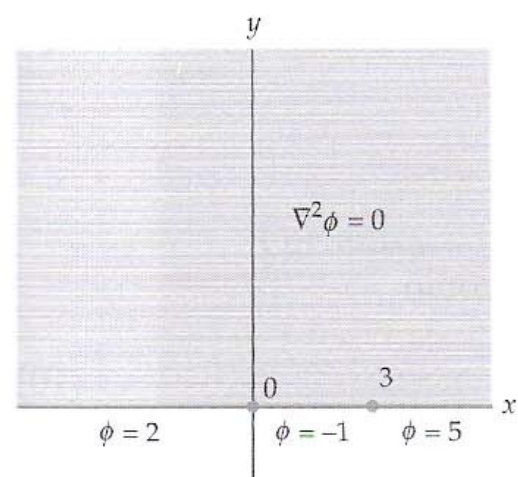



Figura 7.4.3 Figura para o Exemplo 1

ilustrado na Figura 7.4.3.

**Solução** Identificando $k_0 = 2$, $k_1 = -1$, $k_2 = 5$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ em (7), obtemos a solução

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= 5 + \frac{1}{\pi}(2+1)\,\mathrm{Arg}\,(z-0) + \frac{1}{\pi}(-1-5)\,\mathrm{Arg}\,(z-3)\\ &= 5 + \frac{3}{\pi}\mathrm{Arg}\,(z) - \frac{6}{\pi}\mathrm{Arg}\,(z-3).\end{aligned}$$

□

**Fórmula Integral de Poisson** Um caso especial do problema de Dirichlet (6) ocorre quando $k_0 = k_n = 0$.

*Resolver:*

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ y > 0 \tag{8}$$

*Sujeito a:*

$$\phi(x,0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_{n-1}, & x_{n-1} < x < x_n \\ 0, & x_n < x < \infty. \end{cases}$$

Substituindo $z_i = z - x_i$, com $i = 1, 2, ..., n$, e identificando $k_0 = k_n = 0$, a solução dada por (7) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= 0 + \frac{1}{\pi}[(0-k_1)\,\mathrm{Arg}\,z_1 + (k_1-k_2)\,\mathrm{Arg}\,z_2 + \cdots + (k_{n-1}-0)\,\mathrm{Arg}\,z_n]\\ &= \frac{1}{\pi}[k_1(\mathrm{Arg}\ z_2 - \mathrm{Arg}\ z_1) + k_2(\mathrm{Arg}\ z_3 - \mathrm{Arg}\ z_2) + \cdots + k_{n-1}(\mathrm{Arg}\ z_n - \mathrm{Arg}\ z_{n-1})]\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{\pi}(\mathrm{Arg}\,z_{j+1} - \mathrm{Arg}\,z_j)\end{aligned}$$

Ou seja, a função

$$\phi(x,y) = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{\pi}[\mathrm{Arg}\,(z-x_{j+1}) - \mathrm{Arg}\,(z-x_j)] \tag{9}$$

é uma solução do problema de Dirichlet em (8). Podemos escrever (9) em termos de uma integral imprópria real. Para isso, tomemos uma variável real $t$ e observemos que, se $y > 0$,

$$\mathrm{Arg}\,(z-t) = \cot^{-1}\left(\frac{x-t}{y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\mathrm{Arg}\,(z-t) = \frac{y}{(x-t)^2+y^2}.$$

Ou seja,

$$\mathrm{Arg}(z_{j+1}) - \mathrm{Arg}(z_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{d}{dt}\left[\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right]dt.$$

Com essas substituições, (9) passa a

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{k_j y}{(x-t)^2+y^2}dt.$$

Como $\phi(x, 0) = 0$ quando $x < x_1$ ou $x > x_n$, $\phi(x, y)$ também pode ser escrita como

$$\phi(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(t,0)}{(x-t)^2+y^2}dt. \tag{10}$$

A fórmula integral em (10) é conhecida como **fórmula integral de Poisson** para o semiplano superior $y > 0$ e fornece a solução $\phi(x, y)$ do problema de Dirichlet em (8). A fórmula integral de Poisson também

pode ser usada para resolver um problema de Dirichlet mais geral, em que as condições de contorno são especificadas por função qualquer que seja contínua por partes e limitada. Este é o conteúdo do próximo teorema.

**Teorema 7.4.1 Fórmula Integral de Poisson para o Semiplano**

Seja $f(z)$ uma função contínua por partes e limitada em $-\infty < x < \infty$. Então, a função definida por

$$\phi(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2}dt \tag{11}$$

é uma solução do problema de Dirichlet no semiplano superior $y > 0$ cuja condição de contorno é $\phi(x, 0) = f(x)$ em todos os pontos de continuidade de $f$.

Lamentavelmente há poucas funções $f$ para as quais a fórmula integral de Poisson (11) pode ser calculada. O próximo exemplo representa uma exceção a esta observação.

EXEMPLO 2 **Uso da Fórmula Integral de Poisson**

Figura 7.4.4 Figura para o Exemplo 2

Usemos a fórmula integral de Poisson (11) para determinar uma solução do problema de Dirichlet

$$\textit{Resolver:} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ y > 0$$

$$\textit{Sujeito a:} \quad \phi(x, 0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < \infty, \end{cases}$$

ilustrado na Figura 7.4.4.

**Solução** Primeiro definimos uma função real $f$ como $f = \phi(x, 0)$. Logo, $f(x) = x$ no intervalo $-1 < x < 1$ e $f(x) = 0$ em todos os outros pontos. Logo, $f$ é uma função contínua por partes e limitada em toda a reta real $-\infty < x < \infty$. Depois de substituir o símbolo $x$ pela variável de integração $t$, identificamos $f(t) = \phi(t, 0)$ para $-1 < t < 1$ e $f(t) = 0$ para todos os outros valores de $t$. Com isso, (11) nos fornece

$$\phi(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t, 0)}{(x-t)^2 + y^2}dt = \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{t}{(x-t)^2 + y^2}dt.$$

Com as substituições $s = x - t$ e $ds = -dt$, esta integral passa a

$$\phi(x, y) = -\frac{y}{\pi}\int_{x+1}^{x-1} \frac{x - s}{s^2 + y^2}ds = -\frac{y}{\pi}\int_{x+1}^{x-1} \frac{x}{s^2 + y^2}ds + \frac{y}{\pi}\int_{x+1}^{x-1} \frac{s}{s^2 + y^2}ds.$$

Do cálculo elementar, temos

$$\int \frac{x}{s^2 + y^2}ds = \frac{x}{y}\tan^{-1}\left(\frac{s}{y}\right) + C_1$$

e

$$\int \frac{s}{s^2 + y^2}ds = \frac{1}{2}\log_e\left(s^2 + y^2\right) + C_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= -\frac{x}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{s}{y}\right)\Bigg|_{s=x+1}^{s=x-1} + \frac{y}{2\pi}\log_e\left(s^2 + y^2\right)\Bigg|_{s=x+1}^{s=x-1} \\ &= \frac{x}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{y}\right)\right] + \frac{y}{2\pi}\log_e\left[\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}\right] \end{aligned}$$

é uma solução do problema de Dirichlet. ❑

**Fórmula para o Disco Unitário** Uma fórmula integral de Poisson para o disco unitário também pode ser deduzida. Esta fórmula integral fornece uma solução de um problema de Dirichlet no disco unitário aberto $|z| < 1$, sujeito a certos tipos de condições de contorno. O próximo teorema enuncia o resultado de forma precisa.

**Teorema 7.4.2 Fórmula Integral de Poisson para o Disco Unitário**

Seja $f(z)$ uma função complexa para a qual os valores $f(e^{i\theta})$ na circunferência unitária $z = e^{i\theta}$ representam, para $-\pi < \theta < \pi$, uma função contínua por partes e limitada. A função definida por

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt \tag{12}$$

é uma solução do problema de Dirichlet no disco unitário aberto $|z| < 1$ sujeito à condição de contorno $\phi(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = f(e^{i\theta})$ em todos os pontos de continuidade de $f$.

Como no caso do Teorema 7.4.1, a integral dada em (12) raramente pode ser expressa em termos de funções elementares. Quando não pudermos calcular o valor da integral devemos fazer uso de métodos numéricos para calcular valores aproximados de uma solução dada por (12).

---

**EXEMPLO 3 Uso da Fórmula Integral de Poisson**

Usemos a fórmula integral de Poisson (12) para calcular uma solução do problema de Dirichlet

*Resolver:* $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1$

*Sujeito a:* $\phi(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = |\theta|, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$

ilustrado na Figura 7.4.5.

**Figura 7.4.5** Figura para o Exemplo 3

**Solução** A função $f(e^{i\theta}) = \phi(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = |\theta|$ é contínua por partes e limitada no intervalo $-\pi < \theta < \pi$. Portanto, identificando $f(e^{it}) = \phi(\cos t, \text{sen}\,t) = |t|$ em (12), obtemos a fórmula integral

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt.$$

Esta integral não pode ser calculada em termos de funções elementares. No entanto, com o emprego do comando **NIntegrate** em *Mathematica* podemos calcular valores aproximados da função $\phi(x, y)$. Por exemplo, *Mathematica* indica que $\phi(\frac{1}{2}, 0) \approx 0{,}9147$ e $\phi(0, \frac{1}{2}) \approx 1{,}5708$. ❑

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.4 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro)*

Nos Problemas 1–4, use (7) para resolver o dado problema de Dirichlet no semiplano superior $y > 0$.

**1.**

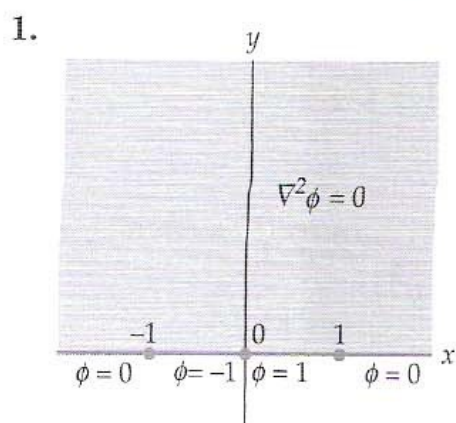



**Figura 7.4.6** Figura para o Problema 1

**2.**

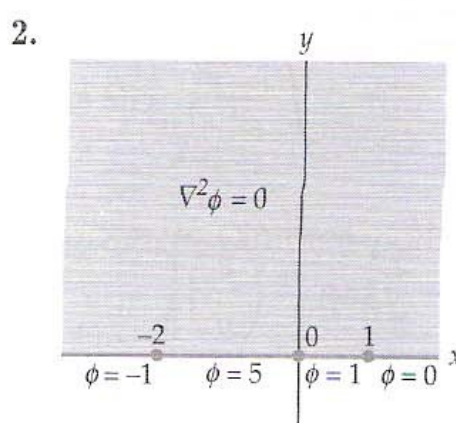



**Figura 7.4.7** Figura para o Problema 2

3.

**Figura 7.4.8** Figura para o Problema 3

4.

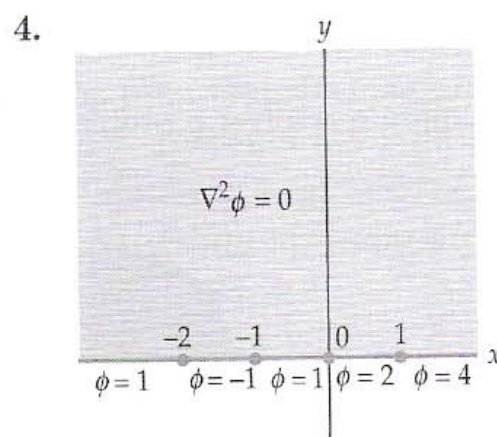



**Figura 7.4.9** Figura para o Problema 4

Nos Problemas 5–8, use a fórmula integral de Poisson (11) para resolver o problema de Dirichlet no semiplano superior $y > 0$, sujeito às condições de contorno especificadas.

**5.** $\phi(x,0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 2x - 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < \infty \end{cases}$

**6.** $\phi(x,0) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < \infty \end{cases}$

**7.** $\phi(x,0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < \infty \end{cases}$

**8.** $\phi(x,0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < \infty \end{cases}$

**9.** **(a)** Use as técnicas apresentadas na Seção 6.6 e deduza as seguintes fórmulas integrais

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s}{s^2 + a^2} ds = \frac{\pi e^{-a}}{a} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2 + a^2} ds = 0 \ \text{ para } a > 0.$$

**(b)** Resolva o problema de Dirichlet no semiplano superior $y > 0$, sujeito à condição de contorno $\phi(x, 0) = \cos x$, $-\infty < x < \infty$. [*Sugestão*: faça a substituição $s = t - x$ e use as fórmulas na parte (a).]

**10.** Resolva o problema de Dirichlet no semiplano superior $y > 0$, sujeito à condição de contorno $\phi(x, 0) = \operatorname{sen} x$, $-\infty < x < \infty$. [*Sugestão*: faça a substituição $s = t - x$ e use as fórmulas na parte (a) do Problema 9.]

## Foco em Conceitos

**11.** Seja $f(z)$ uma função complexa, contínua por partes e limitada no disco unitário $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $f(e^{i\theta})$. Seja $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, um ponto no interior da circunferência unitária. Mostre que a fórmula integral de Poisson (12) pode ser escrita como

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)}dt. \qquad (12)$$

**12.** Neste problema é determinada uma solução do problema de Dirichlet no disco unitário sujeito a uma condição de contorno contínua por partes. Ou seja, é deduzida uma fórmula para uma solução do problema de um Dirichlet no disco unitário análogo ao problema de Dirichlet (6) no semiplano.

**(a)** Comprove que

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)}dt = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{1+r}{1-r}\tan\left(\frac{t-\theta}{2}\right)\right] + C. \qquad (14)$$

**(b)** Sejam $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$ $n$ pontos distintos no intervalo $(-\pi, \pi)$. Explique por que (13) e (14) podem ser usadas para resolver o problema de Dirichlet

*Resolver:* $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1$

*Sujeito a:* $\phi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \begin{cases} k_0, & -\pi < \theta < \theta_1 \\ k_1, & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_n, & \theta_n < \theta < \pi. \end{cases}$

**13.** Use os Problemas 11 e 12 para o resolver o problema de Dirichlet no disco unitário mostrado na Figura 7.4.10

**14.** Use os Problemas 11 e 12 para o resolver o problema de Dirichlet no disco unitário mostrado na Figura 7.4.11.

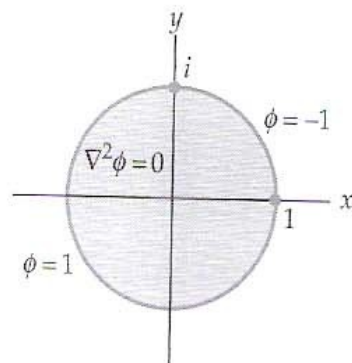
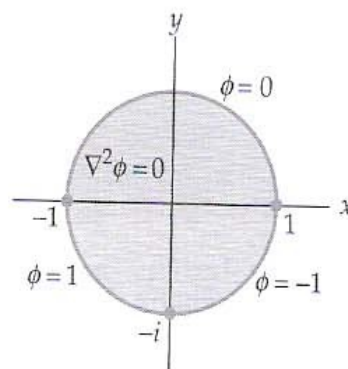



**Figura 7.4.10** Figura para o Problema 13 **Figura 7.4.11** Figura para o Problema 14

**Tarefas para o Laboratório de Computação**

Nos Problemas 15 e 16, (**a**) use a fórmula integral de Poisson (12) para determinar uma representação integral de uma solução do dado problema de Dirichlet no disco unitário e (**b**) use um SAC para calcular imagens aproximadas da solução nos pontos $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(0, \frac{1}{3})$.

**15.**

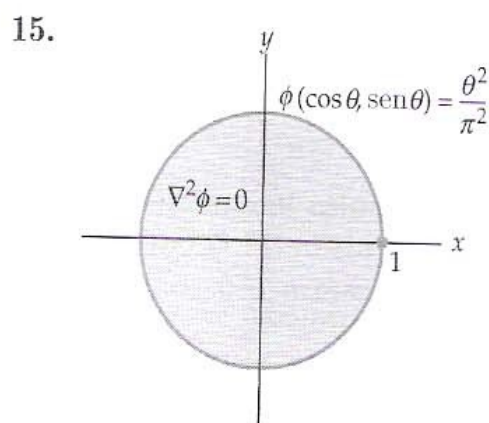



**Figura 7.4.12** Figura para o Problema 15

**16.**

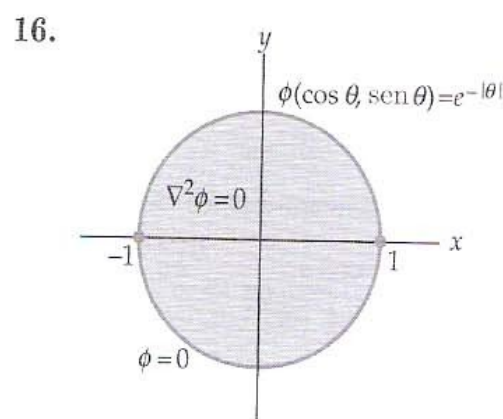



**Figura 7.4.13** Figura para o Problema 16

## 7.5 Aplicações

Nesta seção reexaminaremos o método apresentado na Seção 4.5 para a solução de problemas de Dirichlet; aqui incorporaremos as novas transformações definidas neste capítulo e no Apêndice III. Descreveremos, ainda, um processo similar para a solução de um novo tipo de problema de valores de contorno baseado na determinação de uma transformação conforme entre dois domínios. Isso nos permitirá investigar problemas de valores de contorno mais complexos que ocorrem na modelagem bidimensional de eletrostática e de fluxo fluido. Concluiremos a seção com uma aplicação de transformação conforme a problemas que tratam da determinação de um fluxo irrotacional de um fluido incompressível, ou seja, o fluxo de um fluido ideal em uma região do plano.

### 7.5.1 Problemas de Valores de Contorno

**Problemas de Dirichlet Revisitados** Seja $D$ um domínio no plano $z$ e seja $g$ uma função definida na fronteira $C$ de $D$. O problema de determinar uma função $\phi(x, y)$ que satisfaça a equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, ou

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

em $D$ que seja igual a $g$ na fronteira de $D$ é conhecido como um **problema de Dirichlet**.

Na Seção 4.5 vimos que funções analíticas podem ser usadas para resolver certos problemas de Dirichlet. Para obter uma solução de um problema de Dirichlet em um domínio $D$ determinamos uma trans-

formação analítica de $D$ em um domínio $D'$, no qual o problema de Dirichlet associado ou transformado possa ser resolvido. Ou seja, determinamos uma transformação $w = f(z)$ de $D$ em $D'$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em $D$. Segundo o Teorema 4.5.1 da Seção 4.5, se $\Phi(u, v)$ for uma solução do problema de Dirichlet transformado em $D'$ então $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ é uma solução do problema de Dirichlet original em $D$. Dessa forma, o método apresentado na Seção 4.5 para a solução de problemas de Dirichlet consiste nos seguintes quatro passos:

- Determinar uma transformação analítica $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ do domínio $D$ no domínio $D'$.
- Transformar as condições de contorno de $D$ em condições de contorno de $D'$.
- Resolver o problema de Dirichlet transformado em $D'$.
- Formar $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$.

A Seção 4.5 apresenta uma discussão detalhada desses passos.

Neste capítulo investigaremos alguns tópicos que podem ser úteis na execução desses quatro passos. A tabela de transformações conformes discutida na Seção 7.1, transformações fracionárias lineares estudada na Seção 7.2 e a transformação de Schwarz-Christoffel da Seção 7.3 representam valiosas fontes de transformações a serem usadas no Passo 1. Além disso, se $D'$ for tomado como o semiplano superior $y > 0$ ou o disco unitário $|z| < 1$ as fórmulas integrais de Poisson da Seção 7.4 fornecem meios para que possamos determinar uma solução do associado problema de Dirichlet em $D'$.

Nos exemplos a seguir lançaremos mão de algumas ideias das seções anteriores deste capítulo para resolver problemas de Dirichlet que ocorrem nas áreas de eletrostática, fluxo fluido e fluxo de calor. Recordemos, da Seção 3.3, que se a função $\phi(x, y)$ satisfizer a equação de Laplace (1) em algum domínio $D$ então $\phi(x, y)$ é harmônica em $D$. Além disso, se $\phi(x, y)$ for uma conjugada harmônica de $\phi(x, y)$ em $D$ então a função

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

é analítica em $D$ e é denominada **função potencial complexo**. As curvas de nível de $f$ e de $\varphi$ têm importantes interpretações físicas em matemática aplicada, que são resumidas na Tabela 3.4.1.

---

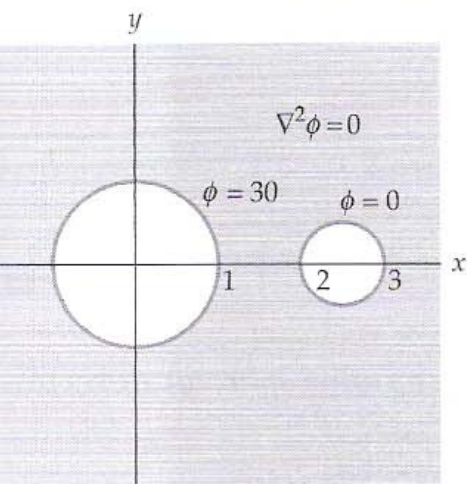
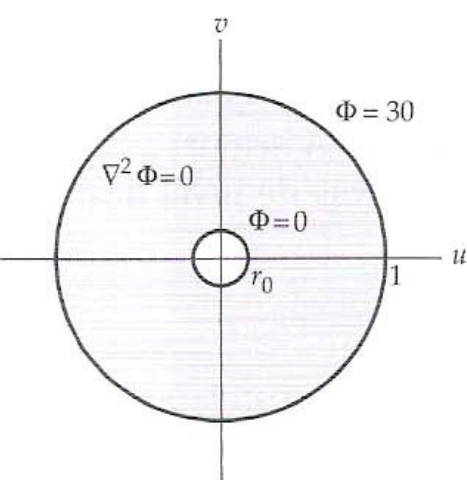
## EXEMPLO 1 Problema de Fluxo de Calor

(a) Problema de Dirichlet

(b) Problema de Dirichlet transformado

**Figura 7.5.1** Figura para o Exemplo 1

Determinemos a temperatura de estado estacionário $\phi$ no domínio $D$ que consiste em pontos fora das duas circunferências $|z| = 1$ e $|z - \frac{5}{2}| = \frac{1}{2}$, mostrado em cinza-escuro na Figura 7.5.1(a) tal que $\phi$ satisfaz as condições de contorno indicadas.

**Solução** A temperatura de estado estacionário $\phi$ é uma solução da equação de Laplace (1) em $D$ que satisfaz as condições de contorno

$$\phi(x, y) = 30 \quad \text{se } x^2 + y^2 = 1,$$
$$\phi(x, y) = 0 \quad \text{se } \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Resolveremos este problema seguindo os quatro passos listados anteriormente.

**Passo 1** A Entrada C-1 do Apêndice III indica que podemos mapear $D$ em uma região anelar. Identificando $b = 1$ e $c = 3$ na Entrada C-1, temos

$$a = \frac{bc + 1 + \sqrt{(b^2 - 1)(c^2 - 1)}}{b + c} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5},$$

$$r_0 = \frac{bc - 1 - \sqrt{(b^2 - 1)(c^2 - 1)}}{c - b} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Dessa forma, o domínio $D$ é mapeado na região anelar $5 - 2\sqrt{6} < w < 1$, mostrada em cinza-claro na Figura 7.5.1(b), pela função analítica $w = f(z)$, com

$$f(z) = \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5}. \tag{2}$$

**Passo 2** A inspeção da Entrada C-1 do Apêndice III mostra que a circunferência de fronteira $|z - \frac{5}{2}| = \frac{1}{2}$ é mapeada na circunferência de fronteira $|w| = r_0 = 5 - 2\sqrt{6}$. Com isso a condição de contorno $\phi = 0$ é transformada na condição de contorno $\Phi = 0$ na circunferência $|w| = 5 - 2\sqrt{6}$. De modo similar, vemos que a condição de contorno $\phi = 30$ na circunferência $|z| = 1$ é transformada na condição de contorno $\Phi = 30$ na circunferência $|w| = 1$ (Figura 7.5.1(b)).

**Passo 3** A forma da região anelar e o fato de que as duas condições de contorno são constantes na Figura 7.5.1(b) sugerem que uma solução do problema de Dirichlet transformado é dada por uma função $\Phi(u, v)$ definida em termos do módulo $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ de $w = u + iv$. O Problema 14 do Conjunto de Exercícios 3.4 pede que seja mostrado que uma solução é dada por

$$\Phi(u, v) = A \log_e \sqrt{u^2 + v^2} + B, \tag{3}$$

onde

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\log_e(a/b)} \quad \text{e} \quad B = \frac{-k_0 \log_e b + k_1 \log_e a}{\log_e(a/b)}.$$

Segundo a definição de $k_0$, $k_1$, $a$ e $b$ dada no Problema 14, temos $a = 5 - 2\sqrt{6}$, $b = 1$, $k_0 = 0$ e $k_1 = 30$. Com isso, obtemos a solução

$$\Phi(u, v) = \frac{-30 \log_e \sqrt{u^2 + v^2}}{\log_e \left(5 - 2\sqrt{6}\right)} + 30 \tag{4}$$

do problema de Dirichlet transformado.

**Passo 4** O último passo consiste em substituir as partes real e imaginária da função *f* dada por (2) pelas variáveis $u$ e $v$ em (4). Como

$$u(x, y) + iv(x, y) = \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{\left(7 + 2\sqrt{6}\right) z - 5},$$

temos

$$\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2} = \left| \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{\left(7 + 2\sqrt{6}\right) z - 5} \right|.$$

Logo, a temperatura de estado estacionário é dada pela função

$$\phi(x, y) = \frac{-30}{\log_e \left(5 - 2\sqrt{6}\right)} \log_e \left| \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{\left(7 + 2\sqrt{6}\right) z - 5} \right| + 30.$$

❑

Uma função potencial complexo $\mathbf{\Omega}(z) = \phi(x, y) + i\varphi(x, y)$ para a função harmônica $\phi(x, y)$ determinada no Exemplo 1 é

$$\mathbf{\Omega}(z) = \frac{-30}{\log_e \left(5 - 2\sqrt{6}\right)} \mathrm{Ln} \left( \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 - 2\sqrt{6})z - 5} \right)$$

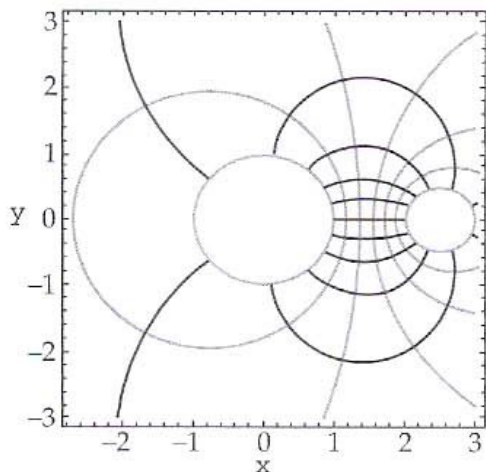



**Figura 7.5.2** Isotérmicas e linhas de fluxo para o Exemplo 1

Se definirmos esta função como **Ω[z]** em *Mathematica*, as partes real e imaginária $\phi(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ de $\mathbf{\Omega}(z)$ são dadas por **Re[Ω[z]]** e **Im[Ω[z]]**, respectivamente. A seguir, podemos usar o comando **ContourPlot** em *Mathematica* para desenhar as curvas de nível das partes real e imaginária de **Ω**. Por exemplo, o comando

```
ContourPlot[ Re[Ω[x + I y]] , {x, a, b}, {y, c, d} ]
```

produz um gráfico das curvas de nível $\phi = c_1$ na região retangular $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ no plano. Segundo a Tabela 3.4.1, as curvas de nível de $\phi$ e de $\varphi$ representam isotérmicas e linhas de fluxo de calor, respectivamente. Os dois conjuntos de curvas de nível são mostrados na Figura 7.5.2. As isotérmicas são as curvas mostradas em cinza, e as linhas de fluxo as curvas mostradas em preto.

EXEMPLO 2 **Problema de Eletrostática**

(a) Problema de Dirichlet

(b) Problema de Dirichlet transformado

**Figura 7.5.3** Figura para o Exemplo 2

Determinemos o potencial eletrostático $\phi$ no domínio $D$ entre as circunferências $|z| = 1$ e $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, mostrado em cinza-claro na Figura 7.5.3(a), que satisfaz as condições de contorno indicadas.

**Solução** O potencial eletrostático $\phi$ é uma solução da equação de Laplace (1) em $D$ que satisfaz as condições de contorno

$$\phi(x, y) = -10 \quad \text{em} \quad x^2 + y^2 = 1,$$
$$\phi(x, y) = 20 \quad \text{em} \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Procederemos como no Exemplo 1

**Passo 1** O dado domínio $D$ pode ser mapeado na fita horizontal infinita $0 < v < 1$, mostrada em cinza-claro na Figura 7.5.3(b), por uma transformação fracionária linear. Uma forma de fazer isso consiste em exigir que os pontos $1$, $i$ e $-1$, na circunferência $|z| = 1$, sejam mapeados nos pontos $\infty$, $0$ e $1$, respectivamente. Segundo o Teorema 7.2.2, a desejada transformação fracionária linear $w = T(z)$ deve satisfazer

$$\frac{z-1}{z+1}\frac{i+1}{i-1} = \lim_{w_1 \to \infty} \frac{w - w_1}{w - 1}\frac{0-1}{0-w_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{z-1}{z+1}(-i) = \frac{-1}{w-1}.$$

Resolvendo para $w = T(z)$, obtemos

$$T(z) = (1-i)\frac{z-i}{z-1}. \tag{5}$$

Por construção, $w = T(z)$ mapeia a circunferência $|z| = 1$ na reta $v = 0$. Além disso, como o polo $z = 1$ de (5) está na circunferência $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, esta circunferência também é mapeada em uma reta. A reta imagem pode ser determinada a partir das imagens de dois pontos na circunferência $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Para os pontos $z = 0$ e $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ na circunferência $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, temos $T(0) = 1 + i$ e $T(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = -1 + i$. Portanto, a imagem da circunferência $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ deve ser a reta horizontal $v = 1$. Usando o ponto de teste $z = -\frac{1}{2}$, temos $T(-\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{3}i$; com isso, concluímos que o domínio mostrado em cinza-escuro entre as circunferências na Figura 7.5.3(a) é mapeado, por $w = T(z)$, no domínio mostrado em cinza-claro entre as retas horizontais na Figura 7.5.3(b).

**Passo 2** No Passo 1 vimos que $w = T(z)$ transforma a circunferência $|z| = 1$ na reta horizontal $v = 0$ e a circunferência $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, na reta horizontal $v = 1$. Portanto, as condições de contorno transformadas são $\Phi = -10$ na reta $v = 0$ e $\Phi = 20$ na reta $v = 1$ (Figura 7.5.3(b)).

**Passo 3** Segundo o Exemplo 2 da Seção 3.4 e o Problema 12 do conjunto de Exercícios 3.4, uma solução do problema de Dirichlet transformado é dada por

$$\Phi(u, v) = 30v - 10.$$

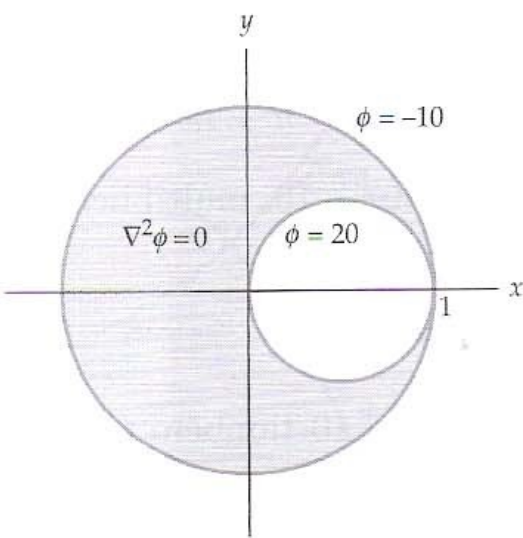
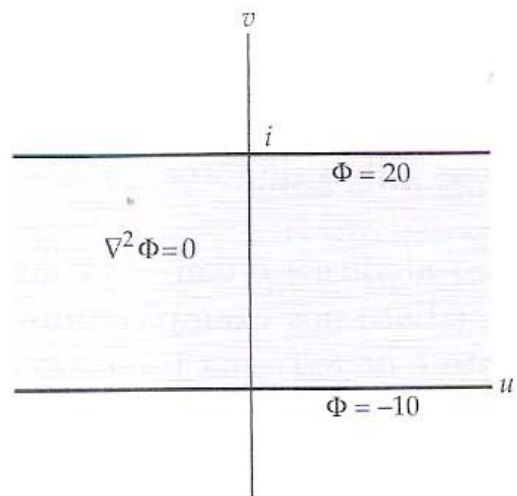
**Passo 4** Uma solução do problema de Dirichlet original é, então, obtida com a substituição das variáveis $u$ e $v$ em $\Phi(u, v)$ pelas partes real e imaginária de $T(z)$ definida em (5). Substituindo o símbolo $z$ por $x + iy$ em $T(z)$ e simplificando, obtemos

$$T(x+iy) = (1-i)\frac{x+iy-i}{x+iy-1} = (1-i)\frac{x+i(y-1)}{x-1+yi}\frac{x-1-iy}{x-1-iy}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x-2y+1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}i.$$

Portanto,

$$\phi(x, y) = 30\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} - 10 \tag{6}$$

é a desejada função potencial eletrostático. □

Uma função potencial complexo para a função harmônica $\phi(x, y)$ dada por (6) no Exemplo 2 pode ser determinada da seguinte forma: se $\Omega(z)$ for um potencial complexo para $\phi$, $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ e é analítico em $D$. Do Passo 4 do Exemplo 2, a função complexa $T(z)$ dada por (5) tem partes real e imaginária $u = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}{(x-1)^2 + y^2}$ e $v = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2}$, respectivamente. Ou seja, $T(z) = u + iv$. Do Passo 4 também temos $\phi(x, y) = 30v - 10$. Para obter uma função cuja parte real seja $30v - 10$, multiplicamos $T(z)$ por $-30i$ e subtraímos 10:

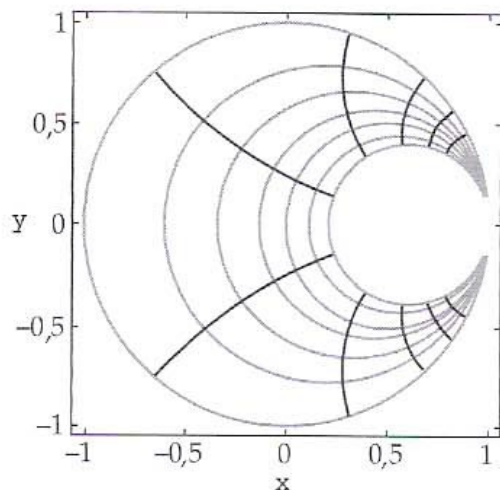



**Figura 7.5.4** Curvas equipotenciais e linhas de força para o Exemplo 2

$$-30iT(z) - 10 = -30i(u + iv) - 10 = 30v - 10 - 30ui.$$

Como $T(z) = (1 - i)\dfrac{z - i}{z - 1}$ é analítica em $D$, a função $-30iT(z) - 10$ também é analítica em $D$. Logo,

$$\Omega(z) = -30i\,(1 - i)\,\frac{z - i}{z - 1} - 10 \tag{7}$$

é uma função potencial complexo para $\phi(x, y)$. Como $\phi$ representa o potencial eletrostático, as curvas de nível para as partes real e imaginária de $\Omega$ representam curvas equipotenciais e linhas de força, respectivamente. A Figura 7.5.4 mostra um gráfico gerado com *Mathematica* onde as curvas equipotenciais são cinzas e as linhas de força, pretas.

**Problemas de Neumann** O Teorema 7.1.1 afirma que uma transformação analítica é conforme em um ponto onde a derivada é não nula. Este fato não parece ter importância imediata nos exemplos anteriores, que tratavam da solução de problemas de Dirichlet. No entanto, este fato é de extrema importância em outra classe de problemas de valores de contorno associados à equação de Laplace e que recebe a denominação de problemas de Neumann.

### *Problema de Neumann*

*Seja $D$ um domínio no plano e seja $h$ uma função definida na fronteira $C$ de $D$. O problema de determinar uma função $\phi(x, y)$ que satisfaça a equação de Laplace em $D$ e cuja derivada normal $d\phi/dn$ seja igual a $h$ na fronteira $C$ de $D$ é denominado* ***problema de Neumann.***

Certos tipos de problemas de Neumann ocorrem naturalmente no estudo de eletrostática, fluxo fluido e fluxo de calor. Por exemplo, consideremos o problema de determinar a temperatura de estado estacionário $\phi$ em um domínio $D$ com fronteira $C$. Se a temperatura na fronteira $C$ de $D$ for especificada teremos um problema de Dirichlet. No entanto, é possível que toda a fronteira ou parte dela seja **isolada**. Isso significa que não haverá fluxo de calor através da fronteira; pode ser mostrado que isso implica que a derivada direcional de $\phi$ na direção do vetor $\mathbf{n}$ normal a $C$ é 0. Esta derivada recebe a denominação **derivada normal** e é denotada por $d\phi/dn$. Em resumo, em um problema de fluxo de calor uma curva de fronteira isolada corresponde a uma condição de contorno da forma $d\phi/dn = 0$ e representa um exemplo de um problema de Neumann. Como afirma o próximo teorema, transformações conformes preservam condições de contorno da forma $d\phi/dn = 0$.

### Teorema 7.5.1 Preservação de Condições de Contorno

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função conforme em todos os pontos de uma curva suave $C$. Seja $C'$ a imagem de $C$ sob $w = f(z)$. Se a derivada normal $d\Phi/dN$ da função $\Phi(u, v)$ satisfizer

$$\frac{d\Phi}{dN} = 0$$

em todos os pontos em $C'$ no plano $w$, a derivada normal $d\phi/dn$ da função $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ satisfaz

$$\frac{d\phi}{dn} = 0$$

em todos os pontos em $C$ no plano $z$.

**Prova** Admitamos que $f$ e $h$ satisfaçam a hipótese do teorema. Seja $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto em $C$ e seja $w_0 = u_0 + iv_0 = f(z_0)$ sua imagem em $C'$. Recordemos do cálculo de múltiplas variáveis que se $\mathbf{N}$ for um vetor normal a $C'$ em $w_0$, a derivada normal em $w_0$ é dada pelo produto escalar

**Figura 7.5.5** Figura para a prova do Teorema 7.5.1

$$\frac{d\Phi}{dN} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{N},$$

onde $\nabla\Phi$ é o vetor gradiente $\Phi_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + \Phi_v(u_0, v_0)\mathbf{j}$. A condição $d\Phi/dN = 0$ implica que $\nabla\Phi$ e $\mathbf{N}$ são ortogonais, ou seja, que $\nabla\Phi$ é um vetor tangente a $C'$ em $w_0$. Seja $B'$ a curva de nível $\Phi(u, v) = c_0$ que contém $(u_0, v_0)$. Segundo o cálculo de múltiplas variáveis, o vetor gradiente $\nabla\Phi$ é ortogonal à curva $B'$. Consequentemente, como o gradiente é tangente a $C'$ e ortogonal a $B'$ concluímos que $C'$ é ortogonal a $B'$ em $w_0$ (Figura 7.5.5).

Agora, consideremos a curva de nível $B$ no plano $z$ dada por

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) = c_0.$$

O ponto $(x_0, y_0)$ está em $B$ e o vetor gradiente $\nabla\phi$ é ortogonal a $B$ neste ponto. Além disso, dado um ponto qualquer $(x, y)$ em $B$ no plano $z$, o ponto $(u(x, y), v(x, y))$ está em $B'$ no plano $w$. Ou seja, a imagem de $B$ sob $w = f(z)$ é $B'$. A curva $C$ cruza $B$ em $z_0$; como $f$ é conforme em $z_0$, o ângulo entre $C$ e $B$ em $z_0$ é igual ao ângulo entre $C'$ e $B'$ em $w_0$. No parágrafo anterior vimos que este ângulo é $\pi/2$, de modo que $C$ e $B$ são ortogonais em $z_0$. Como $\nabla\phi$ é ortogonal a $B$, $\nabla\phi$ é tangente a $C$. Se $\mathbf{n}$ for um vetor normal a $C$ em $z_0$, mostramos que $\nabla\phi$ e $\mathbf{n}$ são ortogonais. Portanto,

$$\frac{d\phi}{dn} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad \square$$

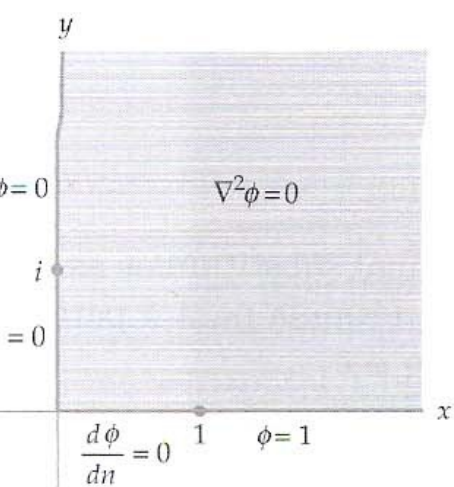
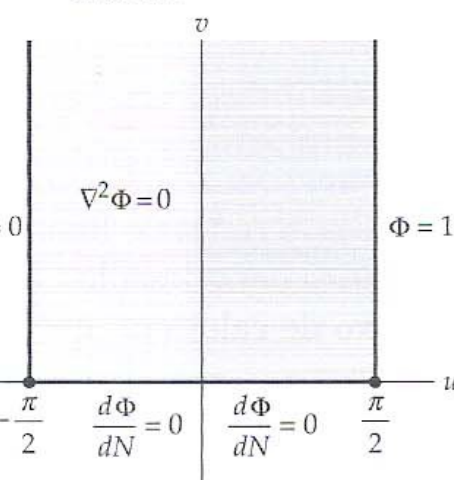
O Teorema 7.5.1 fornece um procedimento para a solução do problema de Neumann associado a condições de contorno da forma $d\phi/dn = 0$. Especificamente, seguimos os mesmo quatro passos definidos anteriormente para a solução de problemas de Dirichlet. Contudo, no Passo 1 determinamos uma transformação conforme de $D$ em $D'$. Uma vez que transformações conformes preservam condições de contorno da forma $d\phi/dn = 0$, a solução do correspondente problema de Neumann em $D'$ nos dará uma solução do problema de Neumann original. Como transformações analíticas são conformes em pontos que não sejam críticos, esta abordagem também pode ser empregada nos casos de condições de contorno **mistas**. Em resumo, estas são condições de contorno em que valores de $\phi$ são especificados em algumas curvas de fronteira e a derivada normal deve satisfazer $d\phi/dn = 0$ em outras curvas de fronteira.

(a) Problema de valores de contorno

Problema de valores de contorno transformado

**Figura 7.5.6** Figura para o Exemplo 3

---

EXEMPLO 3 **Problema de Fluxo de Calor**

Determinemos a temperatura de estado estacionário $\phi$ no primeiro quadrante, mostrado em cinza-escuro na Figura 7.5.6(a), que satisfaz as condições de contorno indicadas.

**Solução** A temperatura de estado estacionário $\phi$ é uma solução da equação de Laplace no domínio $D$ definido por $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, e que satisfaz as condições de contorno

$$\begin{aligned}\phi(0, y) &= 0, \quad y > 1\\ \phi(x, 0) &= 1, \quad x > 1\\ \frac{d\phi}{dn} &= 0, \text{ para } 0 < y < 1, x = 0, \text{ e } 0 < x < 1, y = 0.\end{aligned}$$

Determinaremos $\phi$ seguindo os quatro passos definidos no início desta seção.

**Passo 1** Como veremos no Passo 3, este tipo particular de problema de valores de contorno pode ser facilmente resolvido na fita vertical semi-infinita $-a < u < a$, $v > 0$, quando a curva de fronteira $-a < u < a$, $v > 0$, é isolada. Assim, neste passo determinamos uma transformação conforme do primeiro quadrante em uma fita vertical semi-

infinita. Identificando $\alpha = 2$ na Entrada E-4 do Apêndice III, vemos que a transformação $w = z^2$ mapeia o primeiro quadrante no semiplano superior $v > 0$. A seguir, aplicamos a transformação $w = \text{sen}^{-1} z$ da Entrada E-6. Sob esta transformação, o semiplano $y > 0$ é mapeado na fita vertical semi-infinita $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi$, $v > 0$. Portanto, a composição

$$w = \text{sen}^{-1}\left(z^2\right) \tag{8}$$

mapeia o primeiro quadrante $x > 0$, $y > 0$, no domínio $D'$ definido por $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi$, $v > 0$.

**Passo 2** Das Entradas E-4 e E-6 do Apêndice III, vemos que as curvas de fronteira $1 < x < \infty$, $y = 0$, e $1 < y < \infty$, $x = 0$, são mapeadas por $w = \text{sen}^{-1}(z^2)$ nas semirretas $u = \frac{1}{2}\pi$, $v > 0$, e $u = -\frac{1}{2}\pi$, $v > 0$, respectivamente. Também vemos que os segmentos $0 < x < 1$, $y = 0$, e $0 < y < 1$, $x = 0$, são mapeados nos segmentos $0 < u < \frac{1}{2}\pi$, $v = 0$, e $-\frac{1}{2}\pi < u < 0$, $v = 0$, respectivamente. Com isso, as condições de contorno transformadas são

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = 0, \ \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = 1, v > 0$$
$$\frac{d\Phi}{dN} = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, v = 0.$$

**Passo 3** A inspeção do domínio $D'$ e das condições de contorno transformadas sugere que uma solução $\Phi$ é uma função linear da variável $u$:

$$\Phi(u, v) = Au + B$$

para certas constantes reais $A$ e $B$. Como o vetor $\mathbf{N} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$ é normal à curva de fronteira $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi$, $v > 0$, temos

$$\frac{d\Phi}{dN} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{N} = A(0) + 0(1) = 0,$$

de modo que para quaisquer valores de $A$ e $B$, $\Phi$ satisfaz a condição de contorno para a derivada normal. Forçando

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = -A\frac{\pi}{2} + B = 0 \quad \text{e} \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = A\frac{\pi}{2} + B = 1,$$

podemos calcular os valores de $A$ e $B$, obtendo a solução

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{\pi}u + \frac{1}{2}. \tag{9}$$

**Passo 4** Para determinar uma solução do problema de valores de contorno original substituímos as variáveis $u$ e $v$ em (9) pelas partes real e imaginária da transformação (8). Como a fórmula para a parte real da expressão $\text{sen}^{-1}(z^2)$ é complicada, a forma mais simples de escrever a solução $\phi$ é

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi}\text{Re}\left[\text{sen}^{-1}\left(z^2\right)\right] + \frac{1}{2}.$$

❑

Como $1/\pi$ e $\frac{1}{2}$ são reais, uma função potencial complexo $\mathbf{\Omega}(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ para a função temperatura de estado estacionário $\phi$ determinada no Exemplo 3 é

$$\mathbf{\Omega}(z) = \frac{1}{\pi}\,\text{sen}^{-1}\left(z^2\right) + \frac{1}{2}.$$

As curvas de nível das partes real e imaginária de $\mathbf{\Omega}$ representam isotérmicas e linhas de fluxo de calor, respectivamente. Na Figura 7.5.7, usamos *Mathematica* para desenhar essas curvas. As isotérmicas são mostradas em cinza, e as linhas de fluxo de calor em preto.

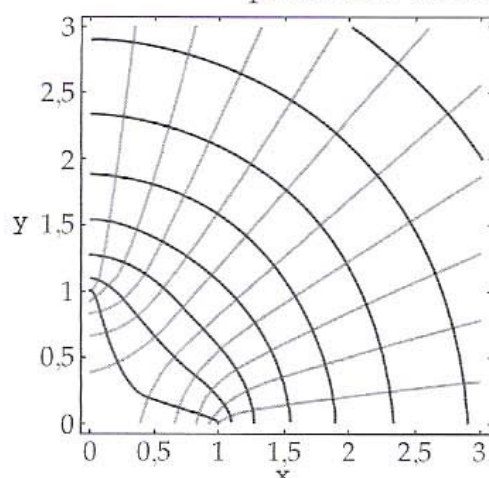



**Figura 7.5.7** Isotérmicas e linhas de fluxo de calor para o Exemplo 3

## 7.5.2 Fluxo Fluido

**Construção de Redes de Fluxo** Agora discutiremos um método para o uso de transformações conformes na modelagem de fluxo bidimensional de um fluido ideal. Re-

cordemos, da Seção 5.6, que um fluido ideal é um fluido não viscoso incompressível cujo fluxo é irrotacional. Se $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ for o potencial complexo de velocidade do fluxo de um fluido ideal em um domínio $D$, $\Omega(z)$ é analítica em $D$ e $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ é uma representação complexa do campo de velocidade. Além disso, as **linhas de fluxo** do fluxo de um fluido ideal são as curvas de nível $\psi(x, y) = c_2$; por isso, $\psi$ é denominada **função de fluxo** do fluxo.

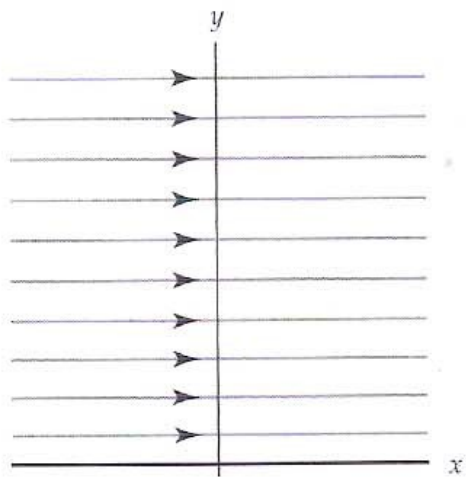



**Figura 7.5.8** Fluxo uniforme

Como um exemplo simples, consideremos a função analítica complexa $\Omega(z) = Az$, onde $A > 0$ é uma constante real. Como visto na parte (b) do Exemplo 3 da Seção 5.6, esta função é o potencial complexo de velocidade do campo de velocidade do fluxo de um fluido ideal cuja representação complexa é $f(z) = \overline{\Omega'(z)} = A$. Como $\Omega(z) = Az = Ax + iAy$, as linhas de fluxo deste fluxo são as curvas $y = c_2$. Portanto, todas as linhas de fluxo são horizontais (Figura 7.5.8). Recordemos, da Seção 5.6, que este fluxo particular é denominado **fluxo uniforme**.

O processo de construção do fluxo de um fluido ideal que permanece no interior de um dado domínio $D$ é denominado **construção de redes de fluxo**. Seja $C$ uma curva fronteira de $D$; então, a exigência de que o fluxo permaneça no interior de $D$ significa que não há fluxo através de $C$, ou seja, que a derivada direcional de $\psi$ da direção do vetor **n** normal a $C$ é 0. Como o vetor gradiente $\nabla\psi$ sempre é normal às curvas de nível $\psi(x, y) = c_2$, esta condição equivale a $\psi$ ser constante em $C$. Dito de outra forma, a fronteira de $D$ deve ser uma linha de fluxo do fluxo. O parágrafo a seguir resume esta discussão.

## *Construção de Redes de Fluxo*

Suponhamos que o potencial complexo de velocidade $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ seja analítico em um domínio $D$ e que $\psi$ seja constante na fronteira de $D$. Então, $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ é uma representação complexa do campo de velocidade do fluxo de um fluido ideal em $D$. Além disso, se uma partícula for posicionada em $D$ e permitida a fluir com o fluido, a rota $z(t)$ por ela percorrida permanecerá em $D$.

Muitos problemas de construção de redes de fluxo podem ser resolvidos com o uso de transformações conformes, de modo similar ao apresentado para a solução de problemas de Dirichlet e de Neumann. Para isso, consideramos o potencial complexo de velocidade como uma transformação conforme do plano $z$ no plano $w$. Se $z(t) = x(t) + iy(t)$ for uma parametrização de uma linha de fluxo $\psi(x, y) = c_2$ no plano $z$, então

$$w(t) = \Omega(z(t)) = \phi(x(t), y(t)) + i\psi(x(t), y(t)) = \phi(x(t), y(t)) + ic_2.$$

Por conseguinte, a imagem de uma linha de fluxo sob a transformação conforme $w = \Omega(z)$ é uma reta horizontal no plano $w$. Como a fronteira $C$ deve ser uma linha de fluxo, a imagem de $C$ sob $w = \Omega(z)$ deve ser uma reta horizontal. Ou seja, para determinar o potencial complexo de velocidade determinamos uma transformação conforme de $D$ em um domínio no plano $w$ que mapeie a fronteira $C$ de $D$ em uma reta horizontal. Contudo, em geral é mais fácil determinar uma transformação conforme $z = \Omega^{-1}(w)$, digamos, do semiplano superior $v \geq 0$ em $D$ que mapeie a fronteira $v = 0$ na fronteira $C$ de $D$. Se $z = \Omega^{-1}(w)$ for uma função biunívoca, sua inversa sob $w = \Omega(z)$ é o desejado potencial complexo de velocidade. Em resumo, o método descrito a seguir permite a solução de problemas de construção de redes de fluxo.

## *Solução do Problema de Construção de Redes de Fluxo*

*Seja $w = \Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ uma transformação conforme biunívoca do domínio $D$ no plano $z$ em um domínio $D'$ no plano $w$, tal que a imagem da fronteira $C$ de $D$ seja uma reta horizontal no plano $w$; então, $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ é uma representação complexa do fluxo de um fluido ideal em $D$.*

---

EXEMPLO 4 **Fluxo em Torno de uma Quina**

Construamos um fluxo de um fluido ideal no primeiro quadrante.

**Solução** Seja $D$ o primeiro quadrante $x > 0$, $y > 0$. Da Entrada E-4 do Apêndice III, identificando $\alpha = 2$, vemos que $w = \Omega(z) = z^2$ é uma transformação conforme biunívoca do domínio $D$ no semiplano superior

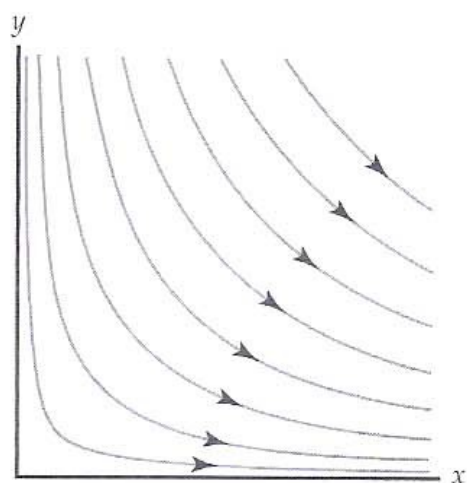



**Figura 7.5.9** Fluxo em torno de uma quina

$v > 0$ e que a imagem da fronteira de $D$ sob esta transformação é o eixo real $v = 0$. Logo, $f(z) = \overline{\Omega'(z)} = 2\bar{z}$ é uma representação complexa do fluxo de um fluido ideal no primeiro quadrante. Como $\Omega(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, as linhas de fluxo deste fluxo são as curvas $2xy = c_2$. Algumas linhas de fluxo foram desenhadas na Figura 7.5.9. Esta figura deve deixar claro por que este fluxo é referido como "fluxo em torno de uma quina". ❑

EXEMPLO 5 **Fluxo em Torno de um Cilindro**

Construamos um fluxo de um fluido ideal no domínio que consiste em todos os pontos fora da circunferência unitária $|z| = 1$ e no semiplano superior $y > 0$, mostrado na Figura 7.5.10.

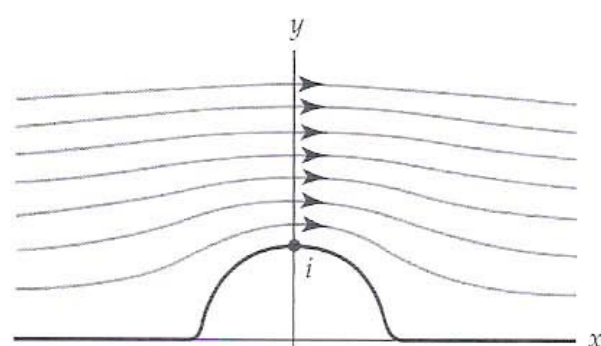



**Figura 7.5.10** Fluxo em torno de um cilindro

**Solução** Seja $D$ o domínio mostrado na Figura 7.5.10. Identificando $\alpha = 2$ na Entrada H-3 do Apêndice III, obtemos a transformação conforme biunívoca

$$w = \Omega(z) = z + \frac{1}{z}$$

de $D$ no semiplano superior $v > 0$. Além disso, a Entrada H-3 indica que a fronteira de $D$ é mapeada no eixo real $v = 0$. Portanto,

$$f(z) = \overline{\Omega'(z)} = \overline{1 - \frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{\bar{z}^2}$$

é uma representação complexa de um fluxo de um fluido ideal em $D$. Como

$$\Omega(z) = z + \frac{1}{z} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

as linhas de fluxo deste fluxo são as curvas

$$\psi(x, y) = c_2, \quad \text{ou} \quad y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c_2.$$

Algumas linhas de fluxo são ilustradas na Figura 7.5.10. ❑

Nem sempre é possível descrever as linhas de fluxo por meio de uma equação cartesiana nas variáveis $x$ e $y$. Esta situação ocorre quando uma transformação adequada $z = \Omega^{-1}(w)$ de um domínio $D'$ no plano $w$ no domínio $D$ no plano $z$ pode ser encontrada, mas não é possível resolver a transformação para $w = \Omega(z)$. Nesses casos é possível descrever as linhas de fluxos por meio de parametrizações.

EXEMPLO 6 **Linhas de Fluxo Definidas por Parametrização**

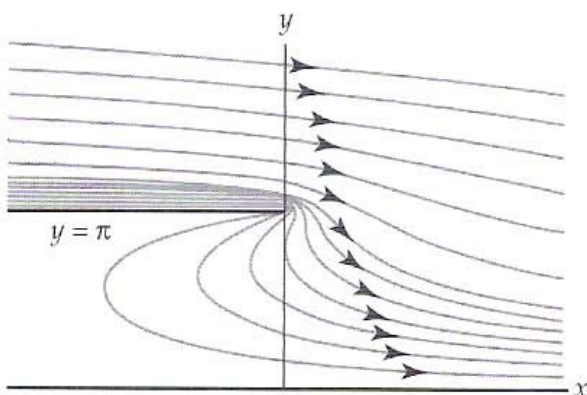



**Figura 7.5.11** Fluxo para o Exemplo 6

Construamos o fluxo de um fluido ideal no domínio $D$ que consiste em todos os pontos no semiplano superior $y > 0$, excluídos os pontos no raio $y = \pi$, $-\infty < x \leq 0$, como ilustrado na Figura 7.5.11.

**Solução** No Exemplo 4 da Seção 7.3 usamos a fórmula de Schwarz-Christoffel para determinar uma transformação conforme do semiplano superior $y > 0$ no domínio $D$. Substituindo o símbolo $z$ pelo símbolo $w$ na solução do Exemplo 4, obtemos a transformação

$$z = \Omega^{-1}(w) = w + \text{Ln}(w) + 1 \tag{10}$$

do semiplano superior $v > 0$ no domínio $D$. A inversa $\Omega$ da transformação em (10) é um potencial complexo de velocidade de um fluxo de um fluido ideal em $D$; contudo, não é possível resolver a equação para $w$ e obter uma fórmula explícita para $\Omega$. Para descrever as linhas de fluxo, recordemos que as linhas de fluxo em $D$ são as imagens das retas horizontais $v = c_2$, no semiplano superior $v > 0$, sob a transformação $z = w + \text{Ln}(w) + 1$ . Como uma reta horizontal em $D$ pode ser descrita por $w(t) = t + ic_2$, $-\infty < t < \infty$, as linhas de fluxo em $D$ são dadas parametricamente por

$$z(t) = \mathbf{\Omega}^{-1}(w(t)) = w(t) + \text{Ln}[w(t)] + 1 = t + ic_2 + \text{Ln}[t + ic_2] + 1,$$

ou $x(t) = t + \frac{1}{2}\log_e(t^2 + c_2^2) + 1$, $y(t) = c_2 + \text{Arg}(t + ic_2)$, $-\infty < t < \infty$. Algumas linhas de fluxo deste fluxo são ilustradas na Figura 7.5.11, desenhada com uso de *Mathematica*. ❑

Uma função de fluxo $\psi(x, y)$ é harmônica; no entanto, em contraste com um problema de Dirichlet, $\psi(x, y)$ não precisa ser limitada em $D$ e não satisfaz uma condição de contorno específica. Portanto, existem numerosas funções de fluxo distintas para um dado domínio $D$. Isto é ilustrado no próximo exemplo.

---

EXEMPLO 7 **Linhas de Fluxo Definidas por Parametrização**

**Figura 7.5.12** Fluxo para o Exemplo 7

A transformação conforme biunívoca

$$z = \mathbf{\Omega}^{-1}(w) = w + e^w + 1$$

também mapeia o semiplano superior $v > 0$ no domínio $D$ mostrado na Figura 7.5.11. As linhas de fluxo para este fluxo são parametrizadas por

$$z(t) = t + ic_2 + e^{t+ic_2} + 1,$$

ou $x(t) = t + e^t \cos c_2 + 1$, $y(t) = c_2 + e^t \operatorname{sen} c_2$, $\infty < t < \infty$. Examinando a ilustração das linhas de fluxo gerada por *Mathematica* e mostrada na Figura 7.5.12, notamos que este fluxo difere do que determinamos no Exemplo 6. ❑

**Fontes e Sumidouros** Recordemos, da Seção 5.6, que, se $\mathbf{F}$ for o campo de velocidade de um fluxo fluido bidimensional uma **fonte** é um ponto $z_0$ no qual fluxo é produzido, e **sumidouro** é um ponto $z_0$ no qual fluxo desaparece. Se $C$ for um contorno simples fechado, um valor não nulo do fluxo líquido através de $C$, ou seja, um valor não nulo da integral $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds$, indica a presença de fonte ou sumidouro no interior de $C$. Vimos, na Seção 5.6 que se $\mathbf{F}$ for o campo de velocidade do fluxo de um fluido incompressível em um domínio $D$, não há fontes ou sumidouros em $D$. Contudo, incompressibilidade não exclui a existência de uma fonte ou um sumidouro na fronteira de $D$. Fontes ou sumidouros na fronteira de $D$ são usados para modelar fluxos bidimensionais em que o fluido entra ou deixa $D$ através de uma pequena abertura na fronteira.

No Problema 23 do conjunto de Exercícios 5.6 determinamos que uma fonte em um ponto $z = x_1$ na fronteira $y = 0$ do semiplano superior $y > 0$ pode ser descrita pelo potencial complexo de velocidade

$$\mathbf{\Omega}(z) = k\text{Ln}\,(z - x_1)\,, \tag{11}$$

onde $k$ é uma constante positiva. Do mesmo modo, $z = x_1$ é um sumidouro quando $k$ for uma constante negativa. A intensidade da fonte ou sumidouro é proporcional a $|k|$. Um fluxo que contenha fontes e sumidouros pode ser descrito por meio da superposição de funções da forma (11). Por exemplo,

$$\mathbf{\Omega}(z) = \text{Ln}(z+1) - \text{Ln}(z-1) = \text{Ln}\frac{z+1}{z-1} \tag{12}$$

**Figura 7.5.13** Fonte e sumidouro

é um potencial complexo de velocidade para o fluxo de um fluido no semiplano superior $y > 0$ que tem uma fonte em $x_1 = -1$ e um sumidouro em $x_2 = 1$ de iguais intensidades (Figura 7.5.13). Recomendamos uma comparação de (12) com o Problema 24 do Conjunto de Exercícios 5.6.

O método para a determinação de uma função de fluxo em um domínio com fonte ou sumidouros na fronteira é similar ao usado na ausência de fontes ou sumidouros. Seja $\psi(x, y)$ a função de fluxo de um fluxo de um fluido ideal em um domínio $D'$ no plano $w$, com fontes ou sumidouros na fronteira. Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for uma transformação conforme de um domínio $D$ no plano $z$ no domínio $D'$, então $\psi(x, y) = \psi(u(x, y), v(x, y))$ é uma função de fluxo para um fluxo de um fluido ideal em $D$, com fontes e sumidouros na fronteira. Este método é ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 8 **Fluxo com uma Fonte e um Sumidouro de Iguais Intensidades**

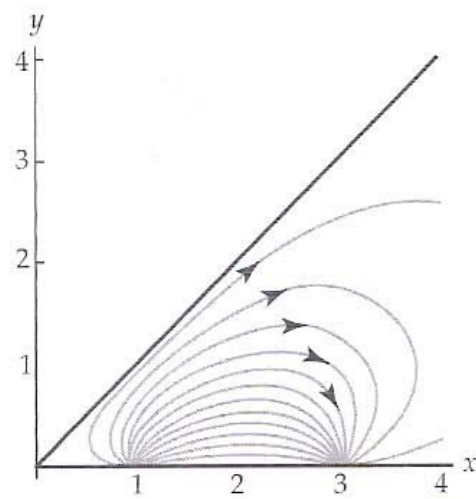



**Figura 7.5.14** Figura para o Exemplo 8

Construamos um fluxo de um fluido ideal no domínio $D$ dado por $0 < \arg(z) < \pi/4$, com uma fonte na fronteira, no ponto $x_1 = 1$, e um sumidouro de igual intensidade na fronteira, no ponto $x_2 = 3$.

**Solução** Da Entrada E-4 no Apêndice III, com $\alpha = 4$, obtemos a transformação conforme biunívoca $f(z) = z^4$, que mapeia $D$ no semiplano superior $v > 0$. Sob esta transformação a imagem de $x_1 = 1$ é $u_1 = 1^4 = 1$, e a imagem de $x_2 = 3$ é $u_2 = 3^4 = 81$. Efetuando as necessárias e óbvias modificações em (12), obtemos o potencial complexo de velocidade

$$\text{Ln}(w-1) - \text{Ln}(w-81), \tag{13}$$

que descreve o fluxo de um fluido ideal no semiplano superior $v > 0$, com uma fonte em $u_1 = 1$ e um sumidouro de igual intensidade em $u_2 = 81$. Como o domínio $D$ é mapeado no domínio $v > 0$ pela transformação conforme $w = z^4$, uma função potencial complexo para um fluxo em $D$ é obtida com a substituição do símbolo $w$ em (13) por $z^4$:

$$\Omega(z) = \text{Ln}\left(z^4 - 1\right) - \text{Ln}\left(z^4 - 81\right). \tag{14}$$

Linhas de fluxo deste fluxo são dadas por $\psi(x, y) = c_2$, ou

$$\text{Arg}\left(z^4 - 1\right) - \text{Arg}\left(z^4 - 81\right) = c_2.$$

A Figura 7.5.14 ilustra algumas dessas linhas de fluxo. ❑

## Observações

A transformação complexa $w = J(z) = z + k^2/z$ é denominada **transformação de Joukowski**. Sob esta transformação, uma circunferência no plano $z$ que tenha o ponto $z_1 = 1$ em seu interior e passe pelo ponto $z_2 = 1$ é mapeada em uma curva no plano $w$ que lembra a seção reta da asa de um avião (Figura 7.5.15) (c). A curva imagem recebe a denominação **aerofólio de Joukowski**; o fluxo de ar em torno dessa curva pode ser determinado com as técnicas apresentadas nesta seção. Iniciamos com o fluxo em torno da circunferência $|z| = 1$, mostrado na Figura 7.5.15(a) e dado por $\Omega(z) = z + 1/z$. Usando uma adequada transformação linear podemos ajustar este fluxo como o fluxo em torno de uma circunferência que tem o ponto $z_1 = -1$ em seu interior e passa pelo ponto $z_2 = 1$ (Figura 7.5.15(b)). A transformação de Joukowski é, então, usada para "transformar" esse fluxo em um fluxo em torno do aerofólio, como mostrado na Figura 7.5.15(c).

(a) Fluxo em torno da circunferência unitária

(b) Fluxo em torno de uma circunferência com $z_1 = -1$ em seu interior e que passa por $z_2 = 1$

(c) Fluxo em torno de um aerofólio

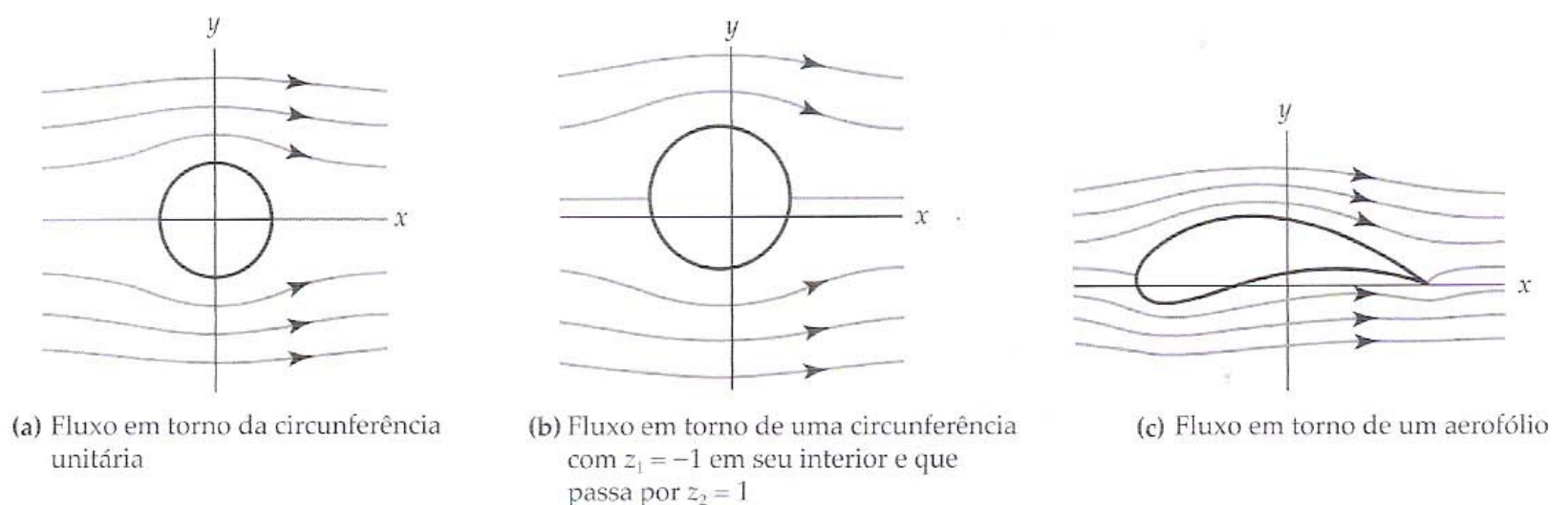



**Figura 7.5.15** Fluxo em torno de um aerofólio de Joukowski

## CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.5 *(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

### 7.5.1 Problemas de Valores de Contorno

Nos Problemas 1–6, (a) determine uma transformação conforme que mapeie o domínio mostrado em cinza-escuro no semiplano superior, e (b) use a transformação em (a) e a solução (7) da Seção 7.4 para determinar a temperatura de estado estacionário $\phi(x, y)$ no domínio, sujeita às condições de contorno indicadas.

1.

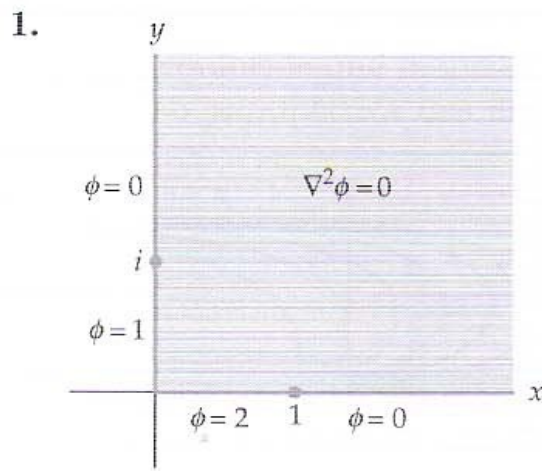



Figura 7.5.16 Figura para o Problema 1

2.

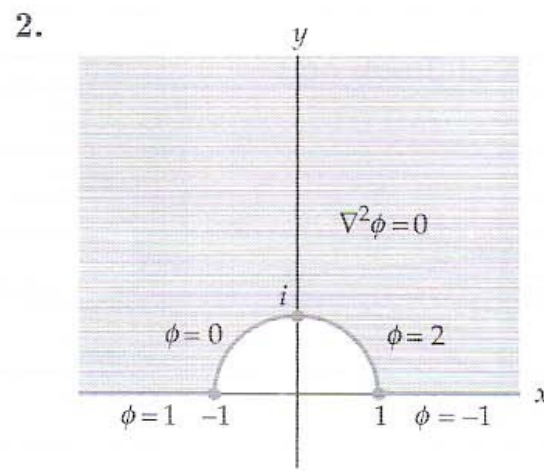



Figura 7.5.17 Figura para o Problema 2

3.

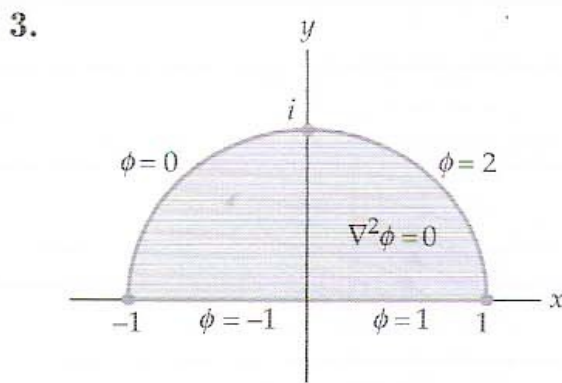



Figura 7.5.18 Figura para o Problema 3

4.

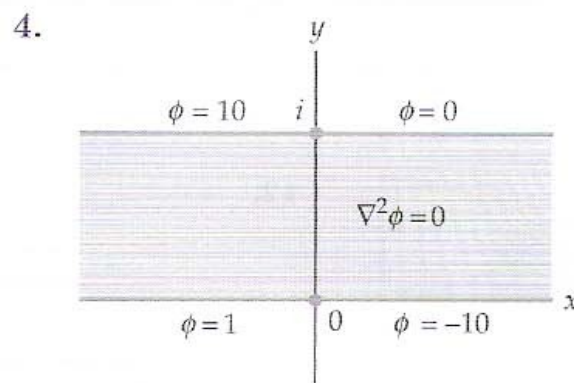



Figura 7.5.19 Figura para o Problema 4

5.

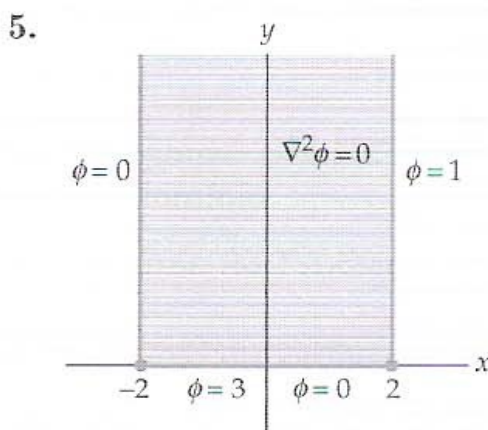



Figura 7.5.20 Figura para o Problema 5

6.

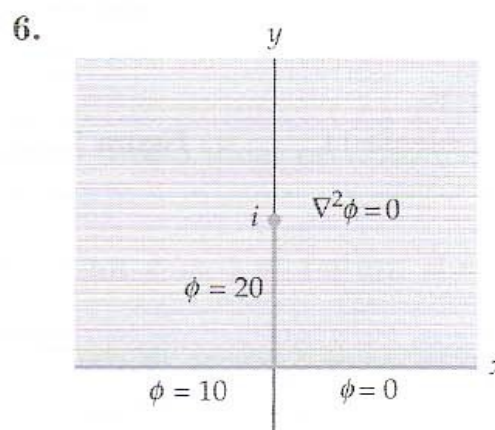



Figura 7.5.21 Figura para o Problema 6 [*Sugestão*: Use o inverso da transformação da Entrada n-4 no Apêndice III]

Nos Problemas 7 e 8, (**a**) determine uma transformação conforme que mapeie o domínio mostrado em cinza-escuro em uma fita infinita, e (**b**) use a transformação em (a) e a solução no Exemplo 2 da Seção 3.4 para determinar o potencial eletrostático $\phi(x, y)$ no domínio, sujeito às condições de contorno indicadas.

7.

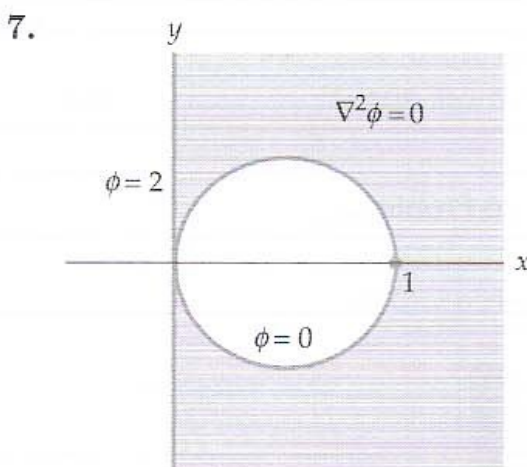



Figura 7.5.22 Figura para o Problema 7

8.

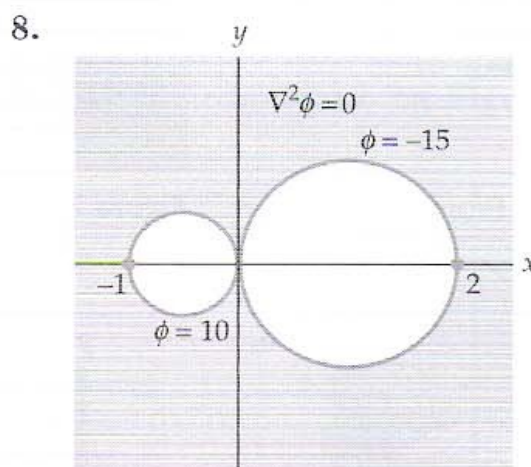



Figura 7.5.23 Figura para o Problema 8

Nos Problemas 9 e 10, (**a**) determine uma transformação fracionária linear que mapeie o domínio mostrado em cinza-escuro em uma região anelar, e (**b**) use a transformação em (a) e uma solução similar à encontrada no Exemplo 1 para determinar o potencial eletrostático $\phi(x, y)$ no domínio, sujeito às condições de contorno indicadas.

9.

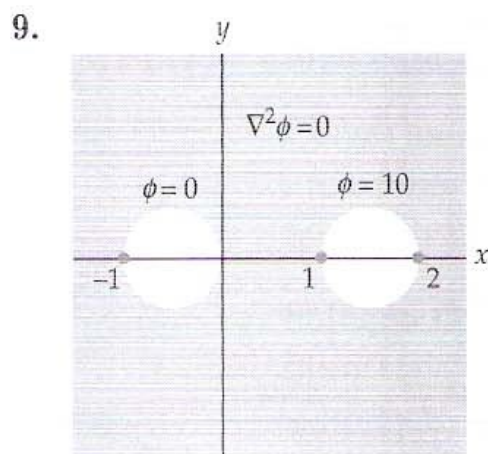



Figura 7.5.24 Figura para o Problema 9

10.

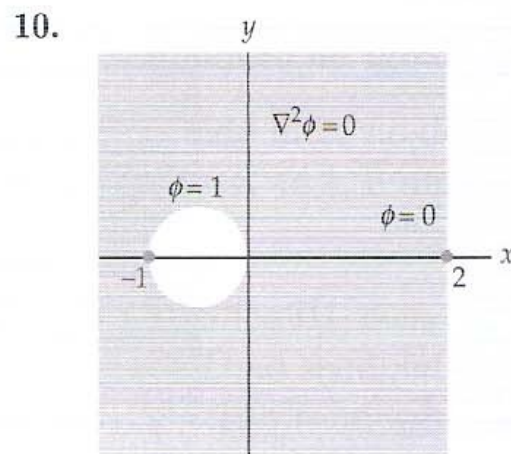



Figura 7.5.25 Figura para o Problema 10

Nos Problemas 11 e 12, (**a**) determine uma transformação conforme que mapeie o domínio mostrado em cinza-escuro no domínio usado no Exemplo 3, e (**b**) use a transformação em (a) e uma solução similar à encontrada no Exemplo 3 para determinar a temperatura de estado estacionário $\phi(x, y)$ no domínio, sujeita às condições de contorno indicadas.

11.

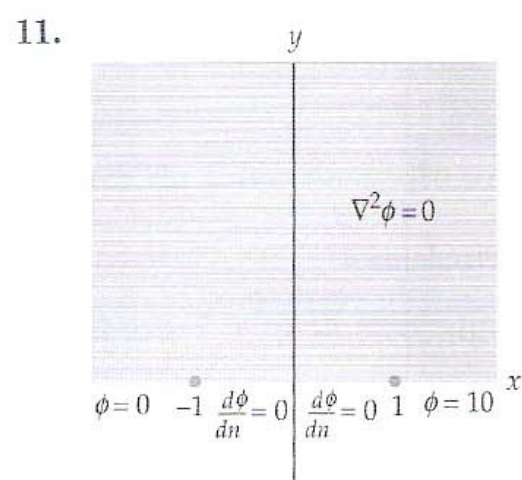



Figura 7.5.26 Figura para o Problema 11

12.

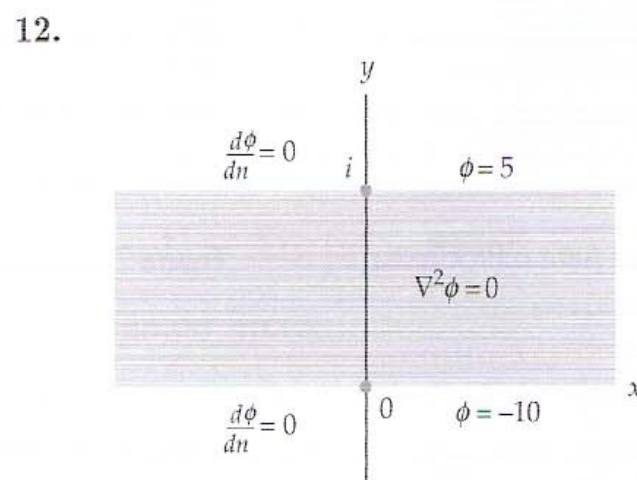



Figura 7.5.27 Figura para o Problema 12

## 7.5.2 Fluxo Fluido

Nos Problemas 13–16, determine um potencial complexo de velocidade $\boldsymbol{\Omega}(z)$ para o fluxo de um fluido ideal no domínio mostrado em cor.

13.

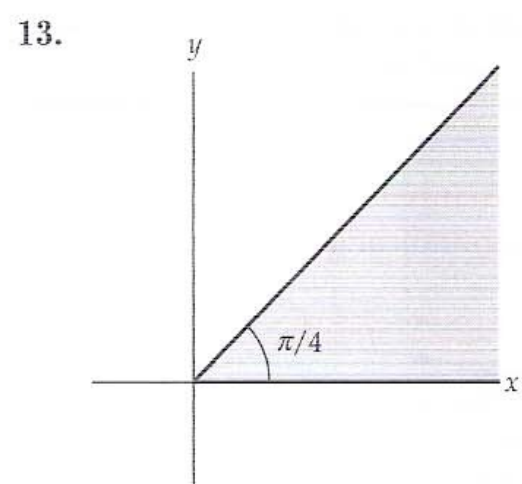



Figura 7.5.28 Figura para o Problema 13

14.

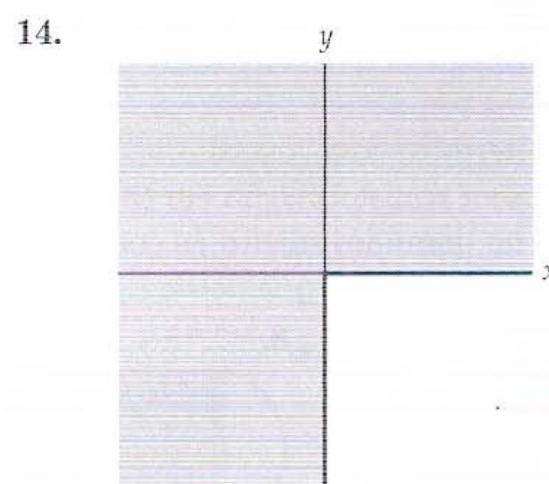



Figura 7.5.29 Figura para o Problema 14

15.

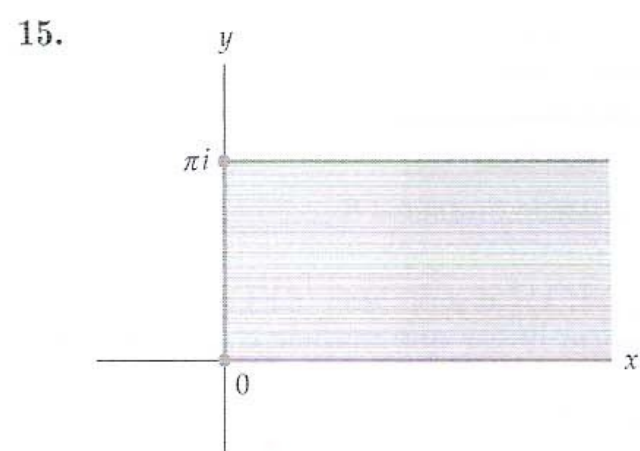



Figura 7.5.30 Figura para o Problema 15

16.

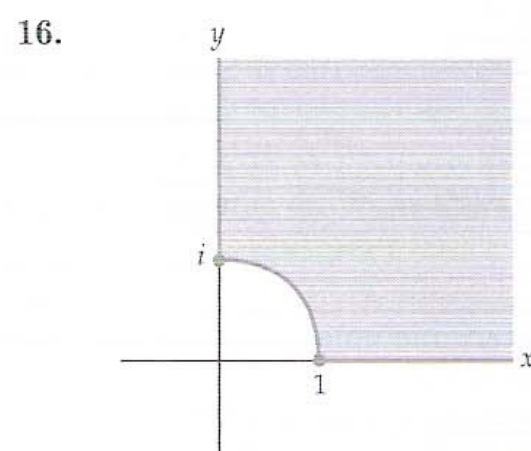



Figura 7.5.31 Figura para o Problema 16

Nos Problemas 17–20, o fluxo de um fluido ideal é mostrado em um domínio no plano $z$. (**a**) Determine uma transformação conforme que mapeie o semiplano superior $v > 0$ no domínio no plano $z$ indicado, e (**b**) determine uma representação paramétrica das linhas de fluxo do fluxo,

**17.**

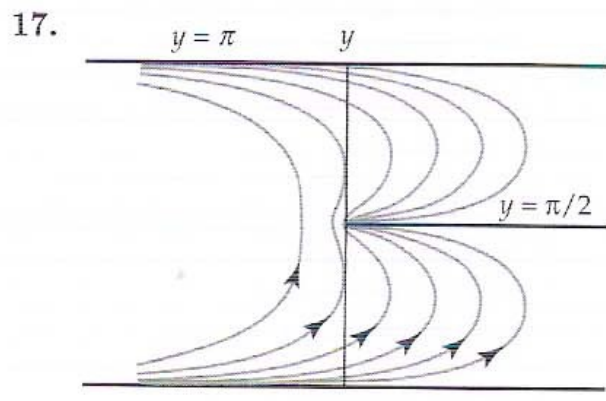



**Figura 7.5.32** Figura para o Problema 17

**18.**

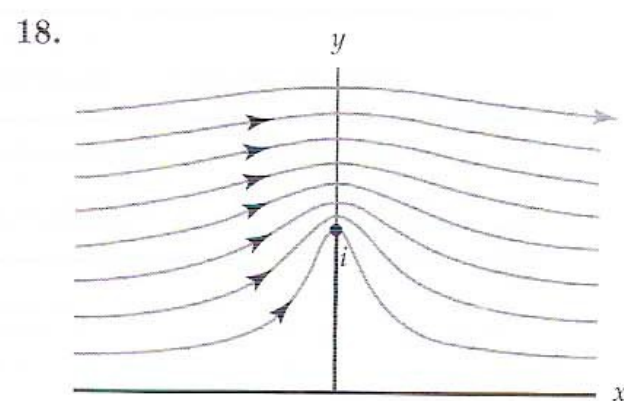



**Figura 7.5.33** Figura para o Problema 18

**19.**

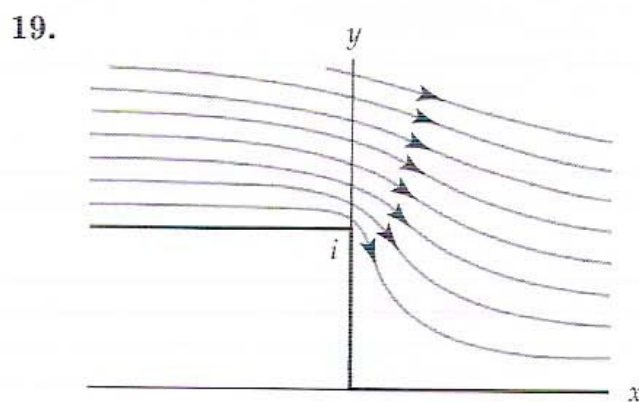



**Figura 7.5.34** Figura para o Problema 19

**20.**

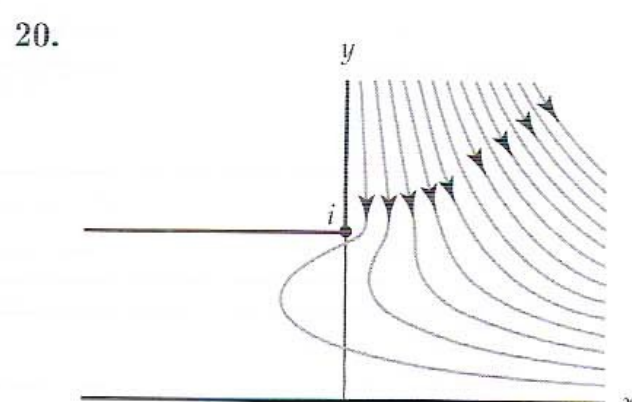



**Figura 7.5.35** Figura para o Problema 20

Nos Problemas 21 e 22, construa o fluxo de um fluido ideal no domínio indicado com fonte e/ou sumidouros na fronteira do domínio.

**21.** Domínio do Problema 13, com uma fonte em $z_1 = 1 + i$ e um sumidouro em $z_2 = 2$.

**22.** Domínio do Problema 16, com uma fonte em $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ e sumidouros em $z_2 = 2$ e $z_3 = 3i$.

## Foco em Conceitos

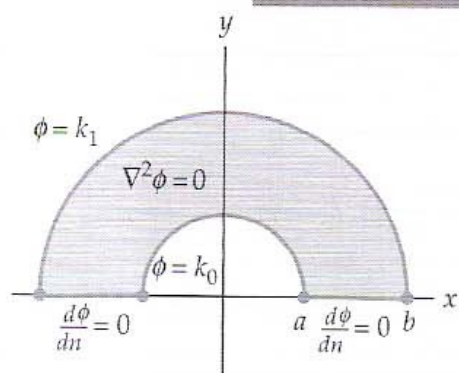



**Figura 7.5.36** Figura para o Problema 23

**23.** Mostre que a função dada por (3), com os símbolos $u$ e $v$ substituídos por $x$ e $y$, respectivamente, é uma solução do problema de valores de contorno no domínio mostrado em cinza-escuro na Figura 7.5.36.

**24.** Use uma transformação conforme e o Problema 23 para resolver o problema de valores de contorno no domínio mostrado em cinza-escuro na Figura 7.5.37.

**25.** Use uma transformação conforme e o Problema 23 para resolver o problema de valores de contorno no domínio mostrado em cinza-escuro na Figura 7.5.38.

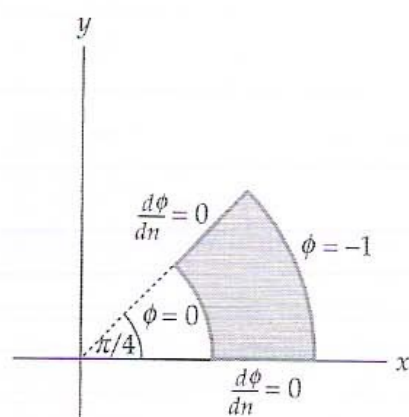



**Figura 7.5.37** Figura para o Problema 24

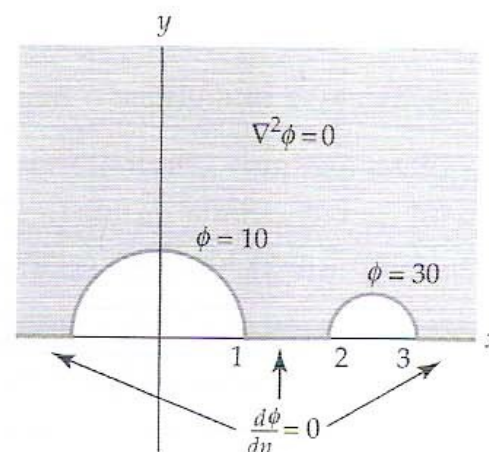



**Figura 7.5.38** Figura para o Problema 25

**26.** No Problema 22 do Conjunto de Exercícios 5.6 definimos um **ponto de estagnação** de um fluxo como um ponto em que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$. Determine os pontos de estagnação para:

(**a**) o fluxo no Exemplo 5

(**b**) o fluxo no Problema 16.

**27.** Neste problema você deve construir o fluxo de um fluido ideal através de uma abertura mostrada na Figura 7.5.40.

(**a**) Determine um potencial de velocidade para o fluxo de um fluido ideal no domínio $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$, mostrado na Figura 7.5.39.

(**b**) Use o potencial na parte (a) e uma transformação conforme para determinar o potencial de velocidade para o fluxo de um fluido ideal na região mostrada na Figura 7.5.40.

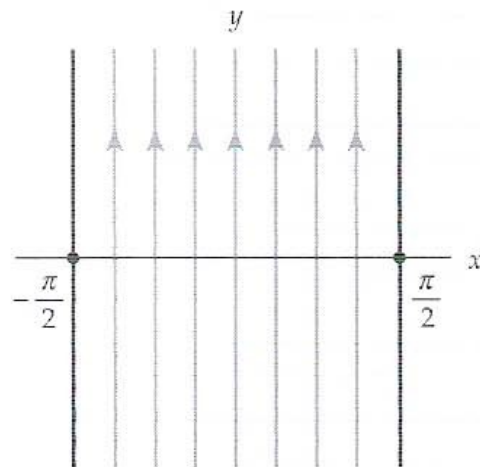
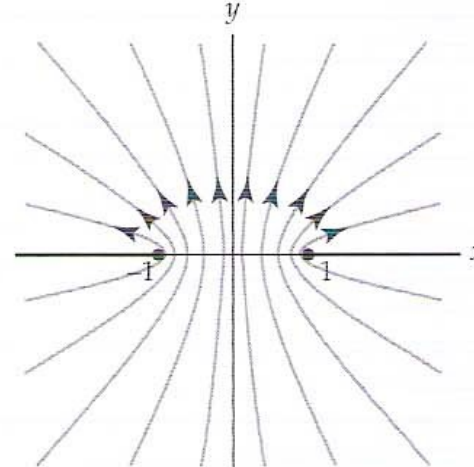



**Figura 7.5.39** Figura para o Problema 27 **Figura 7.5.40** Figura para o Problema 27

**28.** Neste problema você deve construir o fluxo de um fluido ideal em torno de uma placa mostrada na Figura 7.5.42.

(**a**) Use uma transformação conforme e o potencial de velocidade no Exemplo 5 para mostrar que o potencial de velocidade de um fluido ideal no domínio mostrado na Figura 7.5.41 é dado por

$$\Omega(z) = \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z}.$$

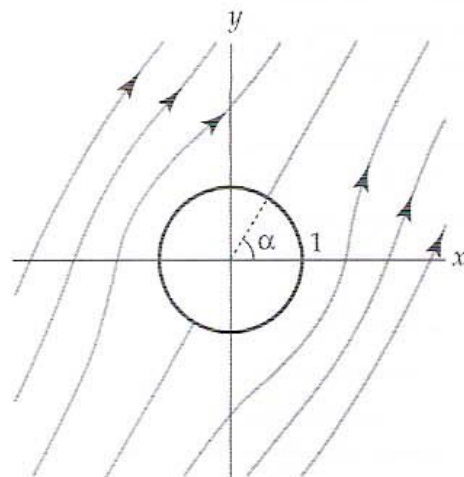
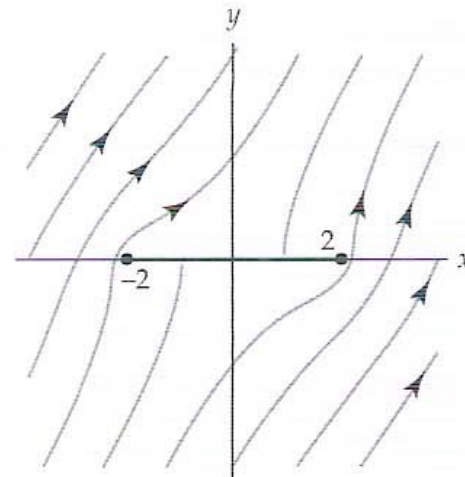



**Figura 7.5.41** Figura para o Problema 28 **Figura 7.5.42** Figura para o Problema 28

(**b**) A transformação conforme mapeia o domínio no exterior da circunferência unitária, mostrado na Figura 7.5.41, no plano complexo, excluído o segmento de reta $y = 0$, $-2 \leq x \leq 2$, como ilustrado na Figura 7.5.42.

$$w = \frac{z + (z^2 - 4)^{1/2}}{2}.$$

Use o potencial de velocidade da parte (a) e esta transformação conforme para determinar o potencial de velocidade para o fluxo de um fluido ideal na região mostrada na Figura 7.5.42.

## Tarefas para o Laboratório de Computação

Nos Problemas 29-36, use um SAC para desenhar gráficos de isotérmicas para a dada temperatura de estado estacionário $\phi(x, y)$.

**29.** $\phi(x, y)$ é a temperatura de estado estacionário no Problema 1.

**30.** $\phi(x, y)$ é a temperatura de estado estacionário no Problema 2.

**31.** $\phi(x, y)$ é a temperatura de estado estacionário no Problema 3.

**32.** $\phi(x, y)$ é a temperatura de estado estacionário no Problema 4.

**33.** $\phi(x, y)$ é a temperatura de estado estacionário no Problema 5.

**34.** $\phi(x, y)$ é a temperatura de estado estacionário no Problema 6.

**35.** $\phi(x, y)$ é a temperatura de estado estacionário no Problema 11.

**36.** $\phi(x, y)$ é a temperatura de estado estacionário no Problema 12.

Nos Problemas 37–40, use um SAC para desenhar curvas equipotenciais para o potencial eletrostático $\phi(x, y)$ dado.

**37.** $\phi(x, y)$ é o potencial eletrostático no Problema 7.

**38.** $\phi(x, y)$ é o potencial eletrostático no Problema 8.

**39.** $\phi(x, y)$ é o potencial eletrostático no Problema 9.

**40.** $\phi(x, y)$ é o potencial eletrostático no Problema 10.

Nos Problemas 41-44, use um SAC para desenhar as linhas de fluxo do fluxo dado.

**41.** Fluxo no Problema 13.

**42.** Fluxo no Problema 14.

**43.** Fluxo no Problema 15.

**44.** Fluxo no Problema 16.

## Questionário de Revisão do Capítulo 7

*(Veja Soluções de Problemas Selecionados de Ordem Ímpar ao final do livro.)*

Nos Problemas 1–15, responda verdadeiro ou falso. Se a afirmação for falsa, justifique sua resposta explicando por que é falsa ou dê um contraexemplo; se a afirmação for verdadeira, justifique sua resposta provando a afirmação ou cite um resultado pertinente deste capítulo.

**1.** Se $f(z)$ for analítica em um ponto $z_0$, a transformação $w = f(z)$ é conforme em $z_0$.

**2.** A transformação $w = z^2 + iz + 1$ não é conforme em $z = -\frac{1}{2}i$.

**3.** A transformação $w = z^2 + 1$ não é conforme em $z = \pm i$.

**4.** A transformação $w = \bar{z}$ não é conforme em todo ponto no plano complexo.

**5.** Uma transformação fracionária linear é conforme em todo ponto em um domínio.

**6.** A imagem de uma circunferência sob uma transformação fracionária linear é uma circunferência.

**7.** A transformação fracionária linear $T(z) = \dfrac{z - i}{z + 1}$ mapeia os pontos 0, –1 e $i$ nos pontos $-i$, $\infty$ e 0, respectivamente.

**8.** Dados quaisquer três pontos $z_1$, $z_2$ e $z_3$, existe uma transformação fracionária linear que mapeie $z_1$, $z_2$ e $z_3$ em 0, 1 e $\infty$.

**9.** A inversa de uma transformação fracionária linear $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ é $T^{-1}(z) = (cz + d)/(az + b)$.

**10.** Se $f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}\,(z - 1)^{-3/4}$, então $w = f(z)$ mapeia o semiplano superior em uma região poligonal ilimitada.

**11.** Se $f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}\,z^{-1/2}\,(z - 1)^{-1/2}$, então $w = f(z)$ mapeia o semiplano superior em um retângulo.

**12.** Todo problema de Dirichlet no semiplano superior pode ser resolvido com uso da fórmula integral de Poisson.

**13.** Se $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for uma transformação conforme de um domínio $D$ no semiplano superior $v > 0$ e se $\Phi(u, v)$ for uma função harmônica para $v > 0$, então $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ é harmônica em $D$.

**14.** Se $\psi(x, y)$ for uma função definida em um domínio $D$ e se a fronteira de $D$ for uma curva de nível de $\psi(x, y)$, então $\psi(x, y)$ é a função de fluxo de um fluido ideal em $D$.

**15.** Dado um domínio $D$, pode existir mais de um fluxo de um fluido ideal que permaneça no interior de $D$.

Nos Problemas 16–30, tente preencher as lacunas sem recorrer ao texto.

**16.** A função analítica $f(z) = \cosh z$ é conforme, exceto em $z =$ ______.

**17.** Transformações conformes preservam tanto a magnitude como o(a) _______ de um ângulo.

**18.** A transformação _______ é um exemplo de uma transformação que é conforme em todo ponto no plano complexo.

**19.** Se $f'(z_0) = f''(z_0) = 0$ e $f'''(z_0) \neq 0$, a transformação $w = f(z)$ _______ a magnitude de ângulos em $z_0$.

**20.** $T(z) =$ _______ é uma transformação fracionária linear que mapeia os pontos $0$, $1 + i$ e $i$ nos pontos $1$, $i$ e $\infty$, respectivamente.

**21.** A imagem da circunferência $|z - 1| = 2$ sob a transformação fracionária linear $T(z) = (2z - i)/(iz + 1)$ é um(a) _______.

**22.** A imagem de uma reta $R$ sob a transformação fracionária linear $T(z) = (iz - 2)/(3z + 1 - i)$ será uma circunferência se e somente se o ponto $z =$ _______ estiver em $R$.

**23.** A razão cruzada dos pontos $z$, $z_1$, $z_2$ e $z_3$ é _______ e _______.

**24.** A derivada de uma transformação de Schwarz-Christoffel do semiplano superior no triângulo com vértices $0$, $1$ e $1 + i$ é $f'(z) =$ _______.

**25.** Se $f'(z) = A(z + 1)^{-1/2} z^{-1/4}$, então $w = f(z)$ mapeia o semiplano superior em uma região poligonal com ângulos internos _______.

**26.** A fórmula integral de Poisson fornece uma solução integral $\phi(x, y)$ para um problema de Dirichlet no semiplano superior, desde que a função $f(x) = \phi(x, 0)$ seja _______ e _______ em $-\infty < x < \infty$.

**27.** O potencial complexo de velocidade $\Omega(z) = z^5$ descreve o fluxo de um fluido ideal no domínio $0 < \arg z <$ _______.

**28.** Se $\Omega(z) = e^z + e^{-z}$ for o potencial complexo de velocidade do fluxo de um fluido ideal em um domínio $D$, uma representação complexa do campo de velocidade é dada por $f(z) =$ _______.

**29.** Se $z = \left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)^2$ for uma transformação conforme biunívoca do semiplano superior em um domínio $D$, uma linha de fluxo do fluxo de um fluido ideal em $D$ é parametrizada por $z(t) =$ _______.

**30.** O potencial complexo de velocidade $\Omega(z) = \text{Ln}(z - 2) + \text{Ln}(z - 3) - \text{Ln}(z - 4)$ descreve o fluxo de um fluido ideal no semiplano superior $y > 0$, com _______ em $z = 2$ e $z = 3$ e um(a) _______ em $z = 4$.

# Respostas a Problemas Selecionados de Ordem Ímpar

## Capítulo 1

### Conjunto de Exercícios 1.1

**1.** (a) $1$ (b) $-i$ (c) $-1$ (d) $i$

**3.** $7-13i$

**5.** $-7+5i$

**7.** $11-10i$

**9.** $\frac{2}{5}+\frac{16}{5}i$

**11.** $-\frac{7}{17}-\frac{11}{17}i$

**13.** $8-i$

**15.** $\frac{23}{37}-\frac{64}{37}i$

**17.** $20i$

**19.** $\frac{102}{5}+\frac{116}{5}i$

**21.** $-5+12i$

**23.** $128-128i$

**25.** $\text{Re}(z)=\frac{7}{130}$, $\text{Im}(z)=\frac{9}{130}$

**27.** $\dfrac{x}{x^2+y^2}$

**29.** $-2y-4$

**31.** $-\text{Im}(z)$

**33.** $\text{Re}(z)+\text{Im}(z)$

**35.** $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

**37.** $z=-\frac{9}{2}+i$

**39.** $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

**41.** $z=-\frac{1}{30}+\frac{7}{10}i$

**43.** $z_1=17+11i$, $z_2=7+13i$

### Conjunto de Exercícios 1.2

**5.** $16-12i$

**7.** triângulo direito

**9.** $2$

**11.** $\frac{2}{5}$

**13.** $(x-1)^2+(y-3)^2$

**15.** $11-6i$; $10+8i$

**17.** reta $x-y=1$

**19.** reta $y=x$

**21.** hipérbole $xy=1$

**23.** circunferência centrada em $(1, 0)$, de raio 1

**25.** parábola $y^2 = 4(x-1)$

**29.** 6

**31.** $z = -\frac{3}{4} - i$

## Conjunto de Exercícios 1.3

**1.** $z = 2(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$; $z = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

**3.** $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$; $z = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

**5.** $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}\right)$; $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

**7.** $z = 2\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$; $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

**9.** $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$; $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

**11.** $z = 3(\cos 8{,}34486 + i\operatorname{sen} 8{,}34486)$; $z = 3(\cos 2{,}06168 + i\operatorname{sen} 2{,}06168)$

**13.** $2 + 2\sqrt{3}\,i$

**15.** $-\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$

**17.** $5{,}5433 + 2{,}2961i$

**19.** $8i$; $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$

**21.** $30\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right) \approx 40{,}9808 + 10{,}9808i$

**23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

**25.** $-512$

**27.** $\frac{1}{32}i$

**29.** $-64i$

**31.** $32\left(\cos\frac{13\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right) = 16\sqrt{3} + 16i$

**33.** $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

**35.** $n = 6$

## Conjunto de Exercícios 1.4

Nas respostas 1–13, a raiz principal $n$-ésima é dada primeiro.

**1.** $w_0 = 2$, $w_1 = -1 + \sqrt{3}i$ $w_2 = -1 - \sqrt{3}i$

**3.** $w_0 = 3i$, $w_1 = -3i$

**5.** $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

**7.** $w_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i$, $w_1 \approx -1{,}0842 + 0{,}2905i$, $w_2 \approx 0{,}2905 - 1{,}0842i$

**9.** $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

**11.** $w_0 = 2 + i$, $w_1 = -2 - i$

**13.** $w_0 \approx 1{,}3477 + 0{,}1327i$, $w_1 \approx 0{,}8591 + 1{,}0469i$,
$w_2 \approx -0{,}1327 + 1{,}3477i$, $w_3 \approx -1{,}0469 + 0{,}8591i$,
$w_4 \approx -1{,}3477 - 0{,}1327i$, $w_5 \approx -0{,}8591 - 1{,}0469i$,
$w_6 \approx 0{,}1327 - 1{,}3477i$, $w_7 \approx 1{,}0469 - 0{,}8591i$

**15.** (b) $4 + 3i$, $-4 - 3i$

**17.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

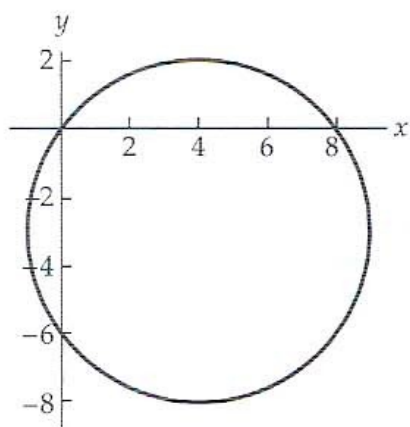
**19.** (b) $n = 3: 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

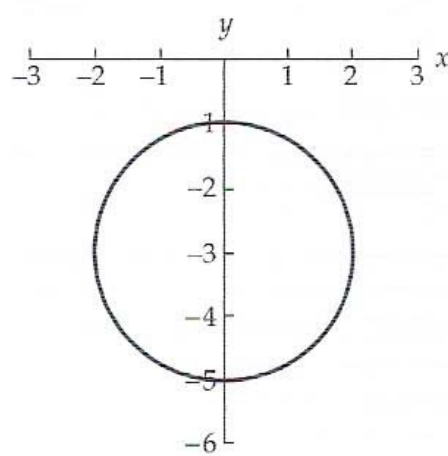
$n = 4: 1, i, -1, -i;$

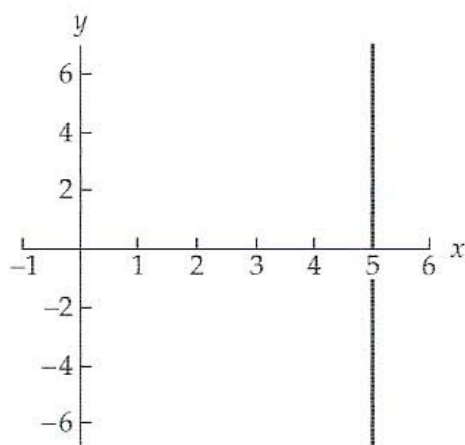
$n = 5:$
$1. 0{,}3090 + 0{,}9511i, -0{,}8090 + 0{,}5878i, -0{,}8090 - 0{,}5878i, 0{,}3090 - 0{,}9511i,$

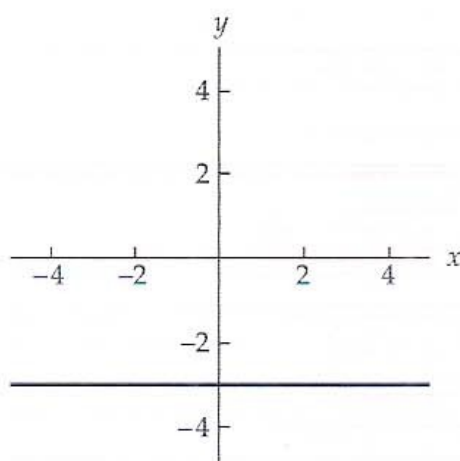
**25.** (c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

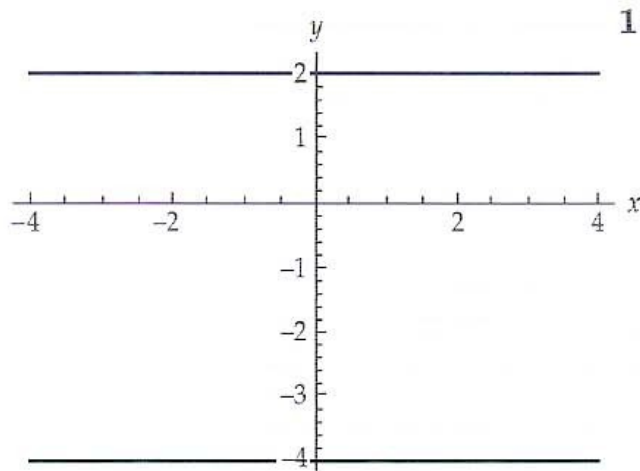
## Conjunto de Exercícios 1.5

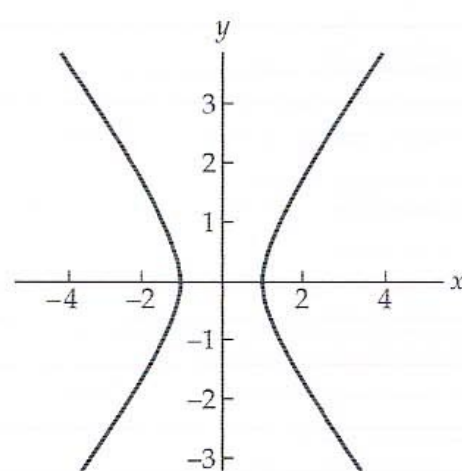
**1.** 

Circunferência centrada em $4 - 3i$, de raio 5

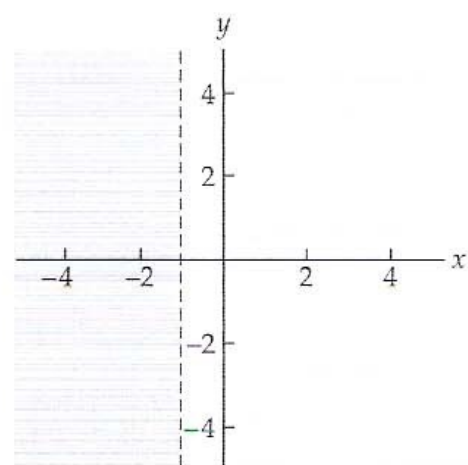
**3.**

Circunferência centrada em $-3i$, de raio 2

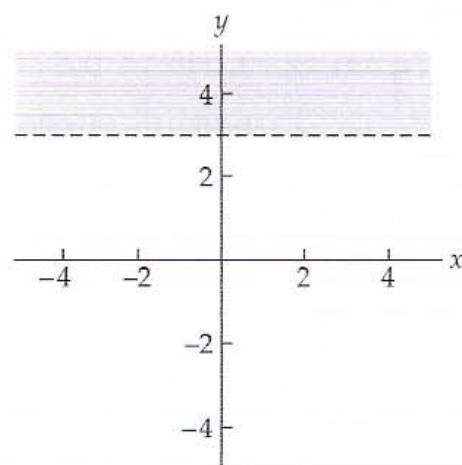
**5.**

Reta vertical $x = 5$

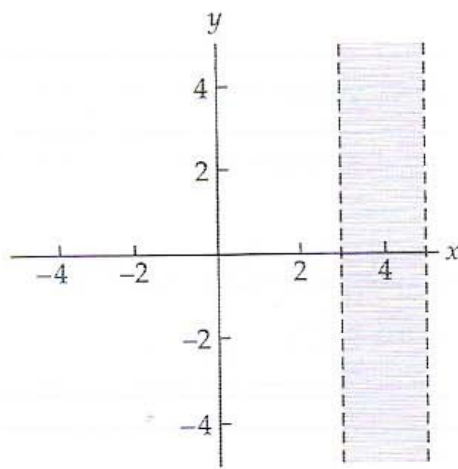
**7.**

Reta horizontal $y = -3$

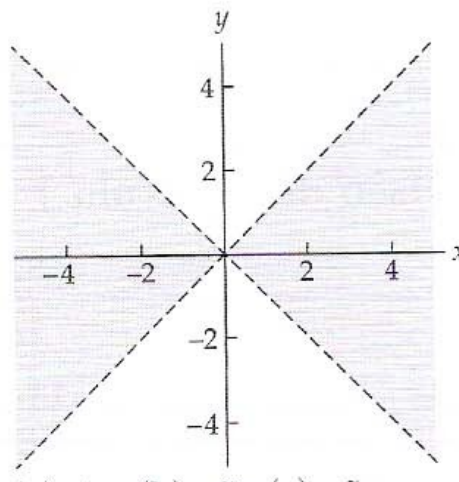
**9.**

Retas horizontais $y = 2$, $y = -4$

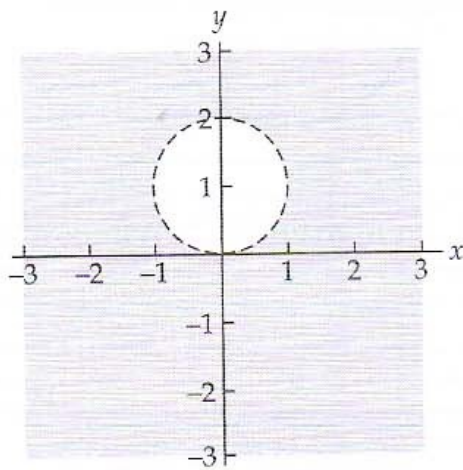
**11.**

Hipérbole $x^2 - y^2 = 1$

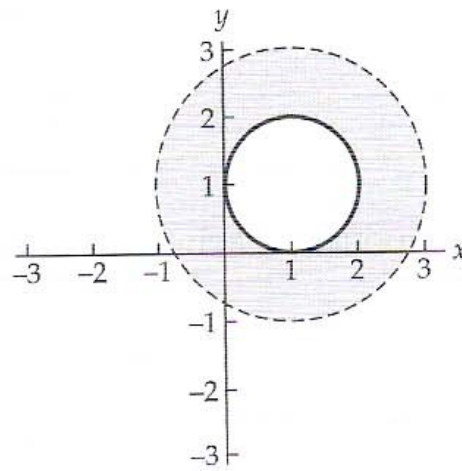
**13.**

(a) sim (b) não (c) sim
(d) não (e) sim

**15.**

(a) sim (b) não (c) sim
(d) não (e) sim

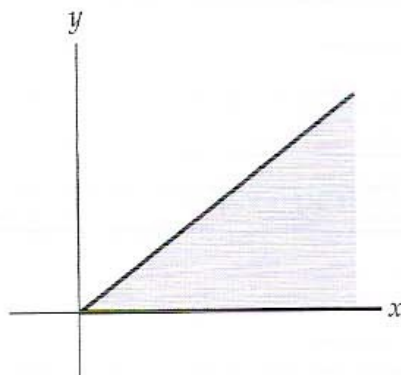
**17.**

(**a**) sim (**b**) não (**c**) sim
(**d**) não (**e**) sim

**19.**

(**a**) sim (**b**) não (**c**) não
(**d**) não (**e**) não

**21.**

(**a**) sim (**b**) não (**c**) sim
(**d**) não (**e**) sim

**23.**

(**a**) não (**b**) não (**c**) não
(**d**) sim (**e**) sim

**25.** Problema 13: reta $x = -1$;
Problema 15: reta $y = 3$;
Problema 17: retas $x = 3$ e $x = 5$;
Problema 19: retas $y = x$ e $y = -x$;
Problema 21: circunferência $|z - i| = 1$;
Problema 23: circunferências $|z - 1 - i| = 1$ e $|z - 1 - i| = 2$;

**27.**

**29.** $|\arg(z)| \leq 2\pi/3$

**31.** $z = 1 + \sqrt{3}i$ ou $z = 1 - \sqrt{3}i$

## Conjunto de Exercícios 1.6

**1.** $\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i;\ \left(z - \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

**3.** $-2 - 3i,\ 3 + 4i;\ (z + 2 + 3i)(z - 3 - 4i)$

**5.** $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ \left(z + 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z + 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

**7.** $10e^{\pi i}$

**9.** $4\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}$

**11.** $10e^{i\tan^{-1}(-\frac{3}{4})}$

**13.** $y_1 = e^{2x}\cos 3x,\ y_2 = e^{2x}\text{sen}\,3x$

**15.** $y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$

**17.** $q_p(t) = \frac{1}{3}\,\text{sen}\,5t$, $i_p(t) = \frac{5}{3}\cos 5t$, $Z_C = 6 + 0j$, $Z = 6$

**19.** $q_p(t) = 50(\text{sen}\,t - \cos t)$, $i_p(t) = 50(\text{sen}\,t + \cos t)$, $Z_C = 1 - j$, $Z = \sqrt{2}$

## Questionário de Revisão do Capítulo 1

**1.** falso

**3.** verdadeiro

**5.** falso

**7.** verdadeiro

**9.** verdadeiro

**11.** falso

**13.** verdadeiro

**15.** falso

**17.** verdadeiro

**19.** falso

**21.** verdadeiro

**23.** $\frac{9}{13}$, $-\frac{7}{13}$

**25.** número real não negativo

**27.** $-3\pi/4$

**29.** $\frac{5\pi}{4}$, 8, –8, 16

**31.** quarto

**33.** $z_2$

**35.** $z = -3 - i$

**37.** 1

**39.** primeiro

**41.** conjunto de todos os pontos $z$ acima da reta $y = x$

**43.** eixo real

**45.** $n = 24$

**47.** $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^4\theta$,
$\text{sen}\,4\theta = 4\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta - 4\cos\theta\,\text{sen}^3\theta$

**49.** A equação não tem três raízes complexas, pois raízes complexas devem aparecer em pares conjugados.

# Capítulo 2

## Conjunto de Exercícios 2.1

**1.** (a) $6i$ (b) $2$ (c) $39 - 28i$

**3.** (a) $0$ (b) $\log_e 4 + \frac{1}{2}\pi i$ (c) $\frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{1}{4}\pi i$

**5.** (a) $3i$ (b) $-12 + 13i$ (c) $-24 + 4i$

**7.** (a) $3 + i$ (b) $2$ (c) $\sqrt{5} + \frac{4}{5}i$

**9.** $u = 6x - 5$; $v = 6y + 9$

**11.** $u = x^3 - 2x - 3xy^2 + 6$; $v = 3x^2y - 2y - y^3$

**13.** $u = \dfrac{x^2 + x - y^2}{(x+1)^2 + y^2}$; $v = -\dfrac{2xy + y}{(x+1)^2 + y^2}$

**15.** $u = e^{2x}\cos(2y + 1)$; $v = e^{2x}\,\text{sen}\,(2y + 1)$

**17.** $u = r\cos\theta$; $v = -r\,\text{sen}\,\theta$

**19.** $u = r^4\cos 4\theta$; $v = r^4\,\text{sen}4\theta$

**21.** $u = e^{r\cos\theta}\cos(r\,\text{sen}\theta)$; $v = e^{r\cos\theta}\,\text{sen}(r\,\text{sen}\theta)$

**23.** $\mathbf{C}$

**25.** todo $z$ tal que $z \neq 1$

## Conjunto de Exercícios 2.2

**1.** reta vertical $u = 3$

**3.** semiplano $\text{Im}(w) > 6$

**5.** reta $v = 4 - u$

**7.** semiplano $\text{Re}(w) \geq 3$

**9.** parábola $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$

**11.** raio $-\infty < u \leq 0$, $v = 0$

**13.** raio $u = 0$, $0 \leq v < \infty$

**15.** (a)

Segmento de reta de 2 a $i$

(b) $w(t) = 6(1-t) + 3it$

(c)

Segmento de reta de 6 a $3i$

**17.** (a)

Circunferência centrada em 1, com raio 2

(b) $w(t) = 2 - i + 2e^{it}$

(c)

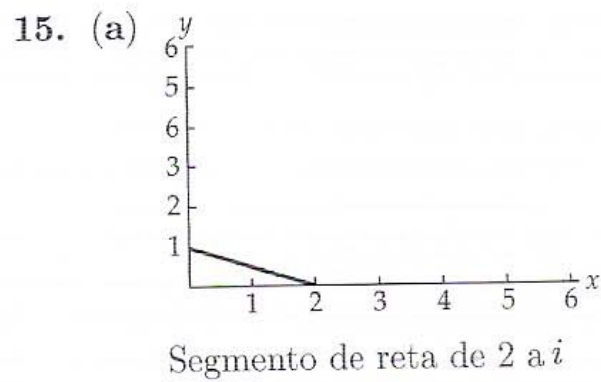
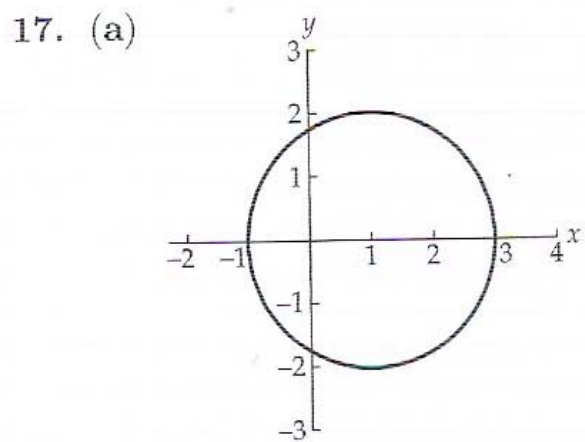
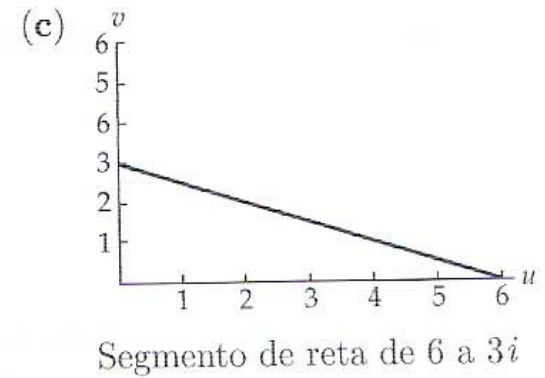
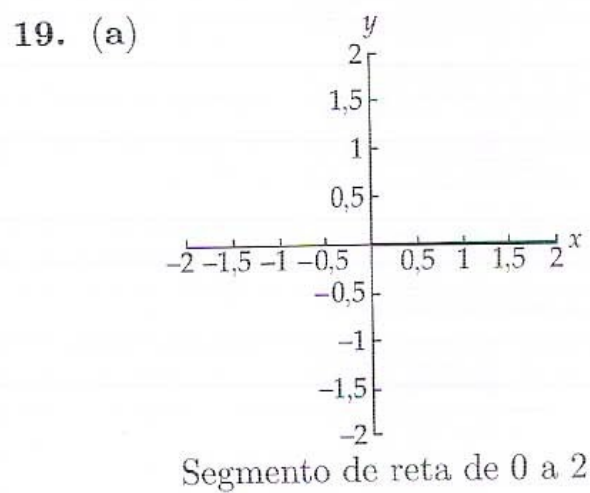
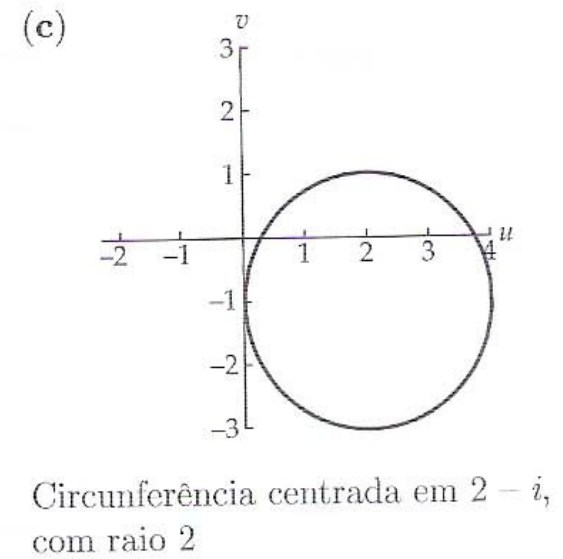
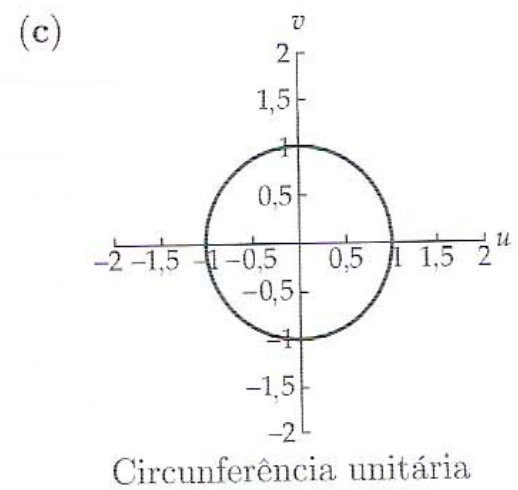
Circunferência centrada em $2 - i$, com raio 2

**19.** (a)

Segmento de reta de 0 a 2

(b) $w(t) = e^{i\pi t}$

(c)

Circunferência unitária

**21.** eixo imaginário negativo

**23.** circunferência $|w| = \frac{1}{2}$

**25.** segmento de reta de −2 a 2 no eixo real

## Conjunto de Exercícios 2.3

**1.** $|w - 3i| \leq 1$

**3.** $|w| \leq 3$

**5.** $|w + i| \leq 2$

**7.** triângulo com vértices $2i$, $1 + 2i$ e $3i$

**9.** triângulo com vértices 0, $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$, e $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$

**11.** triângulo com vértices $i$, $-3 + i$ e $-2i$

**13.** $f(z) = T \circ M \circ R(z)$ onde $R(z) = e^{\pi i/2}z$, $M(z) = 3z$, e $T(z) = z + 4$

**15.** $f(z) = T \circ M \circ R(z)$ onde $R(z) = e^{\pi i}z$, $M(z) = \frac{1}{2}z$, e $T(z) = z + 1 - \sqrt{3}i$

**17.** $f(z) = iz + 2i$

**19.** $f(z) = e^{-\pi i/4}z + i$

**21.** $f(z) = z - 1, g(z) = iz$

**23.** (a) $w(t) = (z_0 + b)(1 - t) + (z_1 + b)t, 0 \leq t \leq 1$, segmento de reta de $z_0 + b$ a $z_1 + b$

(b) $w(t) = az_0(1 - t) + az_1t, 0 \leq t \leq 1$, segmento de reta de $az_0$ a $az_1$

(c) $w(t) = az_0(1 - t) + az_1t, 0 \leq t \leq 1$, segmento de reta de $az_0$ a $az_1$

**25.** (a) $f(z) = 2e^{\pi i/4}z + 1 + i$

(b) $f(z) = 2e^{\pi i/4}z + 1 + i$

(c) $f(z) = 2e^{\pi i/4}z + 1 + i$

## Conjunto de Exercícios 2.4

**1.** $\arg(w) = \frac{2}{3}\pi$

**3.** $u = 9 - \frac{1}{36}v^2, -\infty < v < \infty$

**5.** $u = 4v^2 - \frac{1}{16}, -\infty < v < \infty$

**7.** $v = 0, -\infty < u < 0$

**9.** $|w| = \frac{1}{4}$

**11.** A Imagem consiste nos arcos: $v = 0,\ 0 \le u \le 1$; $u = 0,\ 0 \le v \le 2$; $u = 1 - \frac{1}{4}v^2, 0 \le v \le 2$.

**13.** A Imagem consiste nos arcos: $v = 0,\ -1 \le u \le 1$; $u = 1 - \frac{1}{4}v^2, 0 \le v \le 2$; $u = \frac{1}{4}v^2 - 1, 0 \le v \le 2$.

**15.** A imagem é um raio que emana de $1 - i$ e contém $(\sqrt{3} - 1)\,i$; $1 - i$ não está na imagem.

**17.** $v = 4 - \frac{1}{16}(u + 3)^2, -\infty < u < \infty$

**19.** $|w| = 1,\ \frac{1}{4}\pi \le \arg(w) \le \frac{5}{4}\pi$

**21.** (a) $\arg(w) = \frac{1}{2}\pi$ (b) $\arg(w) = \frac{2}{3}\pi$ (c) $\arg(w) = \frac{5}{6}\pi$

**23.** (a) $1 \le |w| \le 4,\ \frac{1}{2}\pi \le \arg(w) \le \frac{3}{2}\pi$ (b) $1 \le |w| \le 8,\ \frac{3}{4}\pi \le \arg(w) \le \frac{9}{4}\pi$
(c) $1 \le |w| \le 16$

**25.** $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$

**27.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

**29.** $\frac{1}{2}\sqrt[4]{18} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}i$

**31.** $\arg(w) = \frac{1}{8}\pi$

**33.** $\arg(w) = \frac{1}{4}\pi$

**35.** $|w| = 3, -\frac{1}{4}\pi \le \arg(w) \le \frac{1}{2}\pi$

**37.** $u = \frac{3}{2}$

**39.** região limitada pelas retas $u = 2$ e $v = u$ e que contém o ponto $w = 3 + 4i$

## Conjunto de Exercícios 2.5

**1.** $|w| = \frac{1}{5}$

**3.** $|w| = \frac{1}{3},\ -3\pi/4 \le \arg(w) \le \pi/4$

**5.** $\frac{1}{2} \le |w| \le 3$

**7.** $\arg(w) = -\frac{1}{4}\pi$

**9.** $\left|w + \frac{1}{8}i\right| = \frac{1}{8}$

**11.** $v = \frac{1}{2}$

**13.** $u = \frac{1}{4}$

**15.** A imagem é a região limitada por $\left|w + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ e $\left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

**17.** A imagem é a região limitada por $v = 0$, $v = -u$ e $|w| = 2$ e que contém o ponto $-3 + 2i$.

**19.** (a) Inverte na circunferência unitária, reflete em relação ao eixo real, gira de $\pi/2$ no sentido trigono-métrico em torno da origem, dilata por 2 e translada por 1.
(b) $\left|w - 1 - \frac{1}{4}i\right| = \frac{1}{4}$ (c) $v = -\frac{1}{2}$

**21.** (a) se $f(z) = 1/z$ e $g(z) = z^2$, então $h(z) = g(f(z))$
(b) $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$ (c) $u = \frac{1}{4} - v^2$

## Conjunto de Exercícios 2.6

**1.** $-4 + 2i$

**3.** $3 - i$

**5.** $-1$

**7.** $2i$

**9.** $1 - 3i$

**11.** $\sqrt{2}$

**13.** $4i$

**15.** $a$

**17.** (a) 1 (b) 0 (c) não existe

**19.** (a) 1 (b) 1 (c) não (d) $-1$ (e) não existe

**21.** $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

**23.** $\infty$

**25.** $\infty$

**27.** $\lim_{z\to 2-i} f(z) = f(2 - i) = 5 - 8i$

**29.** $\lim_{z\to i} f(z) = f(i) = \frac{1}{3}i$

**31.** $\lim_{z\to 1} f(z) = f(1) = 3$

**33.** $\lim_{z \to 3-2i} f(z) = f(3-2i) = -6+3i$

**35.** $f(-i)$ não é definida

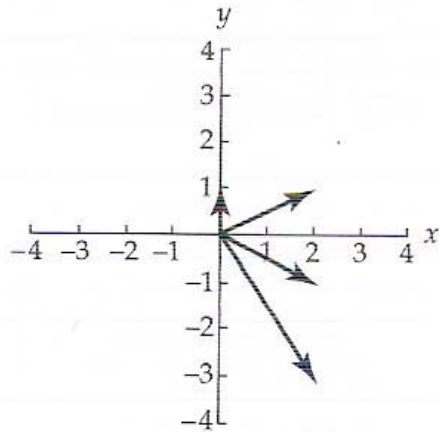
**37.** $\lim_{z \to -1} f(z)$ não existe

**39.** $\lim_{z \to i} f(z) \neq f(i)$

**41.** todo o plano complexo **C**

**43.** todos os pontos no plano complexo, exceto aqueles na circunferência $|z| = 2$

## Conjunto de Exercícios 2.7

**1.** (a)

(b)

**3.** (a)

(b)

**5.** (a)

(b)

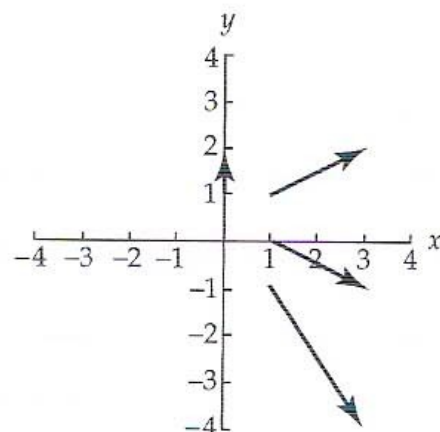
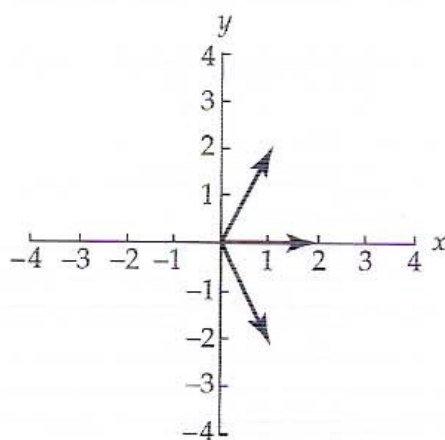
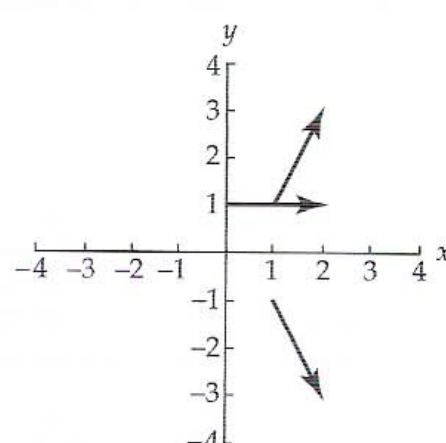
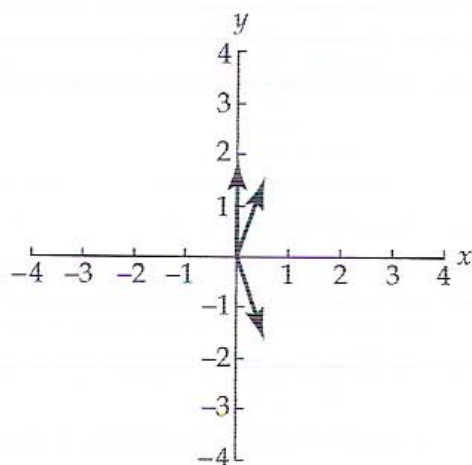
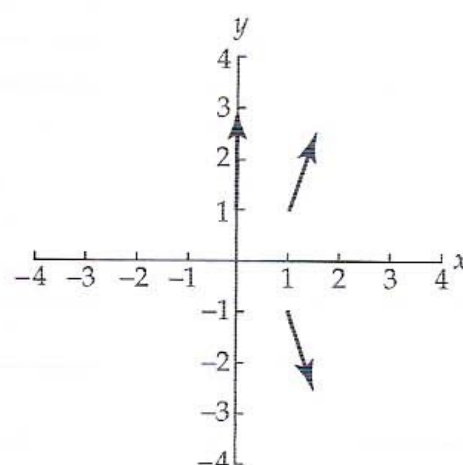
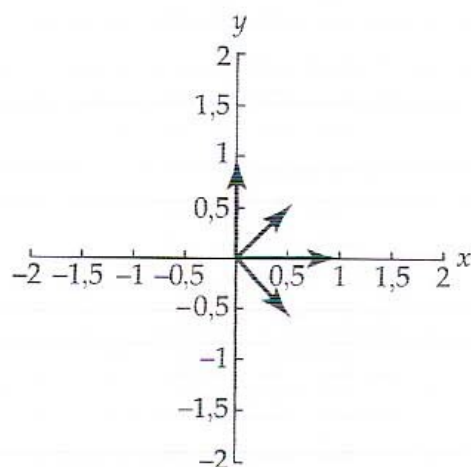
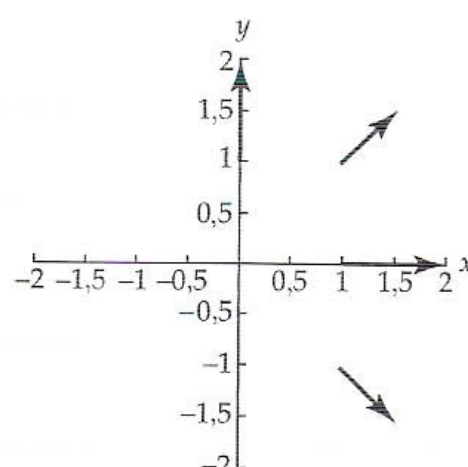
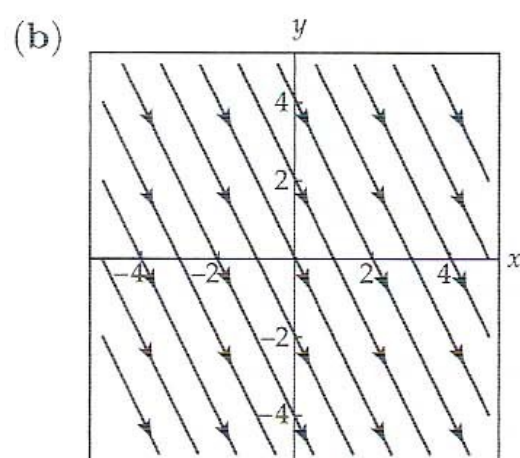
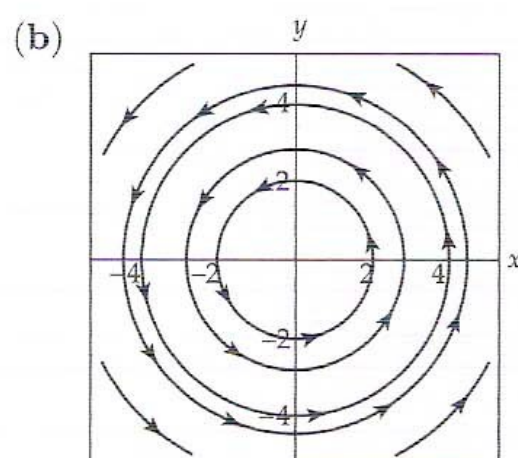
**7.** (a)

(b)

**9.** (a) $y = -2x + c$

(b)

**11.** (a) $x^2 + y^2 = c$

(b)

## Questionário de Revisão do Capítulo 2

**1.** falso

**3.** falso

**5.** verdadeiro

**7.** falso

**9.** falso

**11.** verdadeiro

**13.** falso

**15.** verdadeiro

**17.** verdadeiro

**19.** verdadeiro

**21.** $x^2 - y^2 + y,\ x + 2xy$

**23.** imaginário

**25.** $(1 + i)(1 - t) + 2ti,\ 0 \leq t \leq 1$

**27.** rotação, dilatação, translação

**29.** dobra

**31.** parábolas

**33.** $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

**35.** $z^2 + 4,\ -4 - i$

**37.** $f(z_0)$

**39.** $0 < x < \infty,\ y \neq 0$

# Capítulo 3

## Conjunto de Exercícios 3.1

**1.** $f'(z) = 9i$

**3.** $f'(z) = 3iz^2 - 14z$

**5.** $f'(z) = 1 + \dfrac{1}{z^2}$

**7.** $f'(z) = 10z - 10$

**9.** $f'(z) = 4z^3 - 2z$

**11.** $f'(z) = (10 - 5i)z^4 + 4iz^3 - 6z$

**13.** $f'(z) = 8z^7 - 7z^6 + (6 - 30i)z^5 - 2z + 1$

**15.** $f'(z) = \dfrac{3iz^2 + (2 + 2i)z - 2 + 2i}{(3z + 1 - i)^2}$

**17.** $f'(z) = 10\left(z^4 - 2iz^2 + z\right)^9\left(4z^3 - 4iz + 1\right)$

**23.** $\frac{1}{2}i$

**25.** $8i$

**27.** $f$ não é analítica em $z = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$

**29.** $f$ é analítica para todo $z$

## Conjunto de Exercícios 3.2

**9.** (b) $f'(z) = -e^{-x}\cos x + i - e^{-x}\operatorname{sen} y$

**11.** (b) $f'(z) = 2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy - y\operatorname{sen} 2xy) + i2e^{x^2-y^2}(x\operatorname{sen} 2xy - y\cos 2xy)$

**13.** (b) $f'(z) = \dfrac{-(x-1)^2 + y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} + i\dfrac{2(x-1)y}{((x-1)^2 + y^2)^2}$

**15.** (b) $f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\dfrac{\cos\theta}{r^2} + i\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\right)$

**17.** $a = 1$, $b = 3$

**19.** (b) $f'(z) = 2x$ no eixo $x$

**21.** (b) $f'(z) = 3x^2 - 1$ no eixo $x$; $f'(z) = 3y^2 - 1$ no eixo $y$

## Conjunto de Exercícios 3.3

**1.** (c) $f(z) = x + i(y + C)$

**3.** (c) $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C)$

**5.** (c) $f(z) = \log_e(x^2 + y^2) + i\left(2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + C\right)$

**7.** (c) $f(z) = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y) + i(e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y) + C)$

**9.** (c) $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2} + C\right)$

**11.** $f(z) = xy + x + 2y - 5 + i\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + y - 2x + 1\right)$

**13.** (b) $f(z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ (c) $f(z) = \dfrac{i}{z}$

## Conjunto de Exercícios 3.4

**1.** $x = c_1$, $y = c_2$

**3.** $c_1x = x^2 + y^2$, $c_2y = x^2 + y^2$; as curvas de nível $u(x, y) = 0$ e $v(x, y) = 0$ correspondem a $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

**11.** (a) $\phi(x) = -50x + 50$ (b) $\Omega(z) = -50x + 50 - 50yi$

**13.** (a) $\phi(\theta) = \dfrac{120}{\pi}\theta$ (b) $\Omega(z) = \dfrac{120}{\pi}\theta - \dfrac{120}{\pi}\log_e r$

## Questionário de Revisão do Capítulo 3

**1.** falso

**3.** verdadeiro

**5.** verdadeiro

**7.** verdadeiro

**9.** verdadeiro

**11.** verdadeiro

**13.** $-\dfrac{2z + 5i}{(z^2 + 5iz - 4)^2}$

**15.** $2 + i$

**17.** $f'(z) = \dfrac{(y-1)^2 - (x-1)^2}{[(x-1)^2 + (y-1)^2]^2} + i\dfrac{2(x-1)(y-1)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2]^2}$

**19.** constante

**21.** $v(x, y) = e^{-x}(x\cos y + y\operatorname{sen} y)$

# Capítulo 4

## Conjunto de Exercícios 4.1

**1.** $z^2e^{z+i} + 2ze^{z+i}$

**3.** $ie^{iz} + ie^{-iz}$

**5.** $e^{x^2-x-y^2}$

**7.** $2x + 2n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

**9.** $e^y\cos x - ie^y\operatorname{sen} x$

**11.** $e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)$

**13.** $f$ não é diferenciável em qualquer ponto

**15.** $\arg(w) = -2$

**17.** $e < |w| \le e^2$

**19.** $1 \le |w| \le 2$, $-\pi/4 \le \arg(w) \le \pi/2$

**21.** $\log_e 5 + (2n + 1)\pi i$

**23.** $\frac{3}{2}\log_e 2 + \frac{1}{4}(8n + 3)\pi i$

**25.** $\frac{3}{2}\log_e 2 + \frac{1}{3}(6n+1)\pi i$

**27.** $\frac{1}{2}\log_e 72 - \frac{1}{4}\pi i$

**29.** $2{,}5650 + 2{,}7468i$

**31.** $5\log_e 2 - \frac{1}{3}\pi i$

**33.** $2\log_e 2 + \frac{1}{2}(4n+1)\pi i$

**35.** $4 + \frac{1}{2}(4n-1)\pi i$

**37.** diferenciável no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, $f'(z) = 6z - 2ie^{2iz} + \dfrac{i}{z}$

**39.** diferenciável quando $z$ não está no raio que emana de $\frac{1}{2}i$ e que contém

$$-1 + \tfrac{1}{2}i;\ z \neq -i, \quad \text{e} \quad z \neq i,\ f'(z) = \frac{2\dfrac{z^2+1}{2z-i} - 2z\text{Ln}(2z-i)}{(z^2+1)^2}$$

**41.** $v = \frac{1}{6}\pi$

**43.** $u = 2\log_e 2$, $-\pi < v \leq \pi$

**45.** $\log_e 3 \leq u \leq \log_e 5$, $-\pi < v \leq \pi$

## Conjunto de Exercícios 4.2

**1.** $e^{-3(2n+1)\pi}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**3.** $\sqrt{2}e^{(8n+1)\pi/4 + i[(8n+1)\pi/4 - (\log_e 2)/2]}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**5.** $e^{(-4n+1)\pi/2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**7.** $e^{-3\pi}$

**9.** $e^{i4\log_e 2}$

**11.** $e^{-\pi + i3\log_e 2}$

**15.** $\frac{3}{2}\sqrt[4]{2}e^{\pi i/8}$

**17.** $\sqrt{2}e^{-\pi/3 + i[(\pi/4) + \log_e 2]}$

## Conjunto de Exercícios 4.3

**1.** $i\,\text{senh}\,4 \approx 27{,}2899i$

**3.** $\cos 2\cosh 4 + i\,\text{sen}\,2\ \text{senh}\,4 \approx -11{,}3642 + 24{,}8147i$

**5.** $i\tanh 2 \approx 0{,}9640i$

**7.** $-i\ \text{csch}\,1 \approx -0{,}8509i$

**9.** $z = 2n\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}-1\right)$ ou $z = (2n+1)\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}+1\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**11.** $z = \frac{1}{4}(4n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**17.** $2z\cos\left(z^2\right)$

**19.** $\tan\left(\dfrac{1}{z}\right) - \dfrac{1}{z}\sec^2\left(\dfrac{1}{z}\right)$

**21.** $-1$

**23.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cosh 1 + i\frac{1}{2}\text{senh}\,1 \approx 1{,}3364 + 0{,}5876i$

**25.** $z = \log_e\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(2n+1)\pi i$ ou $z = \log_e\left(-1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(2n-1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**27.** Não há solução.

**33.** $\cos z\,\text{senh}\,z + \text{sen}\,z\cosh z$

**35.** $i\,\text{sech}^2\,(iz-2)$

## Conjunto de Exercícios 4.4

**1.** $\frac{1}{2}(4n+1)\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}+1\right)$ e $\frac{1}{2}(4n-1)\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}-1\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**3.** $\frac{1}{2}(4n+1)\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}\pm 1\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**5.** $-\frac{1}{4}(4n-1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**7.** $\frac{1}{2}(4n+1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**9.** $\frac{1}{4}\log_e 2 + \frac{1}{8}(8n+3)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**11.** (a) $-i\log_e\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$ (b) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

**13.** (a) $\frac{1}{2}(\pi - \arctan 2) + i\frac{1}{4}\log_e 5$ (b) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

**15.** (a) $\log_e\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2}\pi i$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}i$

### Conjunto de Exercícios 4.5

**1.** $\phi(x, y) = -x + 5$

**3.** $\phi(x, y) = \frac{5}{4}\sqrt{3}x - \frac{5}{4}y + 10$

**5.** $\phi(x, y) = 12 + \dfrac{33}{\pi}\text{Arg}(\text{sen}(z - \pi) + 1) - \dfrac{25}{\pi}\text{Arg}(\text{sen}(z - \pi) - 1)$

**7.** $\phi(x, y) = 15 - \dfrac{9}{\pi}\text{Arg}(\text{sen}(iz) + 1) + \dfrac{17}{\pi}\text{Arg}(\text{sen}(iz) - 1)$

### Questionário de Revisão do Capítulo 4

**1.** verdadeiro

**3.** falso

**5.** falso

**7.** verdadeiro

**9.** falso

**11.** falso

**13.** falso

**15.** verdadeiro

**17.** verdadeiro

**19.** verdadeiro

**21.** $e^x \cos y$, $e^x \text{sen } y$

**23.** $\log_e 2 + \frac{1}{6}\pi i$

**25.** $2n\pi - i\log_e 2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**27.** eixo real não positivo

**29.** $\frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{1}{4}(8n + 1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**31.** $z_2 = e^{2\pi}$

**35.** $\cosh 4$

**37.** $\text{sen } x \cosh y$, $\cos x \,\text{senh } y$

**39.** $\pm 1$

## Capítulo 5

### Conjunto de Exercícios 5.1

**1.** $\frac{64}{3}$

**3.** $-\dfrac{1}{\pi}$

**5.** $\frac{1}{2}\ln 9$

**7.** $8e^{-1} - 12e^{-2}$

**9.** $-\frac{1}{2}\ln 3$

**11.** $-125/3\sqrt{2}$; $-250(\sqrt{2} - 4)/12$; $\frac{125}{2}$

**13.** $3$; $6$; $3\sqrt{5}$

**15.** $21$

**17.** $30$

**19.** $1$

**21.** $1$

**23.** $460$

**25.** $\frac{26}{9}$

**27.** $-\frac{64}{3}$

**29.** $-\frac{8}{3}$

**31.** $0$

**33.** Em cada curva, o valor da integral de linha é $\frac{208}{3}$.

**35.** Com $\rho = kx$, $m = k\pi$.

### Conjunto de Exercícios 5.2

**1.** $-28 + 84i$

**3.** $-48 + \frac{736}{3}i$

**5.** $(2 + \pi)i$

**7.** $\pi i$

**9.** $-\frac{7}{12} + \frac{1}{12}i$

**11.** $-e - 1$

**13.** $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{4}$

**15.** $0$

**17.** $\frac{1}{2}i$

**19.** $0$

**21.** $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$

**23.** $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$

**25.** $\frac{5}{12}\pi e^5$

**27.** $6\sqrt{2}$

**31.** (a) $-11 + 38i$ (b) $0$

## Conjunto de Exercícios 5.3

**9.** $2\pi i$

**11.** $2\pi i$

**13.** 0

**15.** (a) $2\pi i$ (b) $4\pi i$ (c) 0

**17.** (a) $-8\pi i$ (b) $-6\pi i$

**19.** $-\pi(1+i)$

**21.** 0

**23.** $-4\pi i$

**25.** $-6\pi i$

## Conjunto de Exercícios 5.4

**1.** $-2i$

**3.** $48+24i$

**5.** $6+\frac{26}{3}i$

**7.** 0

**9.** $-\frac{7}{6}-\frac{22}{3}i$

**11.** $-\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{\pi}i$

**13.** $2{,}3504i$

**15.** 0

**17.** $\pi i$

**19.** $\frac{1}{2}i$

**21.** $11{,}4928+0{,}9667i$

**23.** $-0{,}9056+1{,}7699i$

**25.** $\sqrt{2}\,i$

## Conjunto de Exercícios 5.5

**1.** $8\pi i$

**3.** $-2\pi i$

**5.** $-\pi(20+8i)$

**7.** (a) $-2\pi$ (b) $2\pi$

**9.** $-8\pi$

**11.** $-2\pi e^{-1}i$

**13.** $\frac{4}{3}\pi i$

**15.** (a) $-5\pi i$ (b) $-5\pi i$ (c) $9\pi i$ (d) 0

**17.** (a) $-\pi(3+i)$ (b) $\pi(3+i)$

**19.** $\pi\left(\frac{8}{3}+12i\right)$

**21.** 0

**23.** $-\pi i$

**25.** 6

**27.** (a) 16; 4 (b) 25; 9 (c) 7; 3

## Conjunto de Exercícios 5.6

**5.** $f(z)=\cos\theta_0+i\,\mathrm{sen}\theta_0=e^{i\theta_0}$, $g(z)=\overline{f(z)}=\cos\theta_0-i\,\mathrm{sen}\theta_0=e^{-i\theta_0}$ é constante e, portanto, é analítica em todos os pontos.

**7.** $f(z)=2\bar{z}+3i$, $g(z)=\overline{f(z)}=2z-3i$ é uma função polinomial e, portanto, é analítica em todos os pontos.

**9.** $\mathbf{F}(x,y)=(x^2-y^2-2xy)\mathbf{i}+(y^2-x^2-2xy)\mathbf{j}$

**11.** $\mathbf{F}(x,y)=(e^x\cos y)\mathbf{i}+(e^x\,\mathrm{sen}\,y)\mathbf{j}$

**13.** $\Omega(z)=e^{-i\theta_0}z$; linhas equipotenciais são a família de retas $x\cos\theta_0+y\,\mathrm{sen}\,\theta_0=c_1$; as linhas de fluxo são a família de retas $-x\,\mathrm{sen}\,\theta_0+y\cos\theta_0=c_2$.

**15.** $\Omega(z)=z^2-3iz$; linhas equipotenciais são a família de hipérboles $x^2-y^2+3y=c_1$; as linhas de fluxo são a família de hipérboles $2xy-3x=c_2$.

**17.** $\mathbf{F}(x,y)=-2xy\mathbf{i}+(y^2-x^2)\mathbf{j}$

**21.** (a) Para um ponto $(x,y)$ distante da origem, o campo de velocidade é dado por $\mathbf{F}(x,y)\approx A\mathbf{i}$, ou seja, o fluxo é aproximadamente uniforme.

**23.** (a) As linhas de fluxo são $\operatorname{Arg}(z - x_1) = c_1$, que são raios com extremidade em $z = x_1$.

**25.** Circulação é 0; fluxo líquido é 0.

**27.** Circulação é 0; fluxo líquido é $2\pi$.

**29.** Circulação é $-4\pi$; fluxo líquido é $12\pi$.

## Questionário de Revisão do Capítulo 5

**1.** falso

**3.** verdadeiro

**5.** verdadeiro

**7.** verdadeiro

**9.** verdadeiro

**11.** verdadeiro

**13.** falso

**15.** verdadeiro

**17.** verdadeiro

**19.** verdadeiro

**21.** circunferência unitária centrada na origem

**23.** $z_1(t)$ e $z_2(t)$ descrevem circunferências unitárias centradas na origem, mas com orientações opostas.

**25.** 0

**27.** $\frac{8}{3}$

**29.** $2\cos(2+i) - 2\cos 3i$

**31.** $2\pi i$

**33.** $6\pi^2 - \pi i$

**35.** $2\pi i/(n-1)!$

**37.** 0 para $n \neq -1$ e $2\pi i$ para $n = -1$.

**39.** $i - 1$

# Capítulo 6

## Conjunto de Exercícios 6.1

**1.** $5i,\ -5,\ -5i,\ 5,\ 5i$

**3.** $0, 2, 0, 2, 0$

**5.** converge

**7.** converge

**9.** diverge

**11.** $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = 2$ e $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \frac{3}{2}$ e de modo que $L = 2 + \frac{3}{2}i$.

**13.** A série converge a $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

**15.** divergente

**17.** convergente, $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

**19.** convergente, $\frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$

**21.** $|z - 2i| = \sqrt{5}$, $R = \sqrt{5}$

**23.** $|z - 1 - i| = 2$, $R = 2$

**25.** $|z - i| = 1/\sqrt{10}$, $R = 1/\sqrt{10}$

**27.** $|z - 4 - 3i| = 25$, $R = 25$

**29.** $|z - i| = \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{2}$

**31.** $z = -2 + i$

**33.** $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge.

## Conjunto de Exercícios 6.2

**1.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k$, $R = 1$

**3.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k(2z)^{k-1}$, $R = \frac{1}{2}$

**5.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(2z)^k$, $R = \infty$

**7.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$, $R = \infty$

**9.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$, $R = \infty$

**11.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{4k+2}$, $R = \infty$

**13.** $e^{3i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z - 3i)^k$, $R = \infty$

**15.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k$, $R = 1$

**17.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3-2i)^{k+1}}(z - 2i)^k$, $R = \sqrt{13}$

**19.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(z-1)^k$, $R = 2$

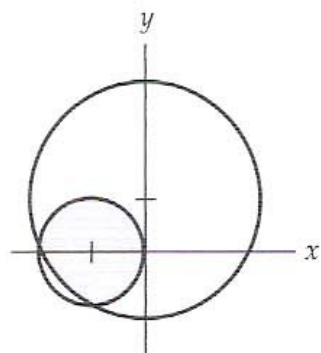
**21.** $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots,\ R = \infty$

**23.** $z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots$

**25.** $\frac{1}{2i} + \frac{3}{(2i)^2}z + \frac{7}{(2i)^3}z^2 + \frac{15}{(2i)^4}z^3 + \cdots,\ R = 1$

**27.** $R = 2\sqrt{5}$

**29.** $R = \frac{\pi}{2}$

**31.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z+1)^k,\ R = \sqrt{2};\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2+i)^{k+1}}(z-i)^k,\ R = \sqrt{5}$

**33.** $\frac{1}{1-3z}$

**37.** $1{,}1 + 0{,}12i$

## Conjunto de Exercícios 6.3

**1.** $\frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \cdots$

**3.** $1 - \frac{1}{1! \cdot z^2} + \frac{1}{2! \cdot z^4} - \frac{1}{3! \cdot z^6} + \cdots$

**5.** $\frac{e}{z-1} + e + \frac{e(z-1)}{2!} + \frac{e(z-1)^2}{3!} + \cdots$

**7.** $-\frac{1}{3z} - \frac{1}{3^2} - \frac{z}{3^3} - \frac{z^2}{3^4} - \cdots$

**9.** $\frac{1}{3(z-3)} - \frac{1}{3^2} + \frac{z-3}{3^3} - \frac{(z-3)^2}{3^4} + \cdots$

**11.** $\cdots - \frac{1}{3(z-4)^2} + \frac{1}{3(z-4)} - \frac{1}{12} + \frac{z-4}{3 \cdot 4^2} - \frac{(z-4)^2}{3 \cdot 4^3} + \cdots$

**13.** $\cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \cdots$

**15.** $\frac{-1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots$

**17.** $\frac{1}{3(z+1)} - \frac{2}{3^2} - \frac{2(z+1)}{3^3} - \frac{2(z+1)^2}{3^4} - \cdots$

**19.** $\cdots - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{3z} - \frac{1}{3} - \frac{z}{3 \cdot 2} - \frac{z^2}{3 \cdot 2^2} - \cdots$

**21.** $\frac{1}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + \cdots$

**23.** $\frac{1}{z-2} - 3 + 6(z-2) - 10(z-2)^2 + \cdots$

**25.** $\frac{3}{z} - 4 - 4z - 4z^2 - \cdots$

**27.** $\cdots + \frac{2}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + 1 + (z-1)$

**29.** $\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \cdots$

## Conjunto de Exercícios 6.4

**1.** Definir $f(0) = 2$.

**3.** Definir $f(0) = 0$.

**5.** $-2 + i$ é um zero de ordem 2.

**7.** 0 é um zero de ordem 2; $i$ e $-i$ são zeros simples.

**9.** $2n\pi i$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, são zeros simples.

**11.** ordem 5

**13.** ordem 1

**15.** $-1 + 2i$ e $-1 - 2i$ são polos simples.

**17.** $-2$ é um polo simples; $-i$ é um polo de ordem 4.

**19.** $(2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, são polos simples.

**21.** 0 é um polo de ordem 2.

**23.** $(2n+1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, são polos simples.

**25.** 1 é um polo simples.

**27.** singularidade essencial

## Conjunto de Exercícios 6.5

**1.** $\frac{2}{5}$

**3.** $-3$

**5.** 0

**7.** $\text{Res}(f(z),\ -4i) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(f(z),\ 4i) = \frac{1}{2}$

**9.** $\text{Res}(f(z),\ 1) = \frac{1}{3}$, $\text{Res}(f(z),\ -2) = -\frac{1}{12}$, $\text{Res}(f(z),\ 0) = -\frac{1}{4}$

**11.** $\text{Res}(f(z),\ -1) = 6$, $\text{Res}(f(z),\ -2) = -31$, $\text{Res}(f(z),\ -3) = 30$

**13.** $\text{Res}(f(z),\ 0) = -3/\pi^4$, $\text{Res}(f(z),\ \pi) = (\pi^2 - 6)/2\pi^4$

**15.** $\text{Res}(f(z),\ (2n+1)\pi/2) = (-1)^{n+1}$, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

**17.** $0$; $2\pi i/9$; $0$

**19.** $\pi i$; $\pi i$; $0$

**21.** $\pi/3$

**23.** $0$

**25.** $2\pi i \cosh 1$

**27.** $-4i$

**29.** $6i$

**31.** $\left(\dfrac{1}{3\pi^2} + \dfrac{1}{\pi}\right) i$

**33.** $2\pi/3$

## Conjunto de Exercícios 6.6

**1.** $\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$

**3.** $0$

**5.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

**7.** $\dfrac{\pi}{4}$

**9.** $\dfrac{\pi}{6}$

**11.** $\pi\left(\dfrac{90 - 52\sqrt{3}}{12 - 7\sqrt{3}}\right)$

**15.** $\pi$

**17.** $\dfrac{\pi}{16}$

**19.** $\dfrac{3\pi}{8}$

**21.** $\dfrac{\pi}{2}$

**23.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

**25.** $\dfrac{\pi}{6}$

**27.** $\pi e^{-1}$

**29.** $\pi e^{-1}$

**31.** $\pi e^{-3}$

**33.** $\dfrac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\sqrt{2} + \text{sen}\,\sqrt{2}\right)$

**35.** $-\dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{e^{-3}}{3} - e^{-1}\right)$

**37.** $\pi e^{-1}$

**57.** $\log_e 2$

**59.** $12\pi i$

**61.** $4\pi i$

**63.** $10\pi i$

**69.** $\dfrac{\pi^2}{8}$

**71.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi^2}{16}$

## Conjunto de Exercícios 6.7

**1.** $\dfrac{1}{s-5}$, $s > 5$

**3.** $\dfrac{3}{s^2+9}$, $s > 0$

**5.** $s > k$

**7.** $\dfrac{k}{s^2-k^2}$, $\dfrac{s}{s^2-k^2}$

**9.** $\frac{1}{120}t^5$

**11.** $\frac{1}{2}\,\text{sen}2t$

**13.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{senh}\sqrt{3}t$

**15.** $e^{3(t-a)}\mathcal{U}(t-a) - e^{2(t-a)}\mathcal{U}(t-a)$

**17.** $\frac{1}{2}\operatorname{senh} t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$

**19.** $\frac{1}{1-i\alpha}$

## Questionário de Revisão do Capítulo 6

**1.** verdadeiro

**3.** verdadeiro

**5.** verdadeiro

**7.** verdadeiro

**9.** falso

**11.** falso

**13.** verdadeiro

**15.** verdadeiro

**17.** verdadeiro

**19.** falso

**21.** $-3+6i$

**23.** $\frac{125}{26} - \frac{25}{26}i$

**25.** $|z-2-i| = \frac{1}{13}$

**27.** $1/R$

**29.** $\frac{1}{5}(z+1) - \frac{1}{5^2}(z+1)^2 + \frac{1}{5^3}(z+1)^3 - \cdots;\ R=5$

**31.** $\frac{7}{(z+1)^2} + \frac{4}{z+1} - 2 + (z+1)$

**33.** 1

**35.** $\frac{1}{6}$

**37.** $1,\ \frac{1}{z-\pi},\ \pi$

**39.** (a) $\pi + \pi i$

(b) 0, para $n=0$; 0, para $n=1$; $2\pi i(1/1!)$, para $n=2$; 0, para $n=3$; $2\pi i(-1/3!)$, para $n=4$; 0, para $n=5$; $2\pi i(1/5!)$, para $n=6$; e assim por diante.

# Capítulo 7

## Conjunto de Exercícios 7.1

**1.** $f$ não é conforme em $z = \pm 1$.

**3.** $f$ não é conforme em $z = (2n+1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**5.** $f$ não é conforme em $z =$ Đ$(2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**11.** $w = \cos\frac{\pi z}{2}$, da Entrada H-4 do Apêndice III.

**13.** $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1/2}$, das Entradas H-5 e E-4 do Apêndice III.

**15.** $w = \left(\frac{e^{\pi/z} + e^{-\pi/z}}{e^{\pi/z} - e^{-\pi/z}}\right)^{1/2}$, das Entradas H-6 e E-4 do Apêndice III.

## Conjunto de Exercícios 7.2

**1.** $T(0) = \infty,\ T(1) = i,\ T(i) = 1,\ T(\infty) = 0$

**3.** $T(0) = -1,\ T(1) = i,\ T(i) = \infty,\ T(\infty) = 1$

**5.** $|w| \geq 1$ e $u \geq \frac{1}{2}$

**7.** $u \leq 0$ e $|w-1| \geq 2$

**9.** $v \geq 0$ e $\left|w - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$

**11.** $v \geq 0$ e $u \leq 1$

**13.** A imagem consiste em um conjunto de todos os pontos $w = u + iv$ tais que $|w + \frac{1}{3}| \geq \frac{2}{3}$ e $v \leq 0$.

**15.** A imagem consiste em um conjunto de todos os pontos $w = u + iv$ tais que $|w + \frac{1}{20}| \geq \frac{9}{20}$ e $v \geq -\frac{1}{2}$.

**17.** (a) $S^{-1}(z) = \frac{z+1}{z-i}$

(b) $S^{-1}(T(z)) = \frac{(1+i)z - 1}{2z+i}$

**19.** (a) $S^{-1}(z) = \frac{z-2}{z-1}$

(b) $S^{-1}(T(z)) = \frac{3}{z}$

**21.** $T(z) = \dfrac{2z+2}{-z+2}$ **23.** $T(z) = \dfrac{2z}{z+i}$

**25.** $T(z) = \dfrac{3z-3i}{(1+4i)z-(4+i)}$

## Conjunto de Exercícios 7.3

**1.** primeiro quadrante $u \geq 0$, $v \geq 0$

**3.** região limitada por: raio $u = 0$, $0 \leq v < \infty$, segmento de reta $v = 0$, $0 \leq u \leq 1$, e raio $u = 1$, $-\infty < v \leq 0$, e que contém o ponto $1 + i$.

**5.** região limitada por: raio $v = 1$, $-\infty < u \leq 1$, segmento de reta $u = 0$, $0 \leq v \leq 1$, segmento de reta $v = 0$, $0 \leq u \leq 1$, e raio $\arg(z-1) = \pi/4$, e que contém o ponto $1 + i$.

**7.** $f'(z) = A(z+1)^{-1/2}z^{-1/2}(z-1)^{-1/2}$ **9.** $f'(z) = A(z+1)^{-1/3}z^{-1/3}$

## Conjunto de Exercícios 7.4

**1.** $\phi(x, y) = \dfrac{1}{\pi}[\text{Arg}(z+1) - 2\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z-1)]$

**3.** $\phi(x, y) = 5 + \dfrac{1}{\pi}[\text{Arg}(z+2) - 2\text{Arg}(z+1) + \text{Arg}(z) - 5\text{Arg}(z-1)]$

**5.** $\phi(x, y) = \dfrac{2x-1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{x-2}{y}\right)\right] + \dfrac{y}{\pi}\log_e\left[\dfrac{(x-2)^2+y^2}{x^2+y^2}\right]$

**7.** $\phi(x, y) = \dfrac{y}{\pi} + \dfrac{x^2-y^2}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]$

$$+ \frac{xy}{\pi}\log_e\left[\frac{(x-1)^2+y^2}{x^2+y^2}\right]$$

**9.** (b) $\phi(x, y) = e^{-y}\cos x$

## Conjunto de Exercícios 7.5

**1.** (a) $w = z^2$ (b) $\phi(x, y) = \dfrac{1}{\pi}\left[-\text{Arg}\left(z^2+1\right) - \text{Arg}\left(z^2\right) + 2\text{Arg}\left(z^2-1\right)\right]$

**3.** (a) $w = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$

(b) $\phi(x, y) = 1 + \dfrac{1}{\pi}\left\{2\text{Arg}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2 + 1\right] + \text{Arg}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2\right] - 2\text{Arg}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]\right\}$

**5.** (a) $w = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right)$

(b) $\phi(x, y) = 1 + \dfrac{1}{\pi}\left\{-3\text{Arg}\left[\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right) + 1\right] + 3\text{Arg}\left[\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right)\right] - \text{Arg}\left[\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right) - 1\right]\right\}$

**7.** (a) $w = \dfrac{1}{z}$ (b) $\phi(x,y) = \dfrac{-2x}{x^2+y^2} + 2$

**9.** (a) $w = \dfrac{2z-1-\sqrt{3}}{(4+2\sqrt{3})\,z+1+\sqrt{3}}$

(b) $\phi(x,y) = \dfrac{10}{\log_e\left(7-4\sqrt{3}\right)}\log_e\left|\dfrac{2z-1-\sqrt{3}}{(4+2\sqrt{3})\,z+1+\sqrt{3}}\right|$

**11.** (a) $w = \text{sen}^{-1} z$ (b) $\phi(x, y) = 5 + \dfrac{10}{\pi}\text{Re}\left[\text{sen}^{-1} z\right]$

**13.** $\Omega(z) = z^4$ **15.** $\Omega(z) = \cosh z$

**17.** (a) $z = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(w+1) + \text{Ln}(w-1)]$

(b) $z(t) = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(t+1+ic_2) + \text{Ln}(t-1+ic_2)]$

**19.** (a) $z = \frac{1}{\pi}\left[(w^2-1)^{1/2} + \cosh^{-1} w\right]$

(b) $z(t) = \frac{1}{\pi}\left\{\left[(t+ic_2)^2-1\right]^{1/2} + \cosh^{-1}(t+ic_2)\right\}$

**21.** $\Omega(z) = \mathrm{Ln}(z^4+4) - \mathrm{Ln}(z^4-16)$

## Questionário de Revisão do Capítulo 7

**1.** falso

**3.** falso

**5.** verdadeiro

**7.** verdadeiro

**9.** falso

**11.** verdadeiro

**13.** verdadeiro

**15.** verdadeiro

**17.** sentido

**19.** triplica

**21.** circunferência

**23.** $\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

**25.** $\pi/2,\ 3\pi/4$

**27.** $\pi/5$

**29.** $\left(\frac{1+t+ic_2}{1-t-ic_2}\right)^2$